E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Septiembre 2017. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la función definida por

$$f(x,y)=\left(|x|+y,e^{xy}\right).$$

Estudie si la función f tiene derivadas parciales en el punto $(0,0)$ y determínelas en caso de que existan.

Solución: Tenemos que f tiene dos componentes y podemos escribir

$$f\left(x,y\right)=\left(f_1\left(x,y\right).f_2\left(x,y\right)\right),$$

donde cada $f_i:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Tenemos que determinar todas las derivadas parciales D_jf_i para $i,j=1,2$. Como el valor abosluto no es derivable, para f_1 tenemos

$$D_1f_1(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f_1(t,0)-f_1(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{|t|-0}{t},$$
$$D_2f_1(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f_1(0,t)-f_1(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t-0}{t}=1.$$

La primera de estas derivadas parciales no existe.

Para f_2 tenemos:

$$D_1f_2\left(x,y\right)=ye^{xy},\quad D_1f_2(0,0)=0,$$
$$D_2f_2\left(x,y\right)=xe^{xy},\quad D_2f_2(0,0)=0.$$

2. Sea la curva definida por

$$\mathbf{x}\left(t\right)=\left(\cos t,e^tt^2\right)$$

si $\mathbf{x}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$. Estudie en qué puntos es regular.

Solución. No es regular en todos los puntos, porque su derivada es:

$$\mathbf{x}'\left(t\right)=\left(-\operatorname{sen}t,e^tt^2+2te^t\right).$$

Tenemos que $\operatorname{sen}t=0$ si y sólo si $t=k\pi$ y

$$\mathbf{x}'\left(k\pi\right)=\left(-\operatorname{sen}k\pi,e^{k\pi}\left(k\pi\right)^2+2k\pi e^{k\pi}\right)=\left(0,k\pi e^{k\pi}\left(k\pi+2\right)\right).$$

Cuando $k=0$, entonces

$$\mathbf{x}'\left(k\pi\right)=0$$

Para $k\neq0$, tenemos

$$\mathbf{x}'\left(k\pi\right)=\left(0,k\pi e^{k\pi}\left(k\pi+2\right)\right)\neq\left(0,0\right).$$

3. (1 punto) Sea C la semicircunferencia centrada en $(0,0)$ y de radio r, definida por la ecuación, para $t \in [0,\pi]$, por

$$\mathbf{x}(t) = (r\cos t, r\text{sen}\, t).$$

Determine su longitud de arco entre 0 y $t_0 \in (0, \pi/3)$.

Solución: Tenemos que

$$\mathbf{x}'(t) = (-r\text{sen}\, t, r\cos t),$$

lo que implica que

$$\|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{(-r\text{sen}\, t)^2 + (r\cos t)^2} = r.$$

Entonces

$$L = \int_0^{t_0} \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt = \int_0^{t_0} r dt = rt|_0^{t_0} = rt_0.$$

4. (1 punto) Sea, para $t \in \mathbb{R}$,

$$\{\mathbf{x}(\lambda, t)\}_{\lambda\in[a,b]}$$

una familia de curvas dadas en ecuaciones paramétricas, donde para cada λ tenemos una curva regular. Defina su envolvente.

Solución: página 23 de los apuntes del tema 2. Es una curva que es en cada punto tangente a alguna curva de la familia y además, no está incluida en la familia de curvas.

EJERCICIOS

5. (3 puntos) Sea C la curva de Bézier cuyo polígono de control es $(0,1,1)$, $(1,0,0)$, $(0,-1,0)$.

   a) Escríbase su ecuación $\mathbf{x}(t)$, para $t \in [0,1]$.

   b) Determine el triedro de Frenet de esta curva en el punto $\mathbf{x}(0)$.

   c) Determine la ecuación del plano rectificante en el punto $\mathbf{x}(0)$

Nota: cada apartado puntúa 1 punto.

Solución:

a) El polígono de control es

$$\mathbf{b}_0 = (0,1,1),\ \mathbf{b}_1 = (1,0,0),\ \mathbf{b}_2 = (0,-1,0).$$

Entonces la curva de Bézier cumple

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^{2} \mathbf{b}_i B_i^2(t),$$

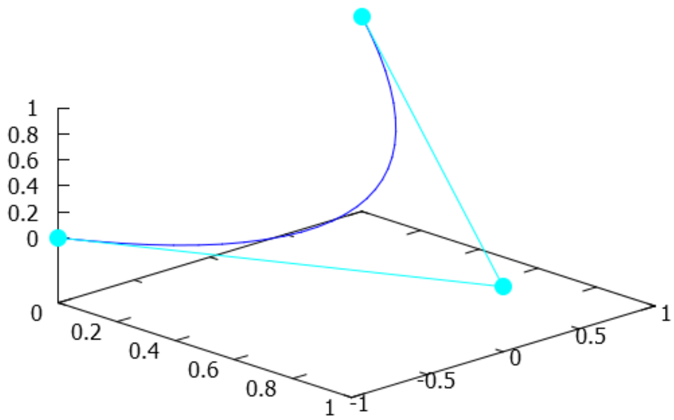
para los polinomios de Bernstein

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i},\ B_i^2(t) = \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i}.$$

Entonces la curva de Bézier es

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (0,1,1)B_0^2(t) + (1,0,0)B_1^2(t) + (0,-1,0)B_2^2(t)\\
&= (0,1,1)\binom{2}{0} t^0(1-t)^2 + (1,0,0)\binom{2}{1} t^1(1-t)^1 + (0,-1,0)\binom{2}{2} t^2(1-t)^0\\
&= (0,1,1)t^0(1-t)^2 + (1,0,0)2t^1(1-t)^1 + (0,-1,0)t^2(1-t)^0\\
&= \left(2t(-t+1), -t^2 + (-t+1)^2, (-t+1)^2\right).
\end{aligned}$$

La representación gráfica, con Maxima, de esta curva es



y se ha hecho con la sentencia

```
wxdraw3d(parametric(2*t*(1-t),-t^2+(1-t)^2, (1-t)^2,t,0,1),point_type=filled_circle,
point_size=2, color=cyan,points([0,1,1],[1,0,0],[0,-1,0]),view=[74,32]);
```

b) Para esta curva, $\mathbf{x}(t) = \left(2t(-t+1), -t^2 + (-t+1)^2, (-t+1)^2\right)$ y tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(2t(-t+1), -t^2 + (-t+1)^2, (-t+1)^2\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= (-4t+2, -2, 2t-2),\\
\mathbf{x}''(t) &= (-4, 0, 2),\\
\mathbf{x}'(0) &= (2,-2,-2), \quad \mathbf{x}''(0) = (-4,0,2),\\
\|\mathbf{x}'(0)\| &= \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{3},\\
\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-4,4,8),\\
\|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\| &= \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + 8^2} = 4\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

Con estos valores, sabemos que el vector

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) = ((2,-2,-2) \times (-4,0,2)) \times (2,-2,-2)\\
&= (-4,4,-8) \times (2,-2,-2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 4 & -8 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}\\
&= (-24,-24,0) = -24(1,1,0)
\end{aligned}$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal principal **n**. Por lo tanto,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{24(-1,-1,0)}{24\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,0).$$

El vector tangente unitario a la curva en $\mathbf{x}(0)$ es

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'(0)}{\|\mathbf{x}'(0)\|} = \frac{(2,-2,-2)}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1).$$

Por tanto, el vector binormal es

$$\begin{aligned}\mathbf{b}=\mathbf{t}\times\mathbf{n}&=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\times\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,0)=\\&=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,-1)\times(-1,-1,0)\\&=\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,1,-23).\end{aligned}$$

Entonces el triedro de Frenet es

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1),\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1,0),\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,1,-23)\right\}.$$

c) El plano rectificante es el plano perpendicular a la recta normal, es decir, pasa por $\mathbf{x}(0)=(0,1,1)$ y es perpendicular al vector normal. Es decir, los puntos (x,y,z) verifican

$$\begin{aligned}0&=((x,y,z)-(0,1,1))\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\iff\\0&=(x,y-1,z-1)\cdot(1,-1,-1)\iff x-y-z+2=0.\end{aligned}$$

6. Sea S la parte de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 1 parametrizada por

$$\mathbf{x}(\theta,\phi)=(\cos\theta\operatorname{sen}\phi,\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,\cos\phi),$$

para $\theta\in[0,2\pi],\phi\in[0,\pi]$.

a) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental.

b) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.

c) Determine el área de la región delimitada por las curvas coordenadas $\phi_0=0,\phi_1=\frac{\pi}{2}$ y $\theta_0=0,\theta_1=\frac{\pi}{2}$.

d) A partir del valor anterior, razone y deduzca cuál es el área de la esfera.

Solución.

a) Como

$$\mathbf{x}(\theta,\phi)=(\cos\theta\operatorname{sen}\phi,\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,\cos\phi).$$

tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\theta(\theta,\phi)&=(-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,\cos\theta\operatorname{sen}\phi,0),\\\mathbf{x}_\phi(\theta,\phi)&=(\cos\theta\cos\phi,\operatorname{sen}\theta\cos\phi,-\operatorname{sen}\phi).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}E&=\mathbf{x}_\theta\cdot\mathbf{x}_\theta=(-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,\cos\theta\operatorname{sen}\phi,0)\cdot(-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,\cos\theta\operatorname{sen}\phi,0)=\operatorname{sen}^2\phi,\\F&=\mathbf{x}_\theta\cdot\mathbf{x}_\phi=(-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,\cos\theta\operatorname{sen}\phi,0)\cdot(\cos\theta\cos\phi,\operatorname{sen}\theta\cos\phi,-\operatorname{sen}\phi)=0,\\G&=\mathbf{x}_\phi\cdot\mathbf{x}_\phi=(\cos\theta\cos\phi,\operatorname{sen}\theta\cos\phi,-\operatorname{sen}\phi)\cdot(\cos\theta\cos\phi,\operatorname{sen}\theta\cos\phi,-\operatorname{sen}\phi)=1.\end{aligned}$$

b) En un punto $\mathbf{x}(\theta,\phi)$ tenemos

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}_{\theta\theta}=(-\cos\theta\operatorname{sen}\phi,-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,0),\ \mathbf{x}_{\theta\phi}=(-\operatorname{sen}\theta\cos\phi,\cos\theta\cos\phi,0),\\&\mathbf{x}_{\phi\phi}=(-\cos\theta\operatorname{sen}\phi,-\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi,-\cos\phi).\end{aligned}$$

Tenemos que calcular el vector normal $\mathbf{n}$. El vector

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi &= (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\theta \operatorname{sen}\phi, 0) \times (\cos\theta\cos\phi, \operatorname{sen}\theta\cos\phi, -\operatorname{sen}\phi) \\ &= \left(-\cos\theta \operatorname{sen}^2\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi, -\cos\phi \operatorname{sen}\phi\right),\end{aligned}$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal a la superficie. Además:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi\| &= \sqrt{(-\cos\theta \operatorname{sen}^2\phi)^2 + (-\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi)^2 + (-\cos\phi \operatorname{sen}\phi)^2} \\ &= \operatorname{sen}\phi.\end{aligned}$$

Por eso:

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi}{\|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi\|} = \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\left(-\cos\theta \operatorname{sen}^2\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}^2\phi, -\cos\phi \operatorname{sen}\phi\right) \\ &= (-\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, -\cos\phi).\end{aligned}$$

Ya podemos calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$\begin{aligned}e &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{\theta\theta} = (-\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, -\cos\phi)\cdot(-\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, 0) \\ &= \operatorname{sen}^2\phi \\ f &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{\theta\phi} = (-\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, -\cos\phi)\cdot(-\operatorname{sen}\theta\cos\phi, \cos\theta\cos\phi, 0) \\ &= 0, \\ g &= \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{\phi\phi} = (-\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, -\cos\phi)\cdot(-\cos\theta \operatorname{sen}\phi, -\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, -\cos\phi) \\ &= 1.\end{aligned}$$

c) Para determinar el área, calculamos primero:

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\operatorname{sen}^2\phi} = \operatorname{sen}\phi,$$

Entonces, el área es:

$$\begin{aligned}A &= \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{\phi_0}^{\phi_1} \sqrt{EG-F^2}\, d\phi d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos\phi|_0^{\frac{\pi}{2}}\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0\right) d\theta \\ &= 1\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \theta|_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

d) La región que hemos considerado es $\frac{1}{4}$ de la semiesfera superior, es decir, es $\frac{1}{8}$ del área de la esfera. Entonces el área de la esfera es:

$$8A = 4\pi.$$

Podíamos haber hecho:

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} -\cos\phi|_0^{\pi}\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}(-\cos\pi + \cos 0)\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\,\theta|_0^{2\pi} = 4\pi.\end{aligned}$$

E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Septiembre 2017. Modelo B

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Se tiene la función $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^3 - y^5 - 1$. ¿Se puede expresar la variable x en función de y?

   Solución: Si consideramos la ecuación

   $$f(x, y) = x^3 - y^5 - 1 = 0,$$

   vemos que a variable x se puede expresar en función de la variable y como

   $$x = \sqrt[3]{1 + y^5}.$$

   Se puede hacer esto, porque el radicando siempre es mayor que 0.

2. (1 punto) Calcule el ángulo que forman los vectores tangentes a la curva $\mathbf{x}(t) = (e^t, t^2, 3t^2 - 1)$ con el vector $(0, 1, -1)$.

3. (1 punto) Sea C la curva definida por las ecuaciones

   $$\mathbf{x}(t) = \left(t^2, \cos t, t^4 - 2t^2 + 2\right).$$

   Determine la función curvatura y el radio de curvatura en $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$.

4. **Solución: La curva no es regular en** $(0, 0, 0)$ y además $\mathbf{x}(0) \neq (0, 0, 0)$.

5. (1 punto) Escriba las ecuaciones de Frenet para curvas en el espacio.

   EJERCICIOS

6. (3 puntos) Sea la curva regular dada por las ecuaciones paramétricas

   $$x(t) = t^2 \cos t, \quad y(t) = t \operatorname{sen}^2 t.$$

   a) Determine sus puntos múltiples, si existen.

   b) Determine el vector tangente y el vector normal en un punto (x_0, y_0).

   c) Determine la curvatura en un punto (x_0, y_0).

7. (3 puntos) Sea S la superficie dada por la parametrización

   $$\mathbf{x}(u, v) = \left(u^2 - v^2, u^2 + v^2, v\right)$$

   en $D = (0, 2) \times (0, 2)$.

a) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental.

b) Clasifique sus puntos.

Solución: hay que hacerla, he cambiado la superficie!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

a) **Solución.** La aplicación $\mathbf{x}(u,v) = (u^2 - v^2, u^2 + v^2, u)$ es una parametrización de la superficie en un entorno de cada uno de sus puntos en $D \subset \mathbb{R}^2$. Comenzamos determinando las derivadas parciales de $\mathbf{x}(u,v)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u,v) &= (2u, 2u, 0),\\ \mathbf{x}_v(u,v) &= (-2v, 2v, 1).\end{aligned}$$

Los coeficientes e, f y g de la segunda forma fundamental se determinan a partir del vector normal unitario $\mathbf{n}$ y las derivadas segundas de $\mathbf{x}$. Empezamos con el vector normal normal unitario $\mathbf{n}$. Sabemos que el vector

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2u & 2u & 3u \\ -2v & 2v & 1 \end{vmatrix} = (2u, -2u, 8uv) = 2u(1, -1, 4v)$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal. Entonces: .

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| &= \sqrt{(-2v)^2\left(1^2 + 1^2 + (-4u)^2\right)} = 2v\sqrt{2+16u^2},\\ \mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} &= \frac{-2v(1,1,-4u)}{2v\sqrt{2+16u^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}}(-1,-1,4u)\\ &= \left(\frac{-1}{\sqrt{2+16u^2}}, \frac{-1}{\sqrt{2+16u^2}}, 4\frac{u}{\sqrt{2+16u^2}}\right).\end{aligned}$$

Calculamos ahora las derivadas segundas:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= (2, 2, 0),\\ \mathbf{x}_{vv} &= (-2, 2, 0),\\ \mathbf{x}_{uv} &= (0, 0, 0).\end{aligned}$$

Entonces los coeficientes son:

$$\begin{aligned}e = \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{u\,u} &= \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}}(-1,-1,4u)\cdot(2,2,0)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}}(-2-2) = -\frac{4}{\sqrt{2+16u^2}},\\ f = \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{u\,v} &= \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}}(-1,-1,4u)\cdot(0,0,0) = 0,\\ g = \mathbf{N}\cdot\mathbf{x}_{v\,v} &= \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}}(-1,-1,4u)\cdot(-2,2,0)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2+16u^2}}(2-2) = 0.\end{aligned}$$

b) Ya podemos clasificar los puntos:

$$eg - f^2 = -\frac{4}{\sqrt{2+16u^2}}\cdot 0 - 0^2 = 0.$$

Como $e \neq 0$ pero $eg - f^2 = 0$, todos los puntos son parabólicos, por lo que es parabólico.

c) La superficie se representa en la siguiente gráfica: