E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Febrero 2017. Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Sean los puntos $\mathbf{p}_0 = (0, 1)$, $\mathbf{p}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{p}_2 = (2, 1)$. ¿Son una referencia afín? En caso de que lo sean, determine las coordenadas baricéntricas $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ del punto $(-1, 3)$ respecto a esta referencia.

   Solución: Son referencia afín si los siguientes vectores son linealmente independientes:

   $$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0 = (1, -1) - (0, 1) = (1, -2)\,,\\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 = (2, 1) - (0, 1) = (2, 0)\,.\end{aligned}$$

   El determinante de la matriz que forman es

   $$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

   y, por tanto, son base de $\mathbb{R}^2$. Luego son una referencia afín. Las coordenadas baricéntricas de $(-2, 3)$ son

   $$(x, y) = \lambda_0(0, 1) + \lambda_1(1, -1) + \lambda_2(2, 1),$$

   con $1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$. Entonces

   $$\begin{aligned}(-1, 3) &= \lambda_0(0, 1) + \lambda_1(1, -1) + (1 - \lambda_0 - \lambda_1)\,(2, 1)\\ &= (-2\lambda_0 - \lambda_1 + 2, -2\lambda_1 + 1)\,.\end{aligned}$$

   Por eso:

   $$\begin{aligned}&3 = -2\lambda_1 + 1 \implies \lambda_1 = -1,\\ &-1 = -2\lambda_0 - \lambda_1 + 2 = -2\lambda_0 + 1 + 2 = -2\lambda_0 + 3 \implies \lambda_0 = 2,\\ &\lambda_2 = 1 - \lambda_0 - \lambda_1 = 1 - 2 - (-1) = 0.\end{aligned}$$

2. (1 punto) Sea $\mathbf{v} = (1, -1, -1) \times (2, -1, 0)$, es decir, es el producto vectorial de $(1, -1, -1)$ y $(2, -1, 0)$. Determine $\mathbf{v}$. ¿Es perpendicular al vector $\mathbf{u} = (2, -1, 0)$?

   Solución: Para determinar el producto vectorial, hacemos

   $$(1, -1, -1) \times (2, -1, 0) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = (-1, -2, 1)\,.$$

   Es perpendicular a $(2, -1, 0)$ si y sólo si su producto escalar es 0. Como:

   $$(-1, -2, 1) \cdot (2, -1, 0) = -1 \cdot 2 + (-2)\,(-1) = 0,$$

   son perpendiculares.

3. (1 punto) Determínese el vector tangente y la recta tangente, en $t = 0$, a la curva de ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t^2 e^t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t, \; z(t) = e^{t^2}.$$

Solución: Tenemos:

$$\mathbf{x}'(t) = \left(2te^t - t^2e^t, \cos t, 2te^{t^2}\right), \; \mathbf{x}'(0) = (0, 1, 0).$$

Además, $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$. Por tanto, la recta tangente es

$$(x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda (0, 1, 0).$$

4. (1 punto) Escríba la ecuación de una curva $\mathbf{x} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ que sea regular, y con $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 2)$ y cuya velocidad no sea un vector constante. Compruebe que es así.

Nota: Muchas curvas polinómicas, con al menos una componente de grado 2, lo cumplen.

Solución: Vamos a elegir una curva polinómica con la primera componente de grado 2 para que el vector velocidad no sea constante. Podíamos haber elegido cualquier grado mayor que 2 en una de las componentes. Pero si el grado de todas las componentes fuera 1, el vector tangente sería constante.

Como $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 2)$, podemos buscar curvas de la forma:

$$\mathbf{x}(t) = \left(a_1t^2 + b_1t + 1, b_2t, b_3t + 2\right).$$

Además, debe ser

$$\mathbf{x}'(t) = (2a_1t + b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0) \text{ en } [0, 1].$$

Elegimos, por ejemplo, o b_2 o b_3 distintas de 0, y así la curva ya va a ser regular. Y $a_1 \neq 0$ para que el vector velocidad no sea constante.

Por ejemplo,

$$b_2 = 1, b_3 = -1, a_1 = 1, b_1 = 0.$$

da la siguiente curva, que cumple estas condiciones:

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^2 + 1, t, -t + 2\right).$$

Otros ejemplos sencillos son curvas donde aparecen funcines trigonome´tricas o exponenciales.

EJERCICIOS

5. (3 puntos) Sea C la curva definida por las ecuaciones

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^3 + 2t - 1, t^2 + 1\right).$$

   a) Estudie si es una curva regular y si tiene puntos múltiples.
   b) Determine la función curvatura y el radio de curvatura en $\mathbf{x}(t)$.
   c) Determine el centro de curvatura en $\mathbf{x}(0)$. Escriba la ecuación de la circunferencia osculadora en $\mathbf{x}(0)$

Solución: Cada apartado puntúa 1 punto.

a) La curva

$$\mathbf{x}(t) = \left(t^3 + 2t - 1, t^2 + 1\right)$$

es regular si sus componentes son diferenciables y la función derivada no es $(0,0)$ nunca. Como esto significa

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) = (3t^2 + 2, 2t) = (0,0) \\ \Longrightarrow 3t^2 + 2 = 0, 2t = 0. \end{aligned}$$

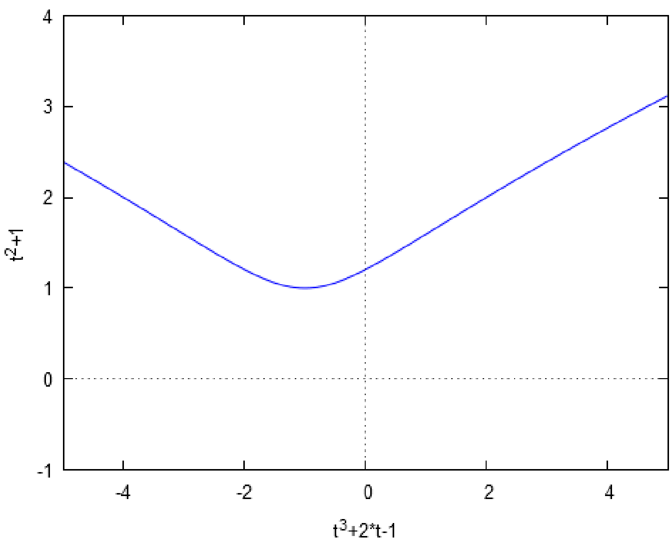
Pero la primera condición es imposible, porque $t^2 \geq 0$ siempre. Entonces, la curva es regular. Estudiamos si tiene puntos múltiples buscando t_1 y t_2 tales que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2) &\Longleftrightarrow (t_1^3 + 2t_1 - 1, t_1^2 + 1) = (t_2^3 + 2t_2 - 1, t_2^2 + 1) \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} t_1^3 + 2t_1 - 1 = t_2^3 + 2t_2 - 1 \Longleftrightarrow t_1^3 + 2t_1 = t_2^3 + 2t_2 \\ t_1^2 = t_2^2 \Longleftrightarrow t_1 = \pm t_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Sustituimos $t_1 = -t_2$, obtenido en la segunda condición (la condición $t_1 = t_2$ no resulta interesante para determinar puntos múltiples), en la primera ecuación. Tenemos:

$$\begin{aligned} t_1^3 + 2t_1 = (-t_1)^3 + 2(-t_1) = -t_1^3 - 2t_1 \\ \Longrightarrow 2t_1^3 + 4t_1 = 2t_1\left(t_1^2 + 2\right) = 0 \Longrightarrow t_1^2 = -2, \end{aligned}$$

que es imposible. La gráfica de la función es



Esta gráfica se ha hecho con la sentencia: `wxplot2d([['parametric, t^3+2*t-1, t^2+1, [t, -2, 2], [nticks, 300]]], [x,-5,5],[y,-1,4])$`.

b) Un vector tangente a la curva en $\mathbf{x}(t)$ es

$$\mathbf{x}'(t) = (3t^2 + 2, 2t).$$

Además:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{(3t^2 + 2)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9t^4 + 16t^2 + 4}, \\ \mathbf{x}''(t) &= (6t, 2). \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular la curvatura:

$$\begin{aligned} k(t) &= \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}\right)\right)\frac{1}{\|d\mathbf{x}/dt\|^3} \\ &= \begin{vmatrix} 3t^2+2 & 2t \\ 6t & 2 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{9t^4+16t^2+4}^3} \\ &= \frac{4-6t^2}{\sqrt{9t^4+16t^2+4}^3}. \end{aligned}$$

El radio de curvatura es

$$r(t) = \frac{1}{|k(t)|} = \frac{\sqrt{9t^4+16t^2+4}^3}{|4-6t^2|}.$$

c) Como el vector tangente es

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{9t^4+16t^2+4}}(3t^2+2, 2t),$$

el vector normal es

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{9t^4+16t^2+4}}\left(-2t, 3t^2+2\right).$$

Particularizamos en $\mathbf{x}(0) = (-1, 1)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(0) &= \frac{1}{\sqrt{9\cdot 0^4+16\cdot 0^2+4}}(3\cdot 0^2+2, 2\cdot 0) = (1,0), \\ \mathbf{n}(0) &= \frac{1}{\sqrt{9\cdot 0^4+16\cdot 0^2+4}}\left(-2\cdot 0, 3\cdot 0^2+2\right) = (0,1), \\ k(0) &= \frac{4-6\cdot 0^2}{\sqrt{9\cdot 0^4+16\cdot 0t^2+4}^3} = \frac{1}{2}, \\ r(0) &= 2. \end{aligned}$$

El vector curvatura es

$$\mathbf{k}(0) = k(0)\,\mathbf{n}(0) = \frac{1}{2}(0,1).$$

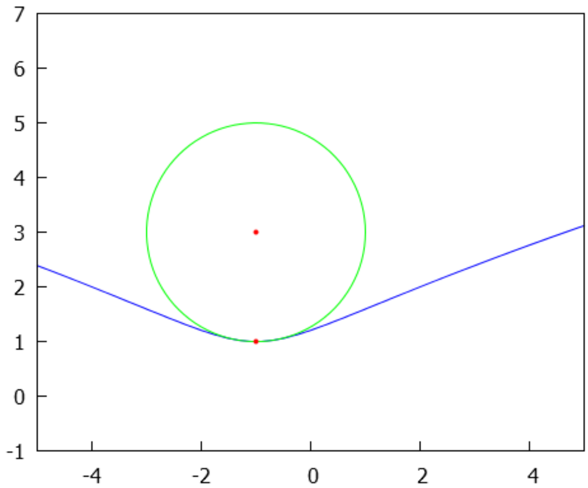
El centro de curvatura es el punto

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(0) &= \mathbf{x}(0) + \frac{1}{k(0)}\mathbf{n}(0) \\ &= (-1,1) + \frac{1}{1/2}(0,1) = (-1,3). \end{aligned}$$

Entonces, la circunferencia osculadora tiene por ecuación

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4.$$

Si representamos la curva, la circunferencia osculadora, los centros de curvatura, observamos esto:



6. (3 puntos) Considere la superficie dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(-\frac{1}{2}\cos(2u), \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2u), -v\right), \quad u,v \in [0,2\pi].$$

Compruebe que la parametrización es regular y determine el área de la región delimitada por las curvas coordenadas $u_0 = 0, u_1 = \pi, v_0 = 0$ y $v_1 = \pi$.

Solución: Calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (\operatorname{sen}(2u), \cos(2u), 0), \\ \mathbf{x}_v &= (0, 0, -1)\,. \end{aligned}$$

Se tiene que

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \operatorname{sen}(2u) & \cos(2u) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-\cos(2u), \operatorname{sen}(2u), 0)\,.$$

La parametrización es regular ya que $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq (0,0,0)\ \forall u,v \in [0,2\pi]$.

Determinemos los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \cos^2(2u) + \operatorname{sen}^2(2u) = 1, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 1. \end{aligned}$$

Entonces $\sqrt{EG - F^2} = 1$, por lo que

$$A = \int_0^\pi \int_0^\pi \sqrt{EG - F^2}\,du dv = \pi^2.$$

E.T.S. INGENIEROS INDUSTRIALES. U.N.E.D.
MÁSTER EN INGENIERÍA INDUSTRIAL
COMPLEMENTOS MATEMÁTICOS PARA LA INGENIERÍA INDUSTRIAL
Código: 28806127. Febrero 2017. Modelo B

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Defina isometría.

   Solución: Es una transformación afín de la forma $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, donde la matriz $\mathbf{A}$ es ortogonal, es decir, $\mathbf{A}\mathbf{A}^t = \mathbf{I}$.

2. (1 punto) Estudie si la curva $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (\operatorname{sen} t, t^2)$ es regular. Determine sus puntos múltiples, si los tiene.

   Solución. Sí lo es, porque su derivada

   $$\alpha'(t) = (\cos t, 2t)$$

   no se anula par aningún valor de t.

   No tiene puntos múltiples porque

   $$\alpha(t) = \left(\operatorname{sen} t, t^2\right) = \left(\operatorname{sen} t', (t')^2\right) = \alpha(t') \Longrightarrow t = t' + 2k\pi, t' = \pm t$$

   y no se pueden cumplir las dos condiciones a la vez.

3. (1 punto) Determine la envolvente de la familia de circunferencias de radio 1 y centro en el eje OX, dada por las ecuaciones paramétricas:

   $$\mathbf{x}(\lambda, t) = (\lambda + \cos t, \operatorname{sen} t).$$

   Solución. Está en los apuntes. Tenemos:

   $$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}(\lambda, t) = (1, 0), \quad \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(\lambda, t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t).$$

   Entonces debe ser

   $$0 = \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -\operatorname{sen} t \\ 0 & \cos t \end{vmatrix} = \cos t.$$

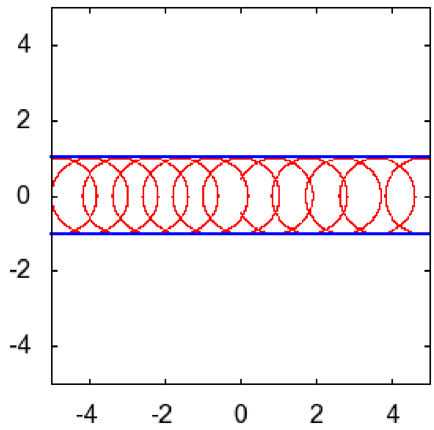
   Esto implica

   $$t = \frac{\pi}{2}, \quad t = \frac{3\pi}{2}.$$

   Entonces vamos a tener dos envolventes, y sus ecuaciones son:

   $$\mathbf{e}_1(\lambda) = \mathbf{x}\left(\lambda, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\lambda + \cos\frac{\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = (\lambda, 1),$$
   $$\mathbf{e}_2(\lambda) = \mathbf{x}\left(\lambda, \frac{3\pi}{2}\right) = \left(\lambda + \cos\frac{3\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = (\lambda, -1).$$

   Son dos rectas, paralelas al eje $= X$, y de ecuación $y = 1, y = -1$, como se aprecia en la figura:



4. (1 punto) Determine si la superficie dada por

$$\mathbf{x}(u,v) = (\operatorname{sen} u, \cos(uv), \tan v) \quad u, v \in [0, 2\pi]$$

tiene una parametrización regular.

Solución: Calculamos las derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (\cos u, -v\operatorname{sen}(uv), 0),\\ \mathbf{x}_v &= (0, -u\operatorname{sen}(uv), 1+\tan^2 v).\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= (\cos u, -v\operatorname{sen}(uv), 0) \times (0, -u\operatorname{sen}(uv), 1+\tan^2 v)\\ &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ \cos u & -v\operatorname{sen}(uv) & 0\\ 0 & -u\operatorname{sen}(uv) & 1+\tan^2 v\end{vmatrix}\\ &= (-v\operatorname{sen}(uv)(1+\tan^2 v), -\cos u(1+\tan^2 v), -u\operatorname{sen}(uv)\cos u).\end{aligned}$$

Por ejemplo, como en $(u_0, v_0) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ se tiene que $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (0,0,0)$, la parametrización no es regular.

EJERCICIOS

5. (3 puntos) Sea C la la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = \left(e^t, t^2-1, 2t+1\right)$$

para $t \in [-2, 2]$.

a) Estudie si es una curva regular.

b) Determine el triedro de Frenet en $\mathbf{x}(0)$.

c) Determine las ecuaciones del plano rectificante y de la recta binormal por $\mathbf{x}(0)$.

Solución:

a) Para que sea regular, sus componentes debe ser funciones diferenciables y lo son, y además debe ser

$$\mathbf{x}'(t) = \left(e^t, 2t, 2\right) \neq (0,0,0).$$

Pero como la tercera componente siempre es distinta de 0, entonces es una curva regular.

b) Tenemos:

$$\mathbf{x}'(t) = \left(e^t, 2t, 2\right), \quad \mathbf{x}''(t) = \left(e^t, 2, 0\right), \quad \mathbf{x}'''(t) = \left(e^t, 0, 0\right),$$
$$\mathbf{x}'(0) = (1, 0, 2), \quad \mathbf{x}''(t) = (1, 2, 0), \quad \mathbf{x}'''(t) = (1, 0, 0).$$

El vector tangente unitario en $\mathbf{x}(0)$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(0) &= \frac{1}{\|(1,0,2)\|}(1,0,2) = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}(1,0,2)\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2).\end{aligned}$$

Un vector con la misma dirección y sentido que el vector normal principal $\mathbf{n}$ es:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t) = ((1,0,2)\times(1,2,0))\times(1,0,2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \times (1,0,2)$$
$$= (-4,2,2)\times(1,0,2) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4,10,-2).$$

Por lo tanto:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(4,10,-2)}{\sqrt{4^2+10^2+(-2)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{30}}(4,10,-2) = \frac{1}{\sqrt{30}}(2,5,-1).$$

Por tanto, el vector binormal es

$$\begin{aligned}\mathbf{b} = \mathbf{t}\times\mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)\times\frac{1}{\sqrt{30}}(2,5,-1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix}\\ &= \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt{6}}(-10,5,5) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1).\end{aligned}$$

Entonces el triedro de Frenet es

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2), \frac{1}{\sqrt{30}}(2,5,-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)\right\}.$$

c) El plano rectificante es el plano perpendicular a la recta normal, es decir, pasa por $\mathbf{x}(0) = (1,-1,1)$ y es perpendicular al vector normal. es decir, los puntos (x,y,z) verifican

$$\begin{aligned}&0 = ((x,y,z)-(1,-1,1))\cdot\frac{1}{\sqrt{30}}(2,5,-1) \Longleftrightarrow\\ &0 = (x-1, y+1, z-1)\cdot(2,5,-1) \Longleftrightarrow 2x+5y-z+4 = 0.\end{aligned}$$

La recta binormal pedida pasa por $\mathbf{x}(0) = (1,-1,1)$ y tiene la misma dirección que el vector binormal $\frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,1)$. Es decir, tiene por ecuación

$$(x,y,z) = (1,-1,1) + \lambda(-2,1,1).$$

6. (3 puntos) Sea el cilindro dado por

$$\mathbf{x}(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v).$$

Determínense los vectores curvatura geodésica y curvatura normal en la la elipse dada por

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos t + \operatorname{sen} t)$$

en el punto $\mathbf{x}(0) = (1,0,1)$.

Solución:

Primero determinamos los vectores tangentes y normal al cilindro. Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u,v) &= (-\operatorname{sen} u, \cos u, 0), \\ \mathbf{x}_v(u,v) &= (0,0,1). \end{aligned}$$

El vector normal a la superficie es

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(u,v) &= \frac{\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)}{\|\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)\|} \\ &= \frac{(-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \times (0,0,1)}{\|(-\operatorname{sen} u, \cos u, 0) \times (0,0,1)\|} \\ &= (\cos u, \operatorname{sen} u, 0). \end{aligned}$$

Ahora estudiamos la curva.Para la elipse, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= (-\operatorname{sen} t, \cos t, -\operatorname{sen} t + \cos t), & \mathbf{x}'(0) &= (0,1,1), \\ \mathbf{x}''(t) &= (-\cos t, -\operatorname{sen} t, -\cos t - \operatorname{sen} t), & \mathbf{x}''(0) &= (-1,0,-1). \end{aligned}$$

Sabemos que el vector $\mathbf{v} = (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0)$ tiene la misma dirección y sentido que el vector normal (y, por tanto, que el vector curvatura) y que el módulo del vector curvatura es

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Entonces, el vector $\mathbf{v}$ es

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) \\ &= ((0,1,1) \times (-1,0,-1)) \times (0,1,1) \\ &= (-1,-1,1) \times (0,1,1) \\ &= (-2,1,-1). \end{aligned}$$

El vector normal es

$$\mathbf{n}(0) = \frac{(-2,1,-1)}{\|(-2,1,-1)\|} = \frac{\sqrt{6}}{6}(-2,1,-1).$$

Por otro lado, la curvatura es

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{\|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\|}{\|\mathbf{x}'(0)\|^3} = \frac{\|(0,1,1) \times (-1,0,-1)\|}{\|(0,1,1)\|^3} \\ &= \frac{\|(-1,-1,1)\|}{\|(0,1,1)\|^3} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{k}(0) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{6}}{6} (-2, 1, -1)$$
$$= \frac{1}{4} (-2, 1, -1) .$$

Lo podemos escribir a partir de los vectores curvatura geodésica y curvatura normal, $\mathbf{k}(s) = \mathbf{k}_g(s) + \mathbf{k}_n(s)$, que están en los planos tangnete a la superficie y en la recta normal. En $(1, 0, 1)$, tenemos

$$(1, 0, 1) = \mathbf{x}(0, 1) ,$$
$$\mathbf{x}_u(0, 1) = (-\operatorname{sen} 0, \cos 0, 0) = (0, 1, 0) ,$$
$$\mathbf{x}_v(0, 1) = (0, 0, 1) ,$$
$$\mathbf{N}(0, 1) = (\cos 0, \operatorname{sen} 0, 0) = (1, 0, 0) .$$

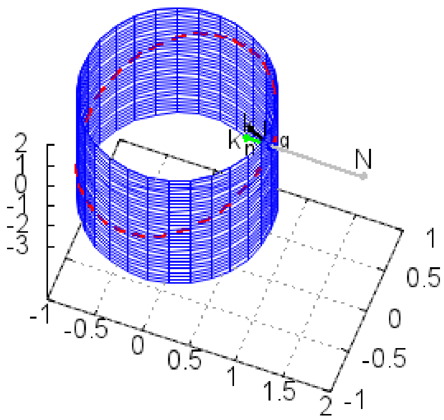
Entonces, como una base del espacio tangente es $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ y una base de la recta normal es $(1, 0, 0)$, tenemos que

$$\frac{1}{4}(-2, 1, -1) = \frac{1}{4}(0, 1, -1) + \frac{-1}{2}(1, 0, 0) ,$$

donde

$$\mathbf{k}_g(0) = \frac{1}{4}(0, 1, -1) , \quad \mathbf{k}_n(0) = \frac{-1}{2}(1, 0, 0) .$$

En la siguiente figura se representan el cilindro, la elipse, los vectores curvatura (en azul), curvatura geodésica (en



Para determinar los vectores curvatura geodésica y curvatura normal no hemos parametrizado la curva por la longitud del arco, porque obtenemos una integral elíptica, que no tiene solución a partir de funciones elementales.