EA. Parcial anillos. Dobles grados con Matemáticas

18 de marzo de 2015

---

1. (2,5 puntos) Enuncia y demuestra el primer teorema de isomorfía para anillos.

2. (2 puntos) Consideramos el anillo de polinomios $A = \mathbb{R}[x]$ y el ideal principal $I = (x-1)$. Demuestra que A/I es isomorfo a $\mathbb{R}$. Construye explícitamente un isomorfismo entre los dos anillos.

3. (1 punto) Consideramos el anillo de polinomios $A = \mathbb{Z}_2[x]$ y el ideal principal $I = (x^2 + x + 1)$. Supongamos ya demostrado que $K = A/I$ es un cuerpo con 4 elementos formado por las siguientes clases de equivalencia $K = \{[0], [1], [x], [x+1]\}$. Construye razonadamente la tabla de multiplicar de K.

4. (1,5 puntos) Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente tus respuestas:

   a) La aplicación $f : \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z}$, definida por $f(a) = 2a$, es un isomorfismo de anillos.

   b) La aplicación $f : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}$, definida por $f([a]_4) = a$ para cada $a \in \{0, 1, 2, 3\}$, es un homomorfismo de anillos.

   c) La aplicación $f : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$, definida por $f([a]_2, [b]_3) = [ab]_6$ para cada $a \in \{0, 1\}$ y cada $b \in \{0, 1, 2\}$, es un homomorfismo de anillos.

5. (3 puntos) Di en cada caso si el polinomio $p(x)$ es o no irreducible en el anillo correspondiente. Justifica adecuadamente tus respuestas:

   a) $p(x) = x^4 + 5x^2 + 4$ en $\mathbb{R}[x]$.

   b) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 2$ en $\mathbb{C}[x]$.

   c) $p(x) = x^3 + x + 1$ en $\mathbb{Z}_5[x]$.

   d) $p(x) = x^4 + x^2 + 1$ en $\mathbb{Z}_2[x]$.

   e) $p(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ en $\mathbb{Q}[x]$.

   f) $p(x) = 2x^8 + 15x^3 + 10$ en $\mathbb{Q}[x]$.