EA. Parcial anillos. Grado en Matemáticas

1 de marzo de 2017

---

1. (2 puntos) Demuestra que todo dominio de integridad finito es un cuerpo.

2. (1,5 puntos + 1 punto extra) Sean A y B anillos, I ideal de A y J ideal de B. Se define:

$$I \times J := \{(i, j) \ / \ i \in I, j \in J\}$$

   a) (1,5 puntos) Demuestra que $I \times J$ es un ideal de $A \times B$.

   b) (1 punto extra) Demuestra que el anillo $(A \times B)/(I \times J)$ es isomorfo al anillo $(A/I) \times (B/J)$.
   Pista: Usa el primer teorema de isomorfía.

3. (3,5 puntos) Consideramos el anillo $C = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$. Para aligerar la notación, podéis escribir los elementos de C simplemente como pares de la forma (x, y), donde se sobreentiende que x representa a $[x]_4$ e y representa a $[y]_6$.

   a) (0,5 puntos) Halla todos los elementos invertibles de C.

   b) (0,5 puntos) Proporciona un argumento que justifique que C no es isomorfo a $\mathbb{Z}_{24}$.
   Nota: Hay un ejercicio de las hojas en el que se demuestra un resultado general que engloba este caso. No puedes simplemente citar ese ejercicio como tu argumento, tienes que proporcionar un argumento concreto que valga para este caso.

   c) (1 punto) Considera el conjunto

$$K = \{(0, 0), (2, 0), (0, 3), (2, 3)\}$$

   Demuestra que K es un ideal de C.
   Pista: Puedes apoyarte en el ejercicio 2.

   d) (1,5 puntos) Construye explícitamente el cociente C/K, enumerando los elementos que tiene cada una de las clases de equivalencia. Di de cuántos elementos consta el cociente C/K.

4. (3 puntos) Consideramos el polinomio $p(x) = x^4 + x^2 + 1$.

   a) (0,5 puntos) Determina si $p(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{R}[x]$.

   b) (1 punto) Determina si $p(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}[x]$.

   c) (0,5 puntos) Determina si $p(x)$ es irreducible sobre $\mathbb{Z}_3[x]$.

   d) (1 punto) Halla una factorización de $p(x)$ en factores irreducibles sobre $\mathbb{Z}_7[x]$.