EA. Final grupos mayo. Dobles grados con Matemáticas

13 de mayo de 2015

---

1. (2,5 puntos) Enuncia y demuestra el primer teorema de isomorfía para grupos. Incluye la demostración de que el núcleo de un homomorfismo f es un subgrupo normal del dominio de f.

2. (2,5 puntos) Sea $f : A \longrightarrow B$ un isomorfismo de anillos. Consideramos A^* y B^* como los conjuntos de elementos invertibles de A y B respectivamente.

   a) Demuestra que si $x \in A^*$ entonces $f(x) \in B^*$.

   b) Lo demostrado en el apartado anterior permite definir una aplicación $g : A^* \longrightarrow B^*$ restringiendo f, es decir, $g(x) = f(x)$. Demuestra que g es un isomorfismo de grupos (considerando como operación de grupo la multiplicación de los anillos A y B respectivamente).

3. (2,5 puntos) Determina todos los elementos de A_4 (recuerda que es el subgrupo de S_4 formado por las permutaciones pares). Determina todos los subgrupos cíclicos de A_4. ¿Cuántos hay?

4. Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente tus respuestas:

   a) (1 punto) Sean σ_1, σ_2 elementos de S_n. Se cumple:

   $$ord(\sigma_1\sigma_2) = m.c.m.\{ord(\sigma_1), ord(\sigma_2)\}$$

   b) (1 punto) Existen un grupo G, un conjunto X, un elemento $a \in X$ y una acción de G sobre X tales que $|X| = 10$, $|G| = 9$ y $|orb(a)| = 5$.

   c) (0,5 puntos) Considera el grupo $G = D_8 \times \mathbb{Z}_2$, el elemento $\sigma = (12345678) \in D_8$ y el subgrupo H definido como

   $$H = \{(\sigma^i, y) \ / \ i \in \{0, 1, \dots 7\};\ y \in \mathbb{Z}_2\}.$$

   H es un subgrupo normal en G.