EA. Parcial anillos. Grado en Matemáticas

2 de marzo de 2016

---

1. (2 puntos) Sean A y B dos anillos y $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos.
   a) Define $Ker(f)$ y demuestra que es un ideal de A (sin dar por supuesto que es un subanillo).
   b) Demuestra que $Ker(f) = \{0_A\}$ si y solo si f es inyectiva.
2. (2 puntos) Enuncia y demuestra el primer teorema de isomorfía.
3. a) (1 punto) Considera los polinomios $p(x) = x^4 + 5x^2 + 6$ y $q(x) = x^3 + 2x$ en el anillo $\mathbb{R}[x]$. Halla su máximo común divisor y una identidad de Bezout entre ellos.
   b) (1 punto) Halla una factorización de $p(x) = x^4 + 5x^2 + 6$ en factores irreducibles en los anillos $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Z}_2[x]$ y $\mathbb{Z}_5[x]$. Justifica por qué cada uno de los factores es irreducible.
4. (2 puntos) Considera los siguientes pares de anillos y di si son isomorfos. Si la respuesta es afirmativa, proporciona un isomorfismo entre ellos (pero no es necesario que demuestres que lo es). Si la respuesta es negativa, da un argumento que demuestre que no son isomorfos:
   a) $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \quad ; \quad \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$
   b) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6 \quad ; \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9$
   c) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_9 \quad ; \quad \mathbb{Z}_{18}$
   d) $\mathbb{Z}_{16} \quad ; \quad \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2)$.
5. (2 puntos) Considera los siguientes ideales de $\mathbb{Z}[x]$:
   - $I = (x)$
   - $J = (x^2)$
   - $K = \{$polinomios con término independiente par$\}$

   Para cada uno de ellos establece si es maximal y/o primo. Justifica tus respuestas (puedes utilizar resultados de teoría).
6. (Extra, 2 puntos) Sean K un cuerpo, A un anillo con unidad y $f : K \longrightarrow A$ un homomorfismo suprayectivo. Demuestra que f es un isomorfismo.