COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Febrero. Modelo B

INSTRUCCIONES: Lea atentamente los enunciados. Conteste a las preguntas cortas exclusivamente en el espacio disponible a continuación del enunciado. Desarrolle la solución a los ejercicios en el espacio que necesite. Justifique las respuestas.

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x,y) = \left(xy^3, x^2 \cos y\right), \; g(x,y) = (y + e^x, x - y).$$

Determine la matriz jacobiana de $g \circ f$.

Solución:

2. Determine la curva de Bézier cuyo polígono de control es $\{(-1,2),(0,1),(1,1),(1,3)\}$.

Solución:

3. (1 punto) Sea C la semicircunferencia centrada en $(0,0)$ y de radio r, definida por la ecuación, para $t \in [0,\pi]$, por

$$\mathbf{x}(t) = (r\cos t, r \operatorname{sen} t).$$

Determine su longitud de arco entre 0 y $t_0 \in (0,\pi)$.

Solución:

Solución (continuación):

4. (1 punto) Estudie si, para $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, es regular la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\left(v^2 + 1\right) \cos u, v \operatorname{sen} u, v\right).$$

Solución:

EJERCICIOS

5. Sea C la curva dada por la ecuación:

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^3 + 1, t^2 - t, t^2 + t\right).$$

   a) (0.75 puntos) Estudie si C es una curva regular.

   b) (0.75 puntos) Determine la curvatura en un punto cualquiera de C. Determine sus puntos de inflexión si los tiene (llegará a una ecuación, no hace falta que la resuelva, sólo que indique los pasos que debería seguir).

   c) (0.75 puntos) Determine el triedro de Frenet en $\mathbf{x}(0)$.

   d) (0.75 puntos) Determine la ecuación de la recta tangente y del plano osculador a C en $\mathbf{x}(0)$.

6. Sea la superficie dada por las ecuaciones, para $0 < u < 2\pi, 0 < v < 10$, por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\left(v^2 + 1\right) \cos u, v \operatorname{sen} u, v\right).$$

   a) (1 punto) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental.

   b) (1 punto) Determine la ecuación de las curvas parámetro que pasan por el punto $\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

   c) (1 punto) Determine el ángulo que forman las curvas parámetro en el punto $\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

Curvas
Curvas en el plano no parametrizada por la longitud de arco:

$$k(t) = \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3}.$$

Curva en el plano definida por ecuaciones implícitas:

$$k(x,y) = \frac{(-f_y, f_x)\, H(f)\, (-f_y, f_x)^t}{\|\nabla f\|^3}.$$

Curvas en el espacio:

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\det(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t))}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|^2}.$$

Superficies
Formas fundamentales:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v. \\ e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu}, \quad f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv}, \quad g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv}. \end{aligned}$$

Curvaturas:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Ecuación de las curvaturas principales:

$$k^2\left(EG - F^2\right) - (Eg - 2Ff + Ge)\, k - f^2 + eg = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas de curvatura:

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)\, dudv + (fG - gF)(dv)^2 = 0.$$

Ecuación diferencial de las líneas asintóticas:

$$e(du)^2 + 2f\, dudv + g(dv)^2 = 0.$$

Condición de las curvas geodésicas:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (u')^2\, \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u + (v')^2\, \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u \\ (u')^2\, \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + 2u'v'\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + (v')^2\, \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$