

EA. Final grupos junio. Dobles grados con Matemáticas

29 de junio de 2015

1.
 - a) (0,5 puntos) Define acción de un grupo G sobre un conjunto X .
 - b) (0,5 puntos) Dado $a \in X$ define $Stab(a)$, el estabilizador de a .
 - c) (1 punto) Demuestra que $Stab(a)$ es un subgrupo de G .
 - d) (1 punto) Enuncia el teorema de la órbita-estabilizador.
2. Considera las permutaciones $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ y $\tau = (1\ 5)$.
 - a) (1 punto) Calcula $\alpha = \sigma^{-2}\tau^{-1}$. Calcula el orden de α y su paridad.
 - b) (1 punto) ¿Es $\langle \sigma \rangle$ normal en S_6 ? ¿Y en D_6 ?
3. Considera $R_8 = \{z \in \mathbb{C} / z^8 = 1\}$, el grupo de raíces 8-ésimas de la unidad.
 - a) (1 punto) Da una descripción explícita de los elementos de R_8 .
 - b) (1 punto) Enumera todos los sugrupos cíclicos de R_8 . Pista: Te puede ayudar pensar en un grupo más sencillo al que R_8 sea isomorfo.
 - c) (0,5 puntos) De esos subgrupos cíclicos, di cuáles son normales en R_8 .
4. (2,5 puntos) Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica adecuadamente tus respuestas:
 - a) \mathbb{Z}_8^* es un grupo cíclico.
 - b) \mathbb{Z}_{10}^* es un grupo cíclico.
 - c) Todo grupo de orden 10 tiene algún elemento de orden 10.
 - d) Sean G un grupo de orden n y $g \in G$. Se cumple $g^{2n+1} = g$.
 - e) Sea $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4) \in D_4$. Se cumple que $(D_4 / \langle \sigma \rangle)$ y \mathbb{Z}_4 son grupos isomorfos.