E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Febrero 2020. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) ¿Cuál es la envoltura convexa de un conjunto de puntos $\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$? Indique cuál es su expresión y también represéntela gráficamente. Justifique la respuesta.

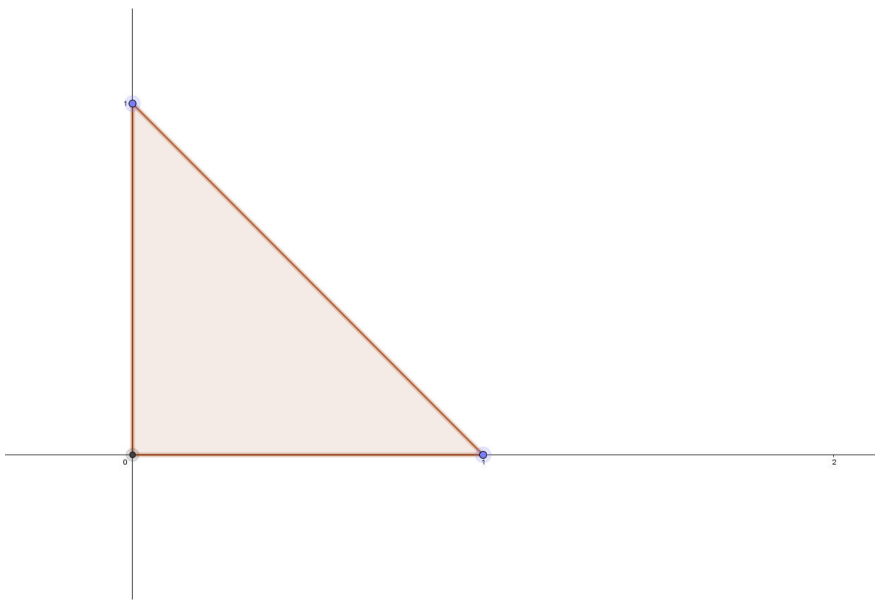
   Solución. Dado un conjunto de puntos $\{p_0, p_1, p_2\}$, su envoltura convexa es el conjunto de combinaciones baricéntricas de esos puntos de modo que las coordenadas baricéntricas, además de sumar 1, son no negativas. Es decir, son los puntos $\mathbf{p}$ tales que

$$\mathbf{p} = \sum_{i=0}^{2} \lambda_i p_i : \sum_{i=0}^{2} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0 \text{ para todo } i = 0, \ldots, 2.$$

   En este caso:

$$\mathbf{p} = \lambda_0 (0,0) + \lambda_1 (1,0) + \lambda_2 (0,1) = (\lambda_1, \lambda_2)$$

   Con $\sum_{i=0}^{2} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0$ para todo $i = 0, \ldots, 2$. Observa que si $\lambda_0 = 0$, entonces tenemos el segmento que une $(1,0),(0,1)$. Si $\lambda_1 = 0$, entonces tenemos el segmento que une $(0,0),(0,1)$ y si $\lambda_2 = 0$, entonces tenemos el segmento que une $(0,0),(1,0)$. Si $\sum_{i=0}^{2} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geq 0$ tenemos los puntos dentro del triángulo limitado por estos segmentos. Por eso, la envoltura convexa es el triángulo de vértices $(0,0),(1,0),(0,1)$.



2. (1 punto) ¿Cuánto vale en el punto $(1,0,0)$ el módulo de la torsión de la curva dada por la intersección de $x^2+y+z=1$ y $x-2y=1$?

Solución: Es una curva plana porque está contenida en el plano $x-2y=1$, y su torsión es 0. Si queremos resolverlo analíticamente, podemos parametrizar la curva, por ejemplo mediante:

$$y=t, x=1-2y=1-2t, z=1-x^2-y=1-4t^2-t.$$

En ese caso

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t)&=\left(1-2t,t,1-4t^2-t\right),\quad \mathbf{x}'(t)=(-2,1,-8t-1)\\ \mathbf{x}''(t)&=(0,0,-8),\quad \mathbf{x}'''(t)=(0,0,0).\end{aligned}$$

Como

$$\tau(t)=-\frac{\det\left(\mathbf{x}'(t),\mathbf{x}''(t),\mathbf{x}'''(t)\right)}{\left\|\mathbf{x}'(t)\times\mathbf{x}''(t)\right\|^2}.$$

Tenemos

$$\det\left(\mathbf{x}'(t),\mathbf{x}''(t),\mathbf{x}'''(t)\right)=0.$$

3. (1 punto) Sea S la curva de ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x}(t)=\left(\cos t,t^2+\operatorname{sen}t,t^2e^t\right).$$

Determine el vector tangente unitario, la recta tangente y el plano normal, en $t=0$.

Solución: Tenemos:

$$\mathbf{x}'(t)=\left(-\operatorname{sen}t,2t+\cos t,2te^t+t^2e^t\right),\quad \mathbf{x}'(0)=(0,1,0).$$

Este vector tangente ya es unitario. Además, $\mathbf{x}(0)=(1,0,0)$ y entonces la recta tangente es

$$(x,y,z)=(1,0,0)+\lambda(0,1,0).$$

El plano normal es perpendicular a la recta tangente y su ecuación en $\mathbf{x}(0)$ es:

$$((x,y,z)-(1,0,0))\cdot(0,1,0)=0\Longleftrightarrow y=0.$$

4. (1 punto) Sea S la curva de ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x}(t)=\left(\cos t,t^2+\operatorname{sen}t,t^2e^t\right).$$

Determine el vector binormal y el plano osculador, en $t=0$.

Solución: Tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t)&=\left(-\operatorname{sen}t,2t+\cos t,2te^t+t^2e^t\right),\quad \mathbf{x}'(0)=(0,1,0),\\ \mathbf{x}''(t)&=\left(-\cos t,2-\operatorname{sen}t,2e^t+4te^t+t^2e^t\right),\quad \mathbf{x}''(0)=(-1,2,2).\end{aligned}$$

Sabemos que el vector

$$\mathbf{v}=\left(\mathbf{x}'(0)\times\mathbf{x}''(0)\right)\times\mathbf{x}'(0)=((0,1,0)\times(-1,2,2))\times(0,1,0)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 2\end{vmatrix}\times(0,1,0)$$

$$=(2,0,1)\times(0,1,0)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=(1,0,2)$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal principal $\mathbf{n}$ y que, por lo tanto,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(1,0,2)}{\sqrt{1^2+0^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2).$$

El vector tangente unitario a la curva en $\mathbf{x}(0)$ es $(0,1,0)$. Por tanto, el vector binormal es

$$\mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n} = (0,1,0)\times\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1).$$

El plano osculador es perpendicular al vector binormal, por lo que su ecuación cuando $t=0$ es

$$((x,y,z)-(1,0,0))\cdot(2,0,1) = 0 \Longleftrightarrow 2x+z=2.$$

EJERCICIOS

5. Sea la cicloide dada, para $t\in(0,2\pi)$, por la parametrización

$$\mathbf{x}(t) = (t-\operatorname{sen} t, 1-\cos t).$$

Se pide:

a) (1 punto) Determinar su longitud de arco entre 0 y $t_0\in(0,2\pi)$.

b) (1 punto) Determinar el triedro de Frenet en un punto genérico $\mathbf{x}(t)$.

c) (1 punto) Determinar la curvatura, el centro de curvatura y la circunferencia osculadora en un punto genérico $\mathbf{x}(t)$.

Solución.

a) Sabemos que

$$\mathbf{x}'(t) = (1-\cos t, \operatorname{sen} t),$$
$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{(1-\cos t)^2+\operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{2(1-\cos t)} = \sqrt{4\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}} = 2\operatorname{sen}\frac{t}{2}$$

porque $1-\cos t = 2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}$. Observa que como $\frac{t}{2}\in(0,\pi)$ no es necesario poner valor absoluto, porque su seno va a ser mayor que 0. Entonces la longitud de arco entre 0 y t_0 es

$$s(t_0) = \int_0^{t_0} 2\operatorname{sen}\frac{t}{2}dt = 4-4\cos\frac{1}{2}t_0.$$

b) Tenemos el vector tangente unitario:

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}(1-\cos t, \operatorname{sen} t) = \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}(1-\cos t, \operatorname{sen} t).$$

El vector normal es

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}(-\operatorname{sen} t, 1-\cos t) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}(-\operatorname{sen} t, 1-\cos t).$$

El triedro de Frenet es

$$\left\{\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}(1-\cos t, \operatorname{sen} t), \frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}(-\operatorname{sen} t, 1-\cos t)\right\}.$$

c) La curvatura de una curva no parametrizada por la longitud de arco se determina por:

$$k(t) = \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3} = \frac{\det\left(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t)\right)}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Nos falta:

$$\mathbf{x}''(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t).$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
k(t) &= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3} \\
&= \begin{vmatrix} 1-\cos t & \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{vmatrix} \frac{1}{\left(2\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)^3} = \frac{\cos t - \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t}{8\operatorname{sen}^3\frac{t}{2}} \\
&= \frac{\cos t - 1}{8\operatorname{sen}^3\frac{t}{2}} = -\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}}{8\operatorname{sen}^3\frac{t}{2}} == -\frac{1}{4\operatorname{sen}\frac{t}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}}.
\end{aligned}$$

Se puede dividir entre $\operatorname{sen}\frac{t}{2}$ porque como $t \in (0, \pi)$ va a er un valor positivo. La curvatura es negativa, sabemos que en el plano es posible.
El centro de curvatura es el punto

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}(t) &= \mathbf{x}(t) + \frac{1}{k(t)}\mathbf{n}(t) \\
&= (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t) - 4\operatorname{sen}\frac{t}{2}\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}(-\operatorname{sen} t, 1 - \cos t) \\
&= (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t) - 4\operatorname{sen}\frac{t}{2}\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{t}{2}}(-\operatorname{sen} t, 1 - \cos t) \\
&= (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t) - 2(-\operatorname{sen} t, 1 - 1\cos t) \\
&= (t + \operatorname{sen} t, \cos t - 1).
\end{aligned}$$

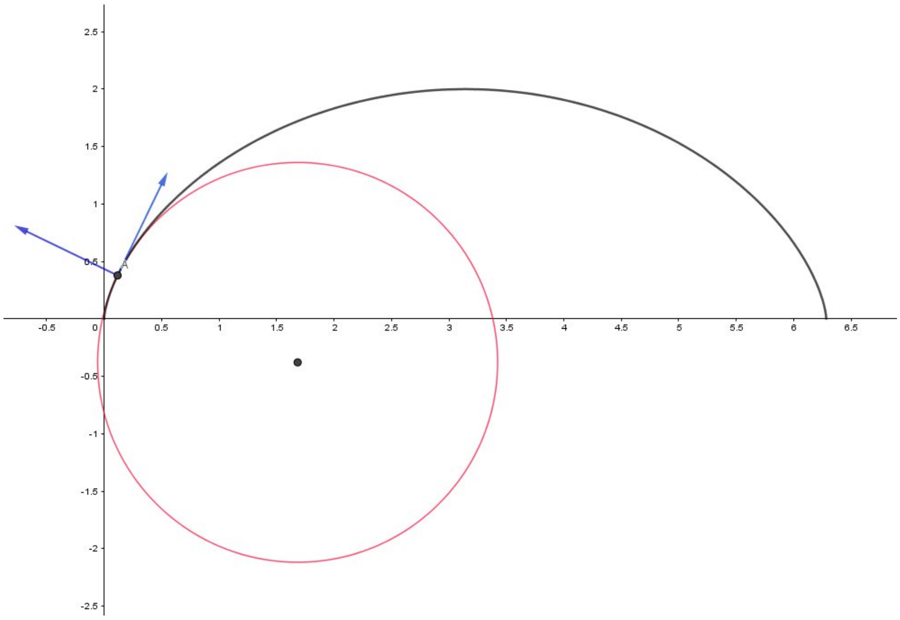
El radio de curvatura es

$$\frac{1}{|k(t)|} = 4\operatorname{sen}\frac{t}{2}.$$

Entonces, la circunferencia osculadora por $\mathbf{x}(t)$ tiene por ecuación

$$(x - t - \operatorname{sen} t)^2 + (y - \cos t + 1)^2 = 16\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}.$$

La representación gráfica está en la siguiente figura.



En el enlace: https://www.geogebra.org/m/csqfrf2s, se puede ver cómo va variando la circunferencia osculadora. Obsérvese que aunque la cicloide es la curva que describe un punto de una circunferencia deslizándose sobre una recta, la circunferencia osculadora no es esa circunferencia, su radio va variando.

6. Sea S la superficie parametrizada , para $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, por

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u, u^2+v, u^2-v\right).$$

a) (0.75 puntos) Estudie si es una parametrización regular.

b) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental.

c) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.

d) (0.75 puntos) Sea la curva C incluida en S, definida por

$$\alpha(t) = \left(t, t^2, t^2\right)$$

para $t \in \mathbb{R}$. Calcule la curvatura normal en $\alpha(0)$.

Solución:

a) La parametrización es regular si $\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v) \neq \mathbf{0}$ para $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Tenemos:

$$\mathbf{x}_u(u,v) = (1, 2u, 2u), \quad \mathbf{x}_v(u,v) = (0,1,-1).$$

Tenemos

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2u & 2u \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-4u, 1, 1) \neq (0,0,0)$$

siempre. Por eso, la parametrización es regular.

b) Para los coeficientes de la primera forma fundamental hacemos

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (1,2u,2u) \cdot (1,2u,2u) = 1 + 8u^2, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (1,2u,2u) \cdot (0,1,-1) = 0, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (0,1,-1) \cdot (0,1,-1) = 2. \end{aligned}$$

c) Para los coeficientes de la segunda forma fundamental necesitamos el vector normal unitario. Un vector con la misma dirección y sentido que el vector normal es:

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (-4u, 1, 1) \,.$$

Entonces, el vector normal unitario es

$$\mathbf{N} = \frac{(-4u,1,1)}{\|(-4u,1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{16u^2+1^2+1^2}}\,(-4u,1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{8u^2+1}}\,(-4u,1,1) \,.$$

Necesitamos también:

$$\mathbf{x}_{u\ u}\,(u,v) = (0,2,2)\,, \quad \mathbf{x}_{vv}\,(u,v) = (0,0,0)\,, \quad \mathbf{x}_{uv}\,(u,v) = (0,0,0)\,.$$

Con estos valores, tenemos:

$$\begin{aligned} e = \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{u\ u} &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{8u^2+1}}\,(-4u,1,1)\cdot(0,2,2) \\ &= \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{8u^2+1}}, \\ f = \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{uv} &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{8u^2+1}}\,(-4u,1,1)\cdot(0,0,0) = 0, \\ g = \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{vv} &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{8u^2+1}}\,(-4u,1,1)\cdot(0,0,0) = 0. \end{aligned}$$

d) La curvatura normal de una curva incluida en una superficie es el módulo de la proyección del vector curvatura $\mathbf{k}$ de C sobre la recta normal a la superficie o

$$\kappa_n = \mathbf{k}\cdot\mathbf{N}$$

si $\mathbf{N}$ es el vector normal unitario a la superficie Además, sabemos que el vector $\mathbf{k}$ tiene la misma dirección y sentido que el vector normal unitario a la curva (o que $(\alpha'(t)\times\alpha''(t))\times\alpha'(t)$) y su módulo es

$$k\,(t) = \frac{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Calculemos el vector curvatura $\mathbf{k}$ en el punto correspondiente a $t=0$. Tenemos

$$\begin{aligned} \alpha\,(t) &= \left(t,t^2,t^2\right), \quad \alpha\,(0) = (0,0,0)\,, \\ \alpha'\,(t) &= (1,2t,2t)\,, \quad \alpha'\,(0) = (1,0,0)\,, \\ \alpha''\,(t) &= (0,2,2)\,, \quad \alpha''\,(0) = (0,2,2)\,. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} (\alpha'(0)\times\alpha''(0))\times\alpha'(0) &= ((1,0,0)\times(0,2,2))\times(1,0,0) \\ &= (0,-2,-2)\times(0,0,1) = (-2,0,0)\,. \end{aligned}$$

El vector unitario con la dirección y sentido de este vector es $(-1,0,0)$. Por otro lado,

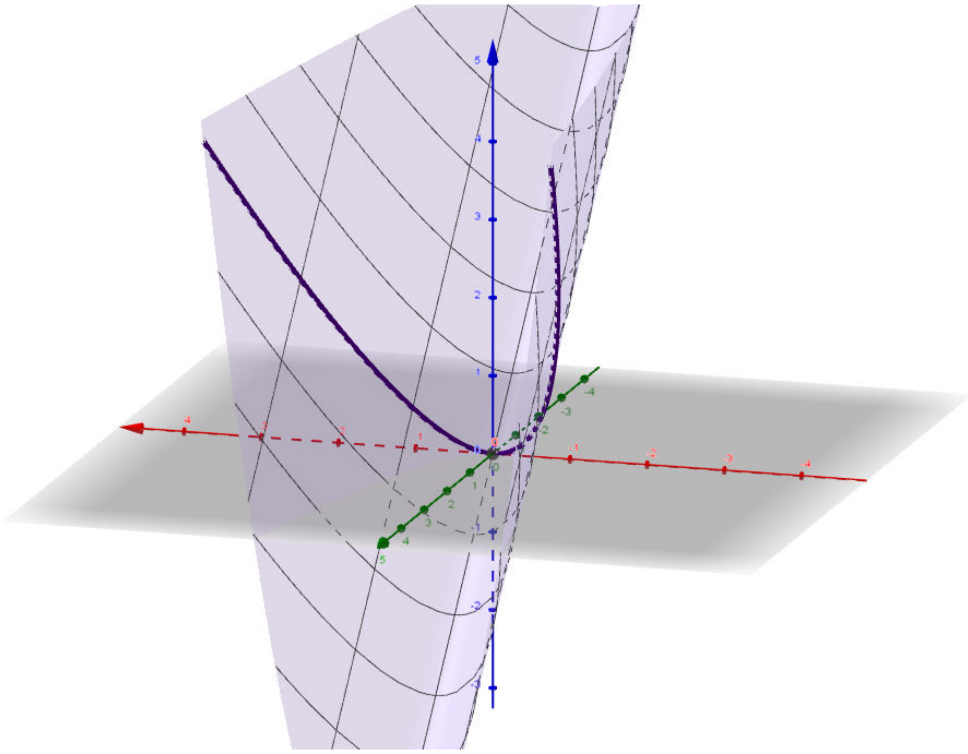
$$k\,(0) = \frac{\|\alpha'(0)\times\alpha''(0)\|}{\|\alpha'(0)\|^3} = \frac{\|(0,-2,-2)\|}{\|(1,0,0)\|^3} = \frac{2\sqrt{2}}{(1)^3} = 2\sqrt{2}.$$

Entonces $\mathbf{k} = 2\sqrt{2}\,(-2,0,0) = 4\sqrt{2}\,(-1,0,0)$. Además sabemos que en $t = 0$, $\alpha(0) = (0,0,0) = \mathbf{x}(0,0)$ y en $(u,v) = (0,0)$ el vector normal es $\mathbf{N} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$.

Así, podemos determinar la curvatura normal, que es

$$\kappa_n = \mathbf{k} \cdot \mathbf{N} = 4\sqrt{2}\,(-1,0,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = 0.$$

La siguiente figura representa la superficie y la curva:



E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Febrero 2020. Modelo B

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x,y) = \left(xy^3, x^2\cos y\right), \; g(x,y) = (y + e^x, x - y).$$

Determine la matriz jacobiana de $g \circ f$.

Solución. Hacemos:

$$g(f(x,y)) = g\left(xy^3, x^2\cos y\right) = \left(x^2\cos y + e^{xy^3}, xy^3 - x^2\cos y\right).$$

Obtenemos las derivadas parciales:

$$\left(\begin{array}{cc} D_1g_1(f(x,y)) & D_2g_1(f(x,y)) \\ D_1g_2(f(x,y)) & D_2g_2(f(x,y)) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 2x\cos y + y^3e^{xy^3} & -x^2\operatorname{sen} y + 3y^2xe^{xy^3} \\ y^3 - 2x\cos y & 3xy^2 + x^2\operatorname{sen} y \end{array}\right).$$

También se puede hacer aplicando la regla de la cadena, multiplicando las matrices jacobianas de ambas

2. Determine la curva de Bézier cuyo polígono de control es $(-1,2)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,3)$.

Solución: El polígono es

$$\mathbf{b}_0 = (-1,2), \; \mathbf{b}_1 = (0,1), \; \mathbf{b}_2 = (1,1), \; \mathbf{b}_3 = (1,3).$$

Entonces la curva de Bézier cumple

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{b}_i B_i^3(t),$$

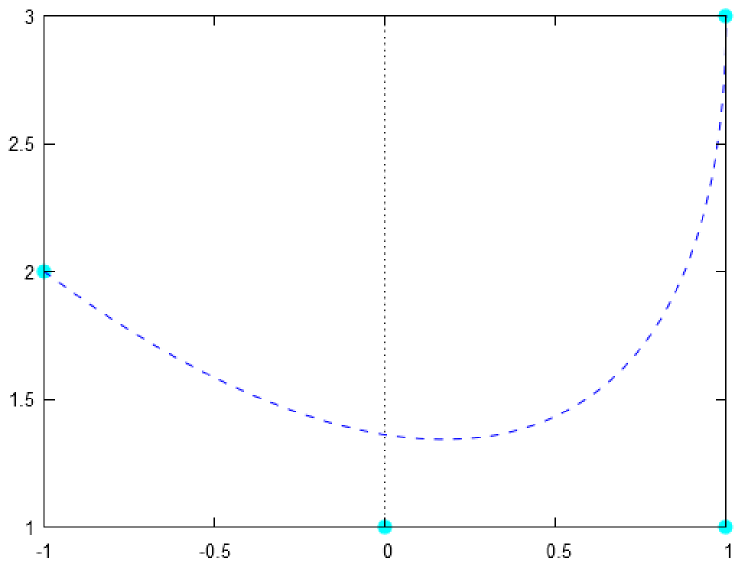
para los polinomios de Bernstein

$$B_i^n(t) = \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right) t^i (1-t)^{n-i}, \; B_i^3(t) = \left(\begin{array}{c} 3 \\ i \end{array}\right) t^i (1-t)^{3-i}.$$

Entonces la curva de Bézier es

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (-1,2)B_0^3(t) + (0,1)B_1^3(t) + (1,1)B_2^3(t) + (1,3)B_4^3(t) \\
&= (-1,2)\left(\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array}\right) t^0(1-t)^3 + (0,1)\left(\begin{array}{c} 3 \\ 1 \end{array}\right) t^1(1-t)^2 + (1,1)\left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}\right) t^2(1-t)^1 \\
&+ (1,3)\left(\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array}\right) t^3(1-t)^0 \\
&= (-1,2)(1-t)^3 + (0,1)3t^1(1-t)^2 + (1,1)3t^2(1-t)^1 + (1,3)t^3 \\
&= \left(3t - t^3 - 1, -3t + 3t^2 + t^3 + 2\right).
\end{aligned}$$

La representación gráfica, con Maxima, de esta curva es



3. (1 punto) Sea C la semicircunferencia centrada en $(0,0)$ y de radio r, definida por la ecuación, para $t \in [0,\pi]$, por
$$\mathbf{x}(t) = (r\cos t, r\,\mathrm{sen}\, t).$$
Determine su longitud de arco entre 0 y $t_0 \in (0,\pi)$.

Solución: Tenemos que
$$\mathbf{x}'(t) = (-r\,\mathrm{sen}\, t, r\cos t),$$
lo que implica que
$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{(-r\,\mathrm{sen}\, t)^2 + (r\cos t)^2} = r.$$
Entonces
$$L = \int_0^{t_0} \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt = \int_0^{t_0} r dt = rt|_0^{t_0} = rt_0.$$

4. (1 punto) Estudie si, para $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, es regular la parametrización
$$\mathbf{x}(u,v) = \left(\left(v^2+1\right)\cos u, v\,\mathrm{sen}\, u, v\right).$$

Solución. Tenemos que mirar
$$rg\begin{pmatrix} D_1x_1(u,v) & D_1x_2(u,v) & D_1x_3(u,v) \\ D_2x_1(u,v) & D_2x_2(u,v) & D_2x_3(u,v) \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -(v^2+1)\,\mathrm{sen}\, u & v\cos u & 0 \\ 2v\cos u & \mathrm{sen}\, u & 1 \end{pmatrix}.$$
Si $v=0$, entonces el rango es 1 si $u = k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$, porque tendríamos
$$rg\begin{pmatrix} -\mathrm{sen}\, u & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sen}\, u & 1 \end{pmatrix}.$$
Pero si $v \neq 0$, entonces en la submatriz de las dos últimas columnas, tenemos:
$$\det\begin{pmatrix} v\cos u & 0 \\ \mathrm{sen}\, u & 1 \end{pmatrix} = v\cos u \neq 0 \text{ si } u \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$
Cuando $u = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $v \neq 0$, es
$$rg\begin{pmatrix} -(v^2+1)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) & v\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) & 0 \\ 2v\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) & \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} -(v^2+1)(-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 1 \end{pmatrix}$$

que es 2. Luego es superficie regular para $(u,v) \in \mathbb{R}^2 - \{v=0\}$.

EJERCICIOS

5. Sea C la curva dada por la ecuación:

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^3+1, t^2-t, t^2+t\right).$$

   a) (0.75 puntos) Estudie si C es una curva regular.

   b) (0.75 puntos) Determine la curvatura en un punto cualquiera de C. Determine sus puntos de inflexión si los tiene (llegará a una ecuación, no hace falta que la resuelva, sólo que indique los pasos que debería seguir).

   c) (0.75 puntos) Determine el triedro de Frenet en $\mathbf{x}(0)$.

   d) (0.75 puntos) Determine la ecuación de la recta tangente y del plano osculador a C en $\mathbf{x}(0)$.

Solución:

a) Para que sea una curva regular debe cumplirse que $\mathbf{x}(t) = (t^3-2t+1, t^2-t, t^2+1)$ sea localmente una parametrización diferenciable y que su derivada no se anule (páginas 185, 186 y definición general de curva en la página 181). De forma obvia, localmente las funciones que intervienen son homeomorfismos. Por eso, la función es una parametrización local. Entonces, será regular si

$$\mathbf{x}'(t) = \left(3t^2, 2t-1, 2t+1\right) \neq (0,0,0).$$

Como

$$3t^2 = 0 \Longleftrightarrow t = 0$$

y si se cumple esto, entonces $2t-1 \neq 0$, podemos afirmar que la curva es regular.

b) Determinamos la curvatura, dada por

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= \left(3t^2, 2t-1, 2t+1\right), \quad \mathbf{x}''(t) = (6t, 2, 2), \\
\|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{\left(3t^2\right)^2 + (2t-1)^2 + (2t+1)^2} \\
&= \sqrt{9t^4+8t^2+2}, \\
\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) &= \left(3t^2, 2t-1, 2t+1\right) \times (6t, 2, 2) \\
&= \left(-4, 6t(2t+1) - 6t^2, 6t^2 - 6t(2t-1)\right) \\
&= \left(-4, 6t(t+1), -6t(t-1)\right), \\
\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\| &= \sqrt{(-4)^2 + (6t(t+1))^2 + (-6t(t-1))^2} \\
&= \sqrt{72t^4+72t^2+16} = 2\sqrt{18t^4+18t^2+4}.
\end{aligned}$$

Entonces la curvatura es

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3} = \frac{2\sqrt{18t^4+18t^2+4}}{\sqrt{9t^4+8t^2+2}^3}.$$

Los puntos de inflexión son aquellos donde la curvatura $k(t)$ vale 0. Esto ocurre si y sólo si

$$\sqrt{18t^4+18t^2+4}=0 \Longleftrightarrow 9t^4+9t^2+2=0$$
$$\Longleftrightarrow t^2=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot 9\cdot 2}}{2\cdot 18}=\frac{-9\pm\sqrt{9}}{36}=\frac{-3\pm 1}{12}=-\frac{1}{3},-\frac{1}{6}.$$

Entonces no tiene puntos de inflexión, porque estas ecuaciones no tienen solución real.

c) Sabemos que

$$\mathbf{x}'(t)=\left(3t^2,2t-1,2t+1\right),\quad \mathbf{x}''(t)=(6t,2,2),$$
$$\mathbf{x}'(0)=(0,-1,1),\quad \mathbf{x}''(t)=(0,2,2),$$
$$\|\mathbf{x}'(0)\|=\sqrt{2},$$

y que el vector tangente unitario a la curva en $\mathbf{x}(0)=(0,-1,1)$ es

$$\mathbf{t}=\frac{\mathbf{x}'(0)}{\|\mathbf{x}'(0)\|}=\frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1).$$

Además, un vector con la misma dirección y sentido que el vector normal principal $\mathbf{n}$ es

$$\mathbf{v}=(\mathbf{x}'(0)\times\mathbf{x}''(0))\times\mathbf{x}'(0)=((0,-1,1)\times(0,2,2))\times(0,-1,1)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}\times(0,-1,1)$$
$$=(-4,0,0)\times(0,-1,1)=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -4 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=(0,4,4).$$

Por lo tanto, el vector normal unitario es:

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}=\frac{(0,4,4)}{\sqrt{4^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1).$$

El vector binormal es

$$\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)\right)\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}(-2,0,0)=(-1,0,0).$$

El triedro de Frenet es

$$\{\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1),(-1,0,0)\right\}.$$

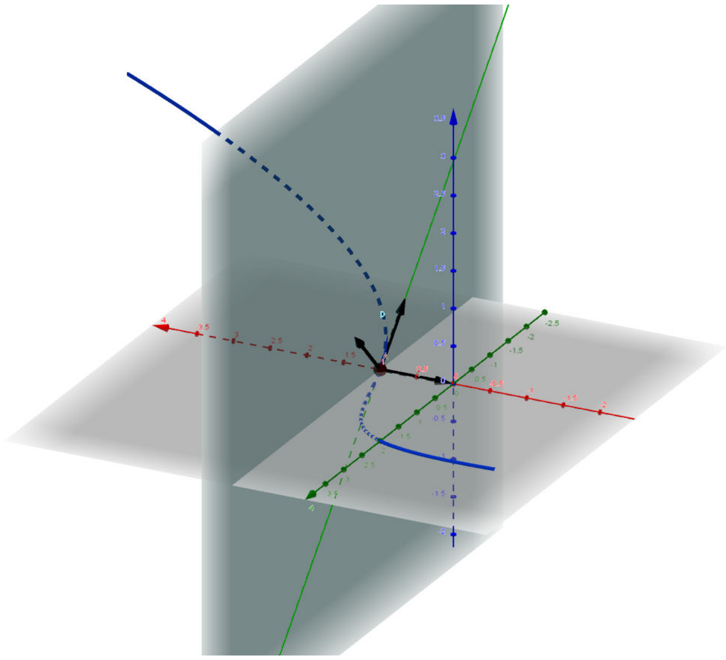
d) La recta tangente a la curva por $\mathbf{x}(0)$ es la recta que pasa por este punto y tiene por vector director a $\mathbf{t}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$, o al vector $(0,-1,1)$. Es decir, su ecuación es, para $\lambda\in\mathbb{R}$,

$$(x,y,z)=\mathbf{x}(0)+\lambda(0,-1,1)=(0,0,0)+\lambda(-2,-1,0)=\lambda(-2,-1,0).$$

El plano osculador a la curva por $\mathbf{x}(0)$ y que contiene a los vectores tangente y normal, o que es perpendicular al vector binormal $(-1,0,0)$. Entonces su ecuación es

$$((x,y,z)-\mathbf{x}(0))\cdot(-1,0,0)=0 \Longleftrightarrow$$
$$(x-1,y,z)\cdot(-1,0,0)=0 \Longleftrightarrow$$
$$x-1=0.$$

Todos estos elementos se representan en la siguiente figura.



6. Sea la superficie dada por las ecuaciones, para $0 < u < 2\pi, 0 < v < 10$, por

$$\mathbf{x}\,(u,v) = \left(\left(v^2+1\right)\cos u, v\,\mathrm{sen}\,u, v\right).$$

   a) (1 punto) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental.
   b) (1 punto) Determine la ecuación de las curvas parámetro que pasan por el punto $\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.
   c) (1 punto) Determine el ángulo que forman las curvas parámetro en el punto $\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2},1\right)$.

Solución:

a) Tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'_u\,(u,v) &= (-(v^2+1)\mathrm{sen}\,u, v\cos u, 0), \quad \mathbf{x}'_u\left(\frac{\pi}{2},1\right) = (-2,0,0)\,,\\
\mathbf{x}'_v\,(u,v) &= (2v\cos u, \mathrm{sen}\,u, 1), \quad \mathbf{x}'_v\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = (0,2,1)\,.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}'_u\,(u,v)\cdot\mathbf{x}'_u\,(u,v) = (-(v^2+1)\mathrm{sen}\,u, v\cos u, 0)\cdot(-(v^2+1)\mathrm{sen}\,u, v\cos u, 0)\\
&= (v^2+1)^2\mathrm{sen}^2 u + v^2\cos^2 u = \mathrm{sen}^2 u + v^2\cos^2 u + 2v^2\mathrm{sen}^2 u + v^4\mathrm{sen}^2 u\\
&= v^2 + \left(1+v^2+v^4\right)\mathrm{sen}^2 u,\\
F &= \mathbf{x}'_u\,(u,v)\cdot\mathbf{x}'_v\,(u,v) = (-(v^2+1)\mathrm{sen}\,u, v\cos u, 0)\cdot(2v\cos u, \mathrm{sen}\,u, 1)\\
&= -2v(v^2+1)\mathrm{sen}\,u\cos u + v\mathrm{sen}\,u\cos u = -2v^3\mathrm{sen}\,u\cos u - v\mathrm{sen}\,u\cos u\\
&= -v\left(2v^2+1\right)\mathrm{sen}\,u\cos u,\\
G &= \mathbf{x}'_v\,(u,v)\cdot\mathbf{x}'_v\,(u,v) = (2v\cos u, \mathrm{sen}\,u, 1)\cdot(2v\cos u, \mathrm{sen}\,u, 1)\\
&= 4v^2\cos^2 u + \mathrm{sen}^2 u + 1.
\end{aligned}$$

b) Las curvas parámetros son las curvas que se obtienen cuando una coordenada es fija., En este caso, son:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}\,(u,1) &= (2\cos u, \mathrm{sen}\,\theta, 1)\,,\\
\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2},\pi\right) &= (0,v,v)\,.
\end{aligned}$$

c) Si queremos determinar el ángulo que forman las curvas parámetro, sabemos que es:

$$\cos\varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{-v\left(2v^2+1\right)\operatorname{sen}u\cos u}{\sqrt{\left(v^2+\left(1+v^2+v^4\right)\operatorname{sen}^2 u\right)\left(4v^2\cos^2 u+\operatorname{sen}^2 u+1\right)}}.$$

En en el punto $\mathbf{x}\left(\frac{\pi}{2},1\right)$, tenemos

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\pi}{2},1\right) &= 1^2+3\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2}=4,\\ F\left(\frac{\pi}{2},1\right) &= -\left(2+1\right)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=0,\\ G\left(\frac{\pi}{2},1\right) &= 4\cos^2\frac{\pi}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2}+1=2. \end{aligned}$$

Entonces son perpendiculares, porque

$$\cos\varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{0}{\sqrt{4\cdot 2}} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

La representación gráfica de la función es: