EA. Examen de mayo. Anillos. Grado en Matemáticas

12 de mayo de 2016

---

1. Teoría:

   a) (0,5 puntos) Define ideal primo e ideal maximal.

   b) (1,5 puntos) Sean A un anillo conmutativo con unidad e $I \neq A$ un ideal de A. Demuestra que I es primo si y sólo si A/I es un dominio de integridad.

   c) (1 punto) Enumera todos los ideales de $\mathbb{Z}$. Di cuáles son primos y cuáles son maximales.

2. Di, razonadamente, si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, proporcionando demostraciones o contraejemplos según sea necesario:

   a) (0,5 puntos) $p(x) = x^{20} + 2$ es irreducible sobre $\mathbb{C}[x]$.

   b) (0,5 puntos) $p(x) = x^{20} + 2$ es irreducible sobre $\mathbb{R}[x]$.

   c) (0,5 puntos) $p(x) = x^{20} + 2$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}[x]$.

   d) (0,5 puntos) $p(x) = x^{20} + 2$ es irreducible sobre $\mathbb{Z}_3[x]$.

   e) (1 punto) La función $f : \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$ definida como $f([a]_4) = [3a]_4$ es isomorfismo de anillos.

   f) (1 punto) La función $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(a + bi) = a - bi$ es isomorfismo de anillos.

3. Considera el anillo $A = \mathbb{Z}_5[x]$ y el ideal $I = (x^2 + 1)$.

   a) (1,5 puntos) Demuestra que A/I <u>NO</u> es un cuerpo. <u>Nota</u>: enunciado rectificado.

   b) (1 punto) Encuentra el inverso de $[x]_I$ en A/I. <u>Nota</u>: $[x]_I$ es la clase módulo I del polinomio $p(x) = x$, que también se puede denotar $x + I$.

   c) (0,5 puntos) ¿Cuántos elementos tiene A/I?