E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Febrero 2018. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Estudie si la base $\{(-1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)\}\,\mathbb{R}^3$ es dextrógira.

   Solución: Es dextrógira si el determinante formado por estos vectores vale 1. Como

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

   entonces sí lo es.

2. (1 punto) Demuestre que las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t^2 e^t, \quad y(t) = t e^{t^2}.$$

   definen una curva regular.

   Solución: Para que sea una curva regular debe cumplirse que la función sea diferenciable y que no tenga puntos singulares. Es una función diferenciable, porque las componente son derivables, al ser producto de funciones trignométricas con polinomios. Será regular si

$$(x'(t), y'(t)) \neq (0,0).$$

   Como

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = 2te^t + t^2 e^t = (2t+t^2)\,e^t = 0, \\ y'(t) = e^{t^2} + 2t^2 e^{t^2} = 0, \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2t + t^2 = 0 \Longleftrightarrow t(2+t) = 0 \Longrightarrow t = 0 \text{ o } t = -2, \\ e^{t^2}(1+2t^2) = 0 \Longleftrightarrow 1 + 2t^2 = 0 \text{ que es imposible.} \end{array}\right\}$$

   Como no puede ser $(x'(t), y'(t)) = (0,0)$, es una curva regular.

3. (1 punto) Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = \left(e^t, 4+t^2\right).$$

   Determine la recta tangente a la curva en $\mathbf{x}(0)$.

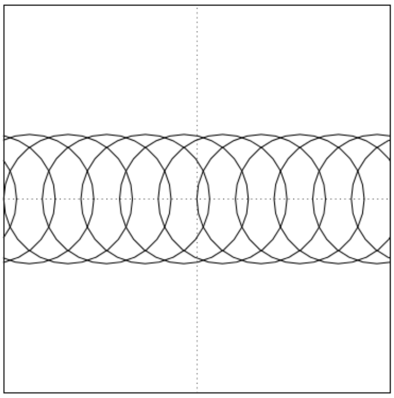
   Solución: El vector tangente a la curva en $\mathbf{x}(0) = (1,4)$ es

$$\mathbf{x}'(t) = \left(e^t, 2t\right), \quad \mathbf{x}'(0) = (1,0).$$

   la recta tangente tiene las ecuaciones

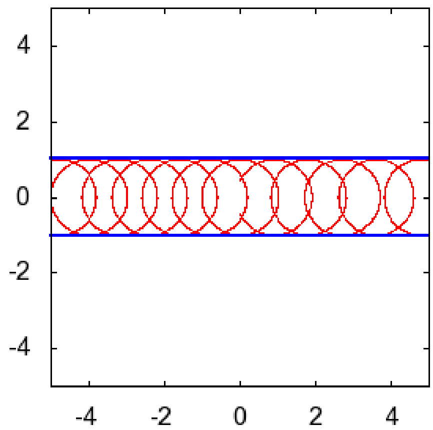
$$(x,y) = \mathbf{x}(0) + \lambda \mathbf{x}'(0) = (1,4) + \lambda(1,0).$$

4. (1 punto) Sea, para $t \in \mathbb{R}$, $\{\mathbf{x}(\lambda, t)\}_{\lambda \in [a,b]}$ una familia de curvas dadas en ecuaciones paramétricas, donde para cada λ tenemos una curva regular. Defina su envolvente.Consideramos la familia de circunferencias representadas en la siguiente figura:



Dibuje su envolvente sobre la misma gráfica.

Solución: página 23 de los apuntes del tema 2. Es una curva que es en cada punto tangente a alguna curva de la familia y además, no está incluida en la familia de curvas.



EJERCICIOS

5. (3 puntos) Sea C la curva dada por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^3, t^2 - t, t - 1\right), t \in \mathbb{R}.$$

Determine:

a) (1 punto) Los vectores tangente, normal y binormal a la curva en el punto $\mathbf{x}(0)$.

b) (1 punto) El radio de curvatura en el punto $\mathbf{x}(0)$.

c) (1 punto) El plano rectificante y la recta tangente a la curva en el punto $\mathbf{x}(0)$.

Solución.

a) Tenemos que $\mathbf{x}(0) = (0, 0, -1)$ y que la curva

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^3, t^2 - t, t - 1\right)$$

es regular. Además:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x}'(t) = (3t^2, 2t-1, 1), \quad && \mathbf{x}''(t) = (6t, 2, 0), \quad && \mathbf{x}'''(t) = (6, 0, 0), \\
&\mathbf{x}'(0) = (0, -1, 1), && \mathbf{x}''(0) = (0, 2, 0), && \mathbf{x}'''(0) = (6, 0, 0).
\end{aligned}$$

Con estos valores, sabemos que el vector

$$\mathbf{v} = (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) = ((0,-1,1) \times (0,2,0)) \times (0,-1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \times (0,-1,1)$$

$$= (-2,0,0) \times (0,-1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0,2,2)$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal principal $\mathbf{n}$ y que, por lo tanto,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(0,2,2)}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1).$$

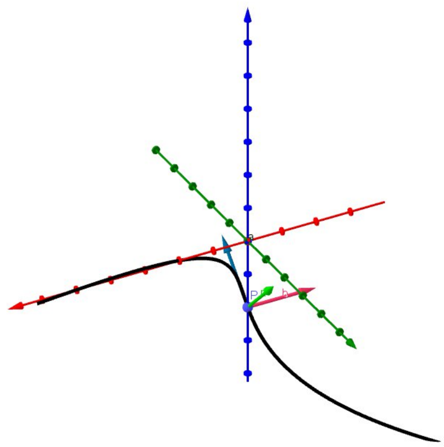
El vector tangente unitario a la curva en $\mathbf{x}(0)$ es

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'(0)}{\|\mathbf{x}'(0)\|} = \frac{(0,-1,1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1).$$

Por tanto, el vector binormal es

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(-2,0,0) = (-1,0,0).
\end{aligned}$$

La gráfica de est



$b)$ La curvatura es

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

En este caso:

$$k(0) = \frac{\|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\|}{\|\mathbf{x}'(0)\|^3} = \frac{\|(-2,0,0)\|}{\|(0,-1,1)\|^3} = \frac{\sqrt{(-2)^2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2}^{\,3}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

El radio de curvatura es su inverso, es decir

$$R = \frac{1}{k(0)} = \sqrt{2}.$$

c) La recta tangente pasa por $\mathbf{x}(0)$ y tiene por vector director al vector tangente $\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$ o directamente al vector $(0,-1,1)$. Por eso, su ecaución es

$$(x,y,z) = \mathbf{x}(0) + \lambda(0,-1,1) = (0,0,-1) + \lambda(0,-1,1).$$

El plano rectifiante pasa por $\mathbf{x}(0)$ y contiene a los vectores tangente y binormal. O es perpendicular al vector normal $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$, o equivalentemente a $(0,1,1)$. Por eso, su ecuación es

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(0)) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

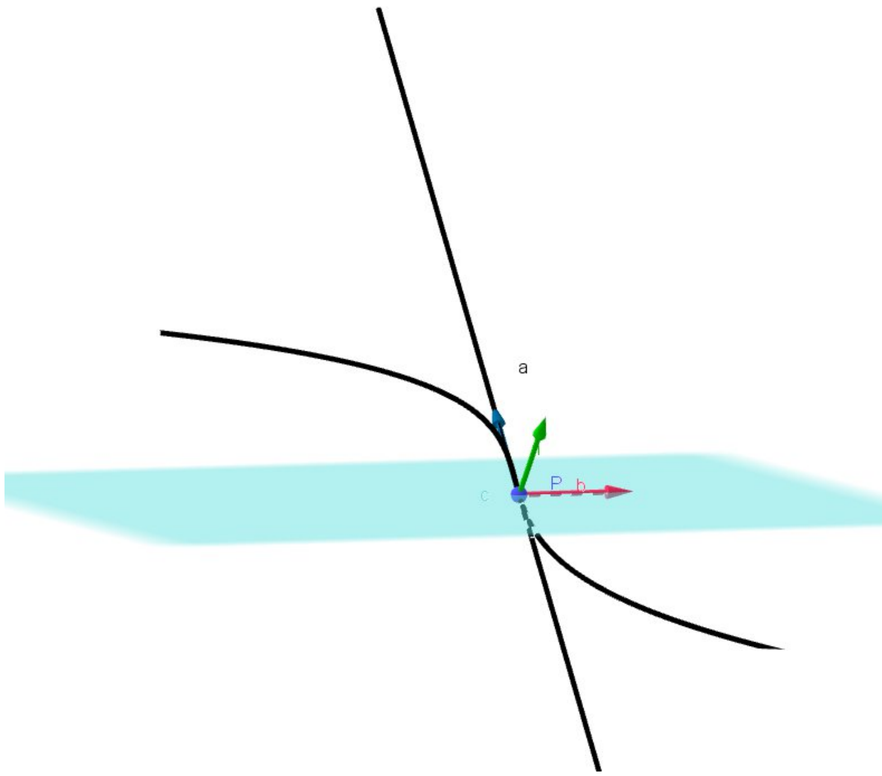
En este caso, es

$$((x,y,z) - (0,0,-1)) \cdot (0,1,1) = 0.$$

Operando llegamos a

$$z + 1 = 0.$$

La gráfica es



6. Sea S la superficie dada, para $(u,v) \in (0,1) \times (0,1)$, por

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u\cos v, u\,\mathrm{sen}\, v, u^2\right).$$

a) (0.75 puntos) Estudie si es una superficie regular.

b) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental.

c) (0.75 puntos) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.

d) (0.75 puntos) Clasifique los puntos de la superficie.

Solución:

a) Tenemos

$$\mathbf{x}\,(u,v)=\left(u\cos v, u\mathrm{sen}\, v, u^2\right),\ \mathbf{x}_u\,(u,v)=(\cos v,\mathrm{sen}\, v, 2u)\,,\quad \mathbf{x}_v\,(u,v)=(-u\mathrm{sen}\, v, u\cos v, 0)\,.$$

La superficie es regular donde

$$\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\neq(0,0,0)\,.$$

Para esta superficie se cumple:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v&=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \cos v & \mathrm{sen}\, v & 2u\\ -u\mathrm{sen}\, v & u\cos v & 0\end{vmatrix}\\ &=(-2u^2\cos v,-2u^2\mathrm{sen}\, v, u\cos^2 v+u\mathrm{sen}\,^2 v)\\ &=(-2u^2\cos v,-2u^2\mathrm{sen}\, v, u).\end{aligned}$$

Solo se anula cuando $u=0$, pero este punto no se considera, ya que debe ser $(u,v)\in(0,1)\times(0,1)$. Entonces la superficie es regular.

b) Para los coeficientes de la primera forma fundamental, hacemos

$$\begin{aligned}E&=(\cos v,\mathrm{sen}\, v,2u)\cdot(\cos v,\mathrm{sen}\, v,2u)=\cos^2 v+\mathrm{sen}\,^2 v+(2u)^2=1+4u^2,\\ F&=(\cos v,\mathrm{sen}\, v,2u)\cdot(-u\mathrm{sen}\, v,u\cos v,0)=-u\cos v\mathrm{sen}\, v+u\cos v\mathrm{sen}\, v=0,\\ G&=(-u\mathrm{sen}\, v,u\cos v,0)\cdot(-u\mathrm{sen}\, v,u\cos v,0)=(-u\mathrm{sen}\, v)^2+(u\cos v)^2=u^2.\end{aligned}$$

c) Calculamos los coeficientes de la segunda forma fundamental en un punto genérico $\mathbf{x}\,(u,v)$ a partir del vector normal unitario $\mathbf{n}$ y las derivadas de $\mathbf{x}$. Empezamos con el vector normal normal unitario $\mathbf{n}$, que tiene la misma dirección y sentido que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v&=(-2u^2\cos v,-2u^2\mathrm{sen}\, v,u).\\ \|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\|&=\sqrt{(-2u^2\cos v)^2+(-2u^2\mathrm{sen}\, v)^2+u^2}\\ &=\sqrt{u^2+4u^4\cos^2 v+4u^4\mathrm{sen}\,^2 v}=u\sqrt{1+4u^2},\\ \mathbf{N}&=\frac{\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\|}=\frac{1}{u\sqrt{1+4u^2}}(-2u^2\cos v,-2u^2\mathrm{sen}\, v,u)\\ &=\frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}(-2u\cos v,-2u\mathrm{sen}\, v,1).\end{aligned}$$

Además tenemos:

$$\mathbf{x}\,(u,v)=\left(u\cos v, u\mathrm{sen}\, v, u^2\right),\ \mathbf{x}_u\,(u,v)=(\cos v,\mathrm{sen}\, v, 2u)\,,\quad \mathbf{x}_v\,(u,v)=(-u\mathrm{sen}\, v, u\cos v, 0)\,.$$

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu}&=(0,0,2)\,,\\ \mathbf{x}_{uv}&=(-\mathrm{sen}\, v,\cos v,0)\,,\\ \mathbf{x}_{vv}&=(-u\cos v,-u\mathrm{sen}\, v,0)\,.\end{aligned}$$