Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

MÉTODO DE CRAMER

Índice

Presentación

Introducimos en este tema un **método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales** denominado **Método de Cramer** que se basa en el **uso de los determinantes de las matrices**.

Veremos una justificación del método para sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, de tres ecuaciones con tres incógnitas y una generalización con cualquier número de ecuaciones.

Veremos para qué situaciones es posible aplicar el método y cómo aplicarlo en el caso particular de los sistemas compatibles indeterminados.

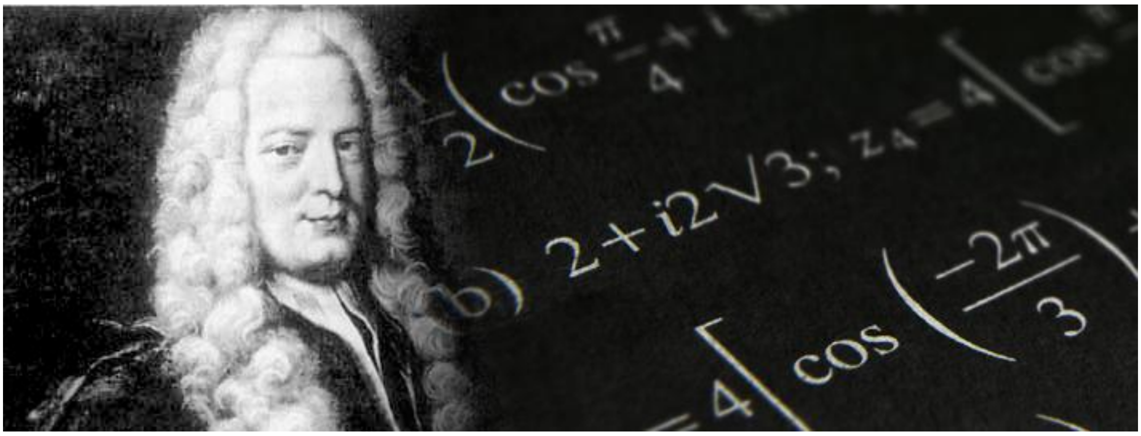
Introducción

Los **sistemas de ecuaciones lineales** aparecen como un **elemento esencial** del que trata el **Álgebra lineal** y cómo resolverlos ha sido uno de los problemas fundamentales en la historia.

Uno de los métodos de resolución de **sistemas de ecuaciones lineales** más importante es el **método de Cramer**. Este método nos permite escribir las soluciones en términos de los determinantes.

La regla mantiene el nombre del matemático suizo **Gabriel Cramer (1704-1752)** que la describió en un apéndice de su obra *Introduction à l'analyse des courbes algébriques*.

Como comprobarás, este método no resulta operativo para sistemas grandes ya que el cálculo de determinantes de matrices de orden grande resulta muy engorroso, sin embargo nos permite dar una fórmula explicita de la solución de sistemas pequeños.



Gabriel Cramer (1704-1752)

Sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas

Comenzaremos con **el caso más sencillo**: el estudio de un **sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas**. Consideremos el siguiente sistema y su expresión matricial:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Se llama solución de este sistema a todo par de valores que al sustituirlos en *x* e *y*, cumplen las igualdades. Para resolver este sistema, es decir, para dar una solución podemos multiplicar la primera ecuación por b_2 y la segunda por $-b_1$ y sumándolas obtenemos que:

$$\begin{array}{rcrcl} b_2a_1x & + & b_2\cancel{b_1y} & = & b_2c_1 \\ -b_1a_2x & - & \cancel{b_1}b_2y & = & -b_1c_2 \\ \hline \end{array}$$

$$x(a_1b_2 - a_2b_1) = c_1b_2 - c_2b_1$$

De esta manera siempre que $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ tendremos:

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Así hemos encontrado la manera de obtener una única solución del sistema cuando $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

Podemos escribir las soluciones anteriores como:

Determinante de la matriz de coeficientes modificada con la columna de términos independientes

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{c_1} & b_1 \\ \boxed{c_2} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \boxed{c_1} \\ a_2 & \boxed{c_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Determinante de la matriz de coeficientes

Y la condición para que tenga solución es que su denominador sea distinto de cero.

Observaciones

Hemos obtenido las fórmulas de Cramer para la resolución de sistemas de ecuaciones con las siguientes observaciones:

1. El **método de Cramer** se puede aplicar **siempre y cuando tengamos matrices de coeficientes cuadradas con determinante distinto de cero**. Esta observación implica que el método, así descrito, es aplicable para sistemas compatibles determinados (solución única). Veremos en secciones posteriores cómo aplicarlo para sistemas indeterminados.
2. Las **soluciones de cada variable serán el cociente entre dos determinantes**. En el denominador el determinante de la matriz de coeficientes y en el numerador, el determinante de la matriz de coeficientes en la que hemos cambiado la columna de los términos correspondientes a la incógnita que estamos calculando por los términos independientes.

Ejemplo

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando las fórmulas de Cramer.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$$

En primer lugar construimos la matriz de coeficientes para ver si es cuadrada y su determinante es distinto de cero, en ese caso el rango de la matriz será *2* igual al de la matriz de coeficientes e igual al número de incógnitas, en ese caso la solución es única.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13 \neq 0$$

Calculamos las soluciones mediante las fórmulas de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{13}{-13} = -1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-26}{-13} = 2$$

Ejercicio

Solución

Solución

Solución

La solución del sistema es *x=-1*, *y=2*.

Recuerda que para comprobar que has resuelto bien el sistema sólo tienes que sustituir el valor de *x* e *y* obtenido en las ecuaciones y verificar que se cumplen ambas.

Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

Generalizamos las fórmulas anteriores para sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas del tipo:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{array}\right.$$

Consideramos la matriz de coeficientes cuadrada:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Las fórmulas de Cramer se pueden extender al caso de tres incógnitas obteniendo como soluciones del sistema:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{|A|} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{|A|} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{|A|}$$

Siempre que $|A| \neq 0$.

Fíjate que los términos independientes los ponemos en el determinante del numerador en la columna correspondiente a la variables que estamos calculando, en la primera para la *x*, en la segunda para la *y*, y en la tercera para la *z*.

Ejemplo

Observa el siguiente ejemplo práctico de la resolución de sistemas de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas. Para poder aplicar el método de Cramer debes recordar el cálculo de determinantes de orden 3, por ejemplo, mediante la **regla de Sarrus**.

Ejemplo

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & 3z & = & 7 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 5 \\ x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right.$$

Calculamos la matriz de coeficientes y su determinante para estudiar si el sistema es compatible determinado:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Ahora la **solución** será:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{9}{9} = 1 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{0}{9} = 0 \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

Método general

Una vez visto cómo se aplica las fórmulas de Cramer para los sistemas de dos y tres ecuaciones, es sencillo generalizar éstas fórmulas para los sistemas de *n* ecuaciones y *n* incógnitas.

Para poder aplicar éste método, **la matriz de coeficientes debe ser cuadrada y con determinante distinto de cero**, es decir, deben ser sistemas compatibles determinados. En el caso en el que el sistema fuese compatible determinado pero tuviese más ecuaciones que incógnitas, bastaría con eliminar las ecuaciones que son linealmente dependientes y aplicar el método a las *n* ecuaciones independientes:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right.$$

Si la matriz de coeficientes tiene **determinante no nulo**:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Las **soluciones** serán:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Método Cramer para sistemas compatibles indeterminados I

Hemos insistido durante todo el tema que para poder aplicar las fórmulas de Cramer tal y como aparecen, es necesario que el **sistema sea compatible determinado**, es decir, que tenga solución única, pero ¿qué ocurre si el sistema tiene infinitas soluciones?, ¿es posible encontrarlas mediante este método?

Lo que debemos hacer es transformar el sistema en uno que tenga la matriz de coeficientes cuadrada con determinante no nulo, veamos la aplicación con un **ejemplo**:

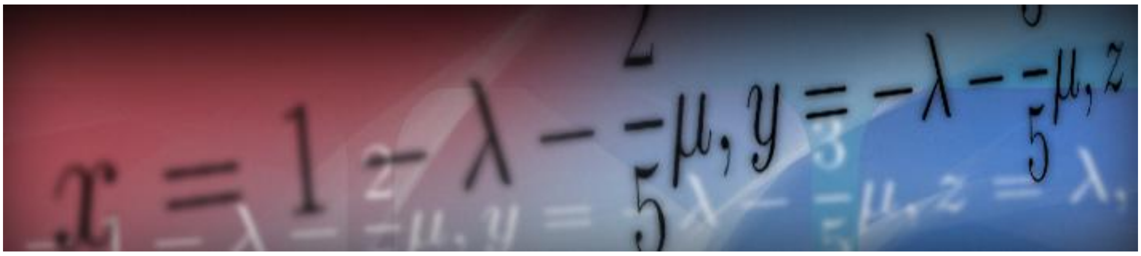
$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 1 \\ 2x - 3y - z - t = 2 \end{cases}$$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones pero con cuatro incógnitas. Escribimos las matrices de coeficientes y la ampliada para estudiar su rango.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{matrix} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

● Determinante no nulo

El rango de ambas es *2*, por tener un menor de orden dos con determinante no nulo, como el número de incógnitas es *4*, el sistema será compatible indeterminado y necesitaremos dos parámetros.



Método Cramer para sistemas compatibles indeterminados II

¿Qué incógnitas pueden ser parámetros? Observando la submatriz que determina el rango, vemos que para obtener un sistema con matriz de coeficiente con determinante no nulo, *x* e *y* pueden quedar como variables *y z* y *t* se convierten en parámetros, obteniendo:

$$\left\{ \begin{array}{r} x + y = 1 - 2\lambda - \mu \\ 2x - 3y = 2 + \lambda + \mu \end{array} \right.$$

Este nuevo sistema es cuadrado, dos ecuaciones y dos incógnitas: *x* e *y*, y tiene como matriz de coeficientes *A'* y *B'* como matriz de términos independientes.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B' = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda - \mu \\ 2 + \lambda + \mu \end{pmatrix}$$

Utilizando las formulas de Cramer tenemos que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 - 2\lambda - \mu & 1 \\ 2 + \lambda + \mu & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{(-3)(1 - 2\lambda - \mu) - (2 + \lambda + \mu)}{-5} = 1 - \lambda - \frac{2}{5}\mu$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - 2\lambda - \mu \\ 2 & 2 + \lambda + \mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{2 + \lambda + \mu - 2(1 - 2\lambda - \mu)}{-5} = -\lambda - \frac{3}{5}\mu$$

Ejercicio

Solución

Solución

Solución:

$$x = 1 - \lambda - \frac{2}{5}\mu, y = -\lambda - \frac{3}{5}\mu, z = \lambda, t = \mu$$

Ejemplo

Practiquemos el método anterior con un nuevo ejemplo.

Ejemplo

Resuelve, utilizando las fórmulas de Cramer, el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{cl} x+z & =2 \\ 2x+3y+z & =3 \\ 3x+3y+2z & =5 \end{array}\right.$$

Para resolver el sistema debes seguir los siguientes pasos:

1. Escribe las matrices de coeficientes y la ampliada y estudia sus rangos.
2. Discute el carácter del sistema según el Teorema de Rouche-Frobenius.
3. Si el sistema es compatible indeterminado, determina el parámetro, o los parámetros, y pásalo al término independiente.
4. Aplica las fórmulas de Cramer con el "nuevo" sistema.

Si has realizado correctamente todos los pasos llegarás a que la solución de este sistema es:

$$x=2-\lambda, y=\frac{\lambda-1}{3}, z=\lambda$$

Detalles de las operaciones

Resumen

En este tema hemos visto un **método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales** denominado método de **Cramer** que utiliza los determinantes.

Para utilizar éstas fórmulas de resolución **es necesario que el sistema tenga el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y que sea compatible determinado**.

En general escribiremos:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \quad \ldots \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Fíjate que en los denominadores está el determinante de la matriz de coeficientes y en el numerado el determinante de la matriz de coeficientes en el que hemos sustituido la columna de términos independientes en el lugar de las variables que estamos calculando.

Para el caso de sistemas compatibles determinados con más ecuaciones que incógnitas bastará con eliminar las ecuaciones linealmente dependientes. Si el sistema es compatible indeterminado hemos presentado, mediante ejemplos, la manera de aplicar las fórmulas realizando una pequeña trasformación en el sistema apoyados en los parámetros.