EA. Grado en Matemáticas. 21 de junio de 2017.

Parte I: anillos.

---

1. (3 puntos) Teoría. Sean A un anillo conmutativo e I un ideal de A. Consideramos la relación de equivalencia vista en teoría: dados $a, b \in A$ se considera que

$$a \equiv b \Leftrightarrow a - b \in I$$

   a) (1 punto) Demuestra que la relación anterior es de equivalencia.

   b) (2 puntos) Dado $a \in A$, denotamos con $[a]$ la clase de equivalencia de a respecto de la relación anterior. Demuestra que en el cociente A/I se puede definir una suma y un producto a partir de la suma y el producto de los representantes y que esta operación está bien definida, es decir, que si $a, b, c, d \in A$ cumplen que $[a] = [c]$ y $[b] = [d]$ entonces $[a + b] = [c + d]$ y $[ab] = [cd]$.

2. (5 puntos) Consideramos el polinomio $p(x) = x^3 + 1$.

   a) (0,75 puntos) Halla la factorización de p en factores irreducibles en $\mathbb{Q}[x]$.

   b) (1 punto) Halla la factorización de p en factores irreducibles en $\mathbb{C}[x]$.

   c) (0,75 puntos) Halla la factorización de p en factores irreducibles en $\mathbb{Z}_2[x]$.

   d) (1 punto) Considera el anillo $A = \mathbb{Z}_2[x]$ y el ideal I generado por $p(x)$, es decir, $I = (x^3 + 1)$. Considera el anillo cociente $B = A = \mathbb{Z}_2[x]/I$. Determina justificadamente cuántos elementos tiene B y enumera esos elementos.

   e) (1,5 puntos) Determina justificadamente cuáles son todos los elementos invertibles y todos los divisores de cero de B. Para cada elemento invertible, determina su inverso.

3. (2 puntos) Para las siguientes parejas de anillos, di si son isomorfos. En caso afirmativo justifica tu respuesta encontrando un isomorfismo, en caso negativo justifica tu respuesta adecuadamente. Si el isomorfismo que encuentras se ha visto en teoría, no hace falta que demuestres que lo es.

   a) $A = \mathbb{Z}$ y $B = \mathbb{Q}$.

   b) $A = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ y $B = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

   c) $A = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ y $B = \mathbb{Z}_6$.

   d) $A = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ y $B = \mathbb{Z}_6$.

Parte II: grupos.

---

4. (3 puntos) Teoría.

   a) (2 puntos) Enuncia y demuestra el teorema de Lagrange para grupos finitos.

   b) (1 punto) Usa el teorema anterior para demostrar que en un grupo finito el orden de cualquier elemento es divisor del orden del grupo.

5. (3 puntos) Di si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones. Justifica adecuadamente tus respuestas. Incluye un contraejemplo cuando sea necesario. Los grupos que aparecen tienen muchos elementos, una justificación por enumeración no es adecuada y no se valorará como respuesta correcta, trata de usar argumentos generales en lugar de enumerativos.

   a) (0,75 puntos) $A_{20} \triangleleft S_{20}$.

   b) (0,75 puntos) Si G es un grupo, $H \triangleleft G$ y $K \triangleleft H$ entonces $K \triangleleft G$.

   c) (0,75 puntos) Sea la permutación $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4 \cdots 19\ 20) \in S_{20}$ y $H =< \sigma >$. Se cumple que $H \triangleleft D_{20}$.

   d) (0,75 puntos) Sea la permutación $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4 \cdots 19\ 20) \in S_{20}$ y $H =< \sigma >$. Se cumple que $H \triangleleft S_{20}$.

   Nota: Se recuerda que la notación $H \triangleleft G$ quiere decir que H es subgrupo normal de G.
   Nota: Se recuerda que A_n es el subgrupo de S_n formado por las permutaciones pares.

6. (4 puntos)

   a) (1 punto) Enumera todos los elementos del grupo alternado A_4.

   b) (1 punto) Determina cuántos subgrupos cíclicos hay en A_4 y cuántos elementos tiene cada uno de ellos.

   c) (1 punto) Encuentra un subgrupo de A_4 que no sea el total y que no sea cíclico.

   d) (1 punto) Considera la acción natural del grupo $G = A_4$ sobre el conjunto $B = \{1, 2, 3, 4\}$ (con acción natural se quiere decir que se tenga en cuenta que cada permutación es una función de B en B). Calcula todas las órbitas y estabilizadores de la acción.