EA. Parcial anillos. Grado en Matemáticas

7 de marzo de 2018

---

1. (2,5 puntos) Sean A un anillo conmutativo con unidad e I un ideal de A. Demuestra que I es maximal si y sólo si A/I es un cuerpo.

2. (2,5 puntos) Considera $p(x) = x^5 - 1$.

   a) (1,5 puntos) Halla la factorización en factores irreducibles de $p(x)$ en $\mathbb{Q}[x]$. Justifica que los factores que obtienes son irreducibles.

   b) (1 punto) ¿Tiene la factorización de $p(x)$ en $\mathbb{R}[x]$ el mismo número de factores irreducibles que su factorización en $\mathbb{Q}[x]$? Justifica tu respuesta.

3. (2,5 puntos) Considera el conjunto

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \ / \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

   que es un subanillo de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   a) (1 punto) Demuestra que el conjunto

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ / \ b \in \mathbb{R} \right\}$$

   es un ideal de A.

   b) (1,5 puntos) Demuestra que A/I es isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Proporciona explícitamente un isomorfismo entre ambos anillos y demuestra que lo es.
   Pista: el primer teorema de isomorfía puede ser útil.

4. (2,5 puntos) Considera el anillo $A = \mathbb{Z}_5[x]$, los polinomios en una variable con coeficientes en $\mathbb{Z}_5$. Para aligerar la notación, no utilices notación de clases de equivalencia para referirte a los elementos de $\mathbb{Z}_5$, es decir, considera que $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Considera el polinomio $p(x) = x^2 + 2 \in A$ e $I = (p(x))$, el ideal principal generado por $p(x)$.

   a) (1 punto) Demuestra que A/I es un cuerpo formado por 25 elementos.

   b) (0,5 puntos) Determina si A/I es isomorfo a $\mathbb{Z}_{25}$.

   c) (1 punto) Sea $q(x) = x + 4 \in A$. Determina el inverso de $q(x) + I$ en A/I.

5. (Extra: 1,5 puntos) Sea A un anillo conmutativo con unidad que además tiene la propiedad de ser *booleano*, es decir, $\forall a \in A$ se tiene que $a^2 = a$. Sea I un ideal primo de A.

   a) (1 punto) Demuestra que I es maximal.

   b) (0,5 puntos) Di cuántos elementos tiene el cociente A/I.