Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

MÉTODO DE LA MATRIZ INVERSA

Índice

Presentación

Introducimos en este tema un método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales a partir del cálculo de la matriz inversa de la matriz de coeficientes.

Veremos en qué casos es posible aplicar éste método así como el tipo de problemas para los que resulta extremadamente útil.

También veremos una forma de calcular la matriz inversa de una matriz mediante el método de Gauss-Jordan que se basa en una trasformación de la matriz a través de operaciones elementales.

Método de la matriz inversa

Los **sistemas de ecuaciones lineales** se pueden escribir como una **ecuación matricial**, de forma que cualquier sistema lo escribiremos como *AX=B*, donde *A* es la matriz de coeficientes, *X* la matriz de incógnitas y *B* la matriz de términos independientes.

Conocer las propiedades del cálculo de las matrices puede ayudarnos a resolver un sistema de cuaciones lineales sin más que aplicar las operaciones correctamente.

Encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales es equivalente a resolver la ecuación matricial *AX=B* **¿Cómo se resuelve esta ecuación?**

Como sabemos, no está definida la operación división entre matrices, por lo tanto, debemos buscar la manera de despejar la *X* de la ecuación sin usar la división.

La definición del **elemento inverso** soluciona el problema, veamos cómo:

Recordemos que:

- Si A^{-1} es el elemento inverso de *A*, tenemos que $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ donde *I* es la matriz identidad.
- El producto de matrices no es conmutativo.

Teniendo en cuenta las dos observaciones anteriores, la solución de la ecuación será:

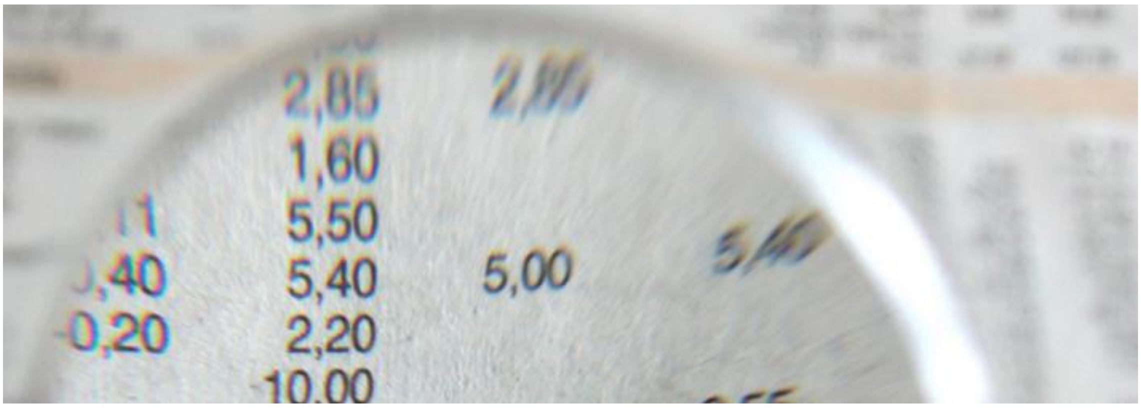
$$AX = B \longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \longrightarrow X = A^{-1}B$$

Este método nos permite resolver sistemas de ecuaciones lineales calculando la matriz inversa y multiplicando por la matriz de términos independientes.

Observaciones

Veamos algunas **observaciones** que hay que tener en cuenta antes de aplicar este método:

- El método sólo puede aplicarse si se puede calcular la matriz inversa de la matriz de coeficientes. Una matriz es invertible si es cuadrada y su determinante es distinto de cero. Eso implica que el sistema de ecuaciones lineales debe ser compatible determinado y tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.
- El método de la matriz inversa resulta muy útil si tenemos que resolver varios sistemas de ecuaciones lineales que tengan la misma matriz de coeficientes pero distintos términos independientes.
- Es posible resolver un sistema compatible determinado con más ecuaciones que incógnitas mediante este método. Para aplicarlo primero hay que identificar las ecuaciones que son linealmente dependientes de las demás. Si las eliminamos, nos quedamos con un sistema compatible determinado con matriz de coeficiente cuadrada con determinante no nulo.
- Una pequeña trasformación también permite aplicar este método a sistemas compatibles indeterminados. Veremos este procedimiento mediante un ejemplo.



Ejemplo I.I

Resolveremos el siguiente ejemplo mediante el método de la matriz inversa:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x - 3y + 2z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

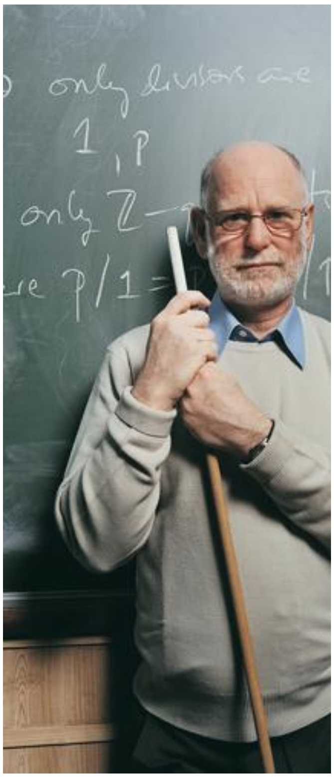
Calculamos la matriz de coeficientes y su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Como el determinante es distinto de cero el rango de *A* es *3* que coincide con el de la matriz ampliada, por lo que el sistema es compatible. Además como es igual al número de incógnitas el sistema es compartible determinado (solución única). Estamos en las condiciones de aplicar el método de la matriz inversa. Para ello escribimos el sistema en forma matricial.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo I.II



Para calcular las incógnitas despejamos la ecuación mediante la matriz inversa:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Podemos calcular la matriz inversa mediante la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA)^t$$

En este caso

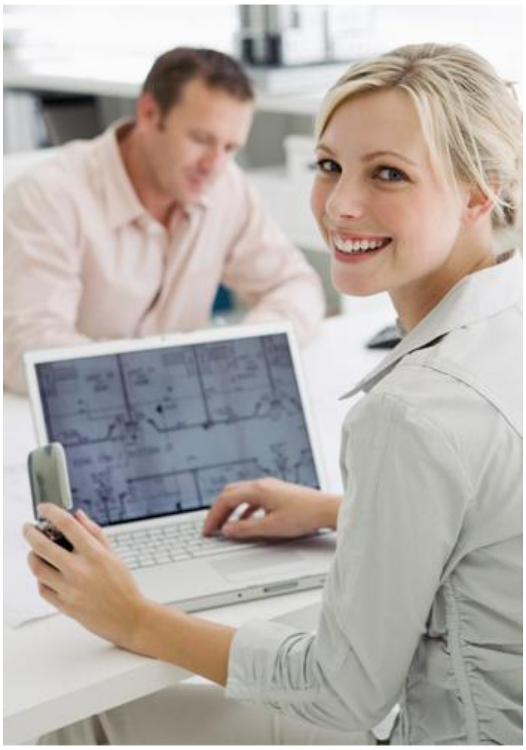
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/9 & 1/9 & 13/9 \\ 1/9 & -2/9 & 1/9 \\ 4/9 & 1/9 & -5/9 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo y operando obtenemos la solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/9 & 1/9 & 13/9 \\ 1/9 & -2/9 & 1/9 \\ 4/9 & 1/9 & -5/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \to x \\ \to y \\ \to z \end{array}$$

Ejemplo II

Utiliza el **método de la matriz inversa** para resolver el siguiente problema:



Ejemplo

Una empresa quiere construir cuatro residencias de estudiantes en una ciudad. En dichas residencias ofertarán habitaciones individuales, dobles y cuádruples. Además disponen de una plantilla de empleados de limpieza y saben que cada uno de ellos puede hacer el trabajo equivalente a atender nueve habitaciones individuales o seis dobles o tres cuádruples.

Determinar cuántas habitaciones de cada tipo deberán tener las residencias si la primera residencia debe tener 65 habitaciones con 110 plazas y atendidas por 10 empleados; la segunda residencia, 50 habitaciones, 90 plazas y 8 empleados; la tercera, 75 habitaciones, 12 empleados y 130 plazas; y la cuarta, albergará a 170 estudiantes repartidos en 90 habitaciones y atendidos por 15 empleados.

Ejercicio **Pautas para resolver el ejercicio**

Documentos **Ejercicio resuelto**

Pautas para resolver el ejercicio

Para resolver el problema puede seguir los siguientes pasos:

- Identifica las variables del enunciado.
- Busca las relaciones existentes entre dichas variables.
- Plantea los sistemas de ecuaciones para cada residencia.
- Fíjate en las características de dichos sistemas. ¿Tienen algo en común?
- Resuelve mediante el método de la matriz inversa.
- Presenta los resultados obtenidos.

Sistemas compatibles indeterminados

Hemos visto que para poder aplicar el **método de la matriz inversa** necesitamos que **la matriz de coeficientes sea invertible**, es decir, **cuadrada** y con **determinante no nulo**. Esta condición, en términos de sistemas de ecuaciones lineales, equivale a decir que el sistema sea compatible determinado y tenga el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, en el caso de tener más ecuaciones que incógnitas es posible eliminar aquellas que sean linealmente dependientes de las otras.

Veremos ahora un ejemplo de aplicación de éste método para sistemas de ecuaciones compatibles indeterminados. El método se basa en identificar los parámetros y reducir el sistema a un con matriz de coeficientes invertible.

Ejemplo

Resolver utilizando el método de la matriz inversa el sistema

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ -x + 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

Documentos **Solución**

Método de Gauss-Jordan

Presentamos una forma de calcular la matriz inversa de una matriz aplicando el **método de Gauss-Jordan**. Éste método consiste en ir realizando **operaciones elementales** en la matriz.

El método de Gauss-Jordan nos permite **calcular la matriz inversa** de una matriz **sin necesidad de calcular el determinante** de una matriz y **la traspuesta de la adjunta**.

Este método se basa en la eliminación *gaussiana* que aplicamos en la resolución de sistemas de ecuaciones y requiere de los siguientes pasos:

- Construimos una matriz con la matriz de la que queremos calcular la inversa y con la matriz identidad.
- Realizamos operaciones elementales en esta matriz hasta conseguir que la matriz identidad quede en la parte izquierda.
- La matriz resultante en la parte derecha es la inversa de la matriz original.

Ejemplo

Calcular la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Siguiendo los pasos indicados obtenemos que:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

Documentos

Inversa de una matriz por Gauss-Jordan

Ejemplo de resolución de sistemas de ecuaciones

Un problema que aparece escrito en forma matricial pero que se basa en la resolución de sistemas de ecuaciones es el que se expone en el siguiente ejemplo:

Ejemplo

Encontrar todas las matrices *X* que cumplen que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución

Podemos escribir la ecuación pedida como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Se trata por tanto, de resolver tres sistemas de ecuaciones lineales todos ellos con la misma matriz de coeficientes.

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+3x_{21} &= 4 \\ x_{11}+2x_{21}-x_{31} &= 3 \\ x_{21}-2x_{31} &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_{12}+3x_{22} &= -4 \\ x_{11}+2x_{22}-x_{32} &= -1 \\ x_{22}-2x_{32} &= 3 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_{13}+3x_{23} &= 3 \\ x_{11}+2x_{23}-x_{33} &= 3 \\ x_{23}-2x_{33} &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Una forma de resolver estos sistemas de forma simultánea es calculando la matriz inversa de la matriz de coeficientes y multiplicando por la matriz que contiene a todos los términos independientes, de forma que **la matriz obtenida** sea la matriz buscada.

La matriz obtenida

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Método de resolución de sistemas de Gauss-Jordan

El método que acabamos de tratar para la obtención de la matriz inversa se puede ver como una aplicación de un método de resolución de sistemas lineales llamado también de **Gauss-Jordan**. Recordemos que el método de eliminación de Gauss consiste **en buscar un sistema de ecuaciones lineales equivalente** que sea **triangular superior** (o escalonado).

En este método se busca simplificar aun más la matriz hasta obtener una que sea diagonal, de manera que obtengamos la solución del sistema de manera prácticamente inmediata.

Del mismo modo que en el método de eliminación de Gauss, únicamente está permitido realizar operaciones en las filas de la matriz ampliada.

Recordemos que para obtener un sistema equivalente podemos realizar las siguientes **operaciones**:

- Intercambiar la posición de dos ecuaciones del sistema.
- Multiplicar cualquiera de las ecuaciones del sistema por un escalar distinto de cero.
- Sustituir una ecuación del sistema por el resultado de sumarle otra multiplicada por un número distinto de cero.
- Añadir o suprimir una ecuación del sistema que sea combinación lineal de las que había.

Ejemplo

Resuelve el siguiente sistema mediante el método de Gauss-Jordan.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 7 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

Documentos

Detalles de la solución

Resumen

El **método de la matriz inversa** permite **resolver sistemas de ecuaciones lineales** tomadas como ecuaciones matriciales. Recuerda que únicamente es posible calcular la matriz inversa de una matriz si es cuadrada y con determinante distinto de cero.

$$AX = B \longrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \longrightarrow X = A^{-1}B$$

Aunque en principio está definida para sistemas compatible determinados con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, en otros casos, es posible aplicarlo con algunas modificaciones.

Gauss-Jordan presentan otro método para calcular la matriz inversa que no necesita del cálculo del determinante ni de la matriz adjunta y que se basa en realizar operaciones elementales en la matriz hasta conseguir la matriz identidad.

Este mismo método se puede aplicar para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, buscando un sistema equivalente con matriz de coeficientes diagonal. Su resolución es casi inmediata.