EA. Examen de mayo. Grupos. Grado en Matemáticas

12 de mayo de 2016

---

1. Teoría:

   a) (0,25 puntos) Define acción de un grupo G sobre un conjunto B.

   b) (0,25 puntos) Define la relación que aparece de forma natural asociada a la acción de un grupo sobre un conjunto.

   c) (1 punto) Demuestra que la relación anterior es de equivalencia.

   d) (0,25 puntos) Define la órbita de un elemento $x \in B$.

   e) (0,25 puntos) Define el estabilizador de un elemento $x \in B$.

   f) (1 punto) Demuestra el estabilizador que acabas de definir es un subgrupo de G.

2. (3 puntos) Di, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, proporcionando demostraciones o contraejemplos según sea necesario:

   a) $\mathbb{Z}_6$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ son grupos isomorfos.

   b) $\mathbb{Z}_8$ y $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ son grupos isomorfos.

   c) $\mathbb{Z}_{10}^*$ y $\mathbb{Z}_4$ son grupos isomorfos.

   d) $\mathbb{Z}_{16}^*$ y D_4 son grupos isomorfos.

3. Considera el grupo $G = D_6$. Utiliza la siguiente notación para sus elementos:

$$
\begin{array}{ll}
\tau_{14} = (26)(35) & \tau_a = (12)(36)(45) \\
\tau_{25} = (13)(46) & \tau_b = (23)(14)(56) \\
\tau_{36} = (15)(24) & \tau_c = (34)(25)(16) \\
\sigma = (123456) &
\end{array}
$$

   Denotaremos el resto de elemnentos de G como potencias de σ. Considera los subgrupos $H =< \sigma^3 >$ y $K =< \sigma >$.

   a) (1 punto) Responde razonadamente, sin realizar operaciones con los elementos del grupo: ¿es K normal en G?

   b) (0,5 puntos) ¿Cuántos elementos tiene G/K? Enuméralos.

   c) (1 punto) Demuestra que H es normal en G.

   d) (0,5 puntos) ¿Cuántos elementos tiene G/H? Enuméralos.

   e) (0,5 puntos) Calcula el orden de cada elemento del cociente G/H.

   f) (0,5 puntos) Calcula el inverso de cada elemento del cociente G/H.