# EA. Parcial grupos. Dobles grados con Matemáticas

## 29 de abril de 2015

---

1. (2,5 puntos) Enuncia y demuestra el Teorema de Cayley para grupos.

2. (1 punto) Considera la permutación $\sigma \in S_9$ que tiene la siguiente expresión como producto de ciclos:

   $$\sigma = (1\ 3\ 5\ 7)(2\ 3)(2\ 4\ 9)(3\ 6\ 1)$$

   Expresa $\sigma$ en notación matricial, como producto de ciclos disjuntos y como producto de transposiciones. Determina el orden de $\sigma$, su paridad (di si es par o impar) y escribe todos los elementos de $H =< \sigma^2 >$.

3. (1 punto) Sea $f : G \longrightarrow H$ un homomorfismo de grupos donde $G$ es un grupo finito. Demuestra que se cumple:

   $$|G| = |Ker(f)| \cdot |Im(f)|$$

4. (2 puntos) Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente tus respuestas:

   *a*) Sean $\sigma_1, \sigma_2$ elementos de $S_7$. Se cumple:

   $$ord(\sigma_1\sigma_2) \leq max\{ord(\sigma_1), ord(\sigma_2)\}$$

   *b*) La aplicación $f : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$, definida por $f([a]_6) = [5a]_6$, es un homomorfismo inyectivo de grupos.

   *c*) Dada una acción de un grupo finito $G$ sobre un conjunto finito $X$ siempre se cumple, para todo $a \in X$,

   $$|orb(a)| \leq |Stab(a)|$$

   *d*) Si $f : G \longrightarrow H$ es un isomorfismo de grupos, entonces $f^{-1}$ también es isomorfismo de grupos.

5. (2,5 puntos) Enumera todos los elementos del grupo dihedral $D_4$. Halla razonadamente todos los subgrupos de $D_4$ y determina (también razonadamente) cuáles de ellos son normales en $D_4$.

6. (1 punto) Demuestra que $S_n$ está generado por las $n-1$ transposiciones $(1,\ 2), (1,\ 3), \ldots, (1,\ n)$. Pista: Puedes apoyarte en que $S_n$ está generado por el conjunto de todas las transposiciones.