Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Índice

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

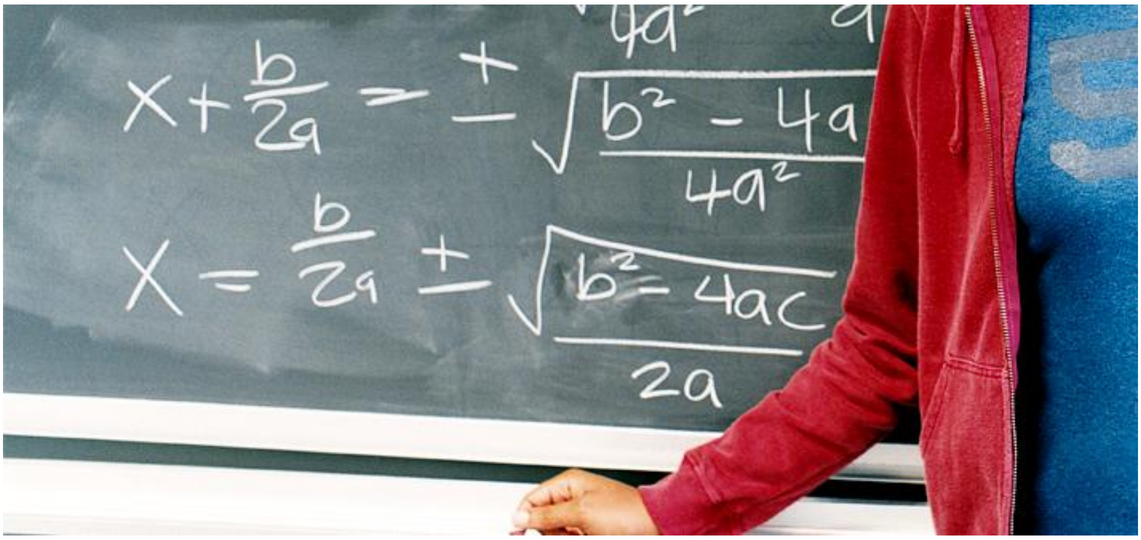
Presentación

Introducimos en este tema los **sistemas de ecuaciones lineales** que aparecen dentro del campo matemático denominado álgebra lineal.

Veremos el concepto de ecuación de de incógnitas y sus usos en el álgebra. La consideración de un conjunto de ellos como sistema de ecuaciones y su expresión matricial.

Identificaremos las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones y sus características.

El **Teorema de Rouche-Frobenius** nos permitirá conocer si un sistema tiene o no solución antes de resolverlo mediante el uso adecuado del rango de la matriz.



SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Introducción

Los **sistemas de ecuaciones lineales** aparecen como un elemento esencial que trata el álgebra lineal. Esta rama de las matemáticas cuyo nombre proviene del término *al-jabr* que aparece en el título de un texto del siglo IX, escrito por el **matemático árabe al-Khwarizmi**, trata las **cantidades, sus estructuras y las relaciones**, de forma que es la ciencia que estudia el **cálculo simbólico** y las **ecuaciones**.

De todas las posibles relaciones, nos centramos en las que son lineales.

El término **lineal** corresponde a cantidades sumadas (o restadas) y multiplicadas por números. En estos casos no aparecen, por tanto, potencias de las incógnitas o productos entre ellas.

El Álgebra en la historia

A lo largo de la historia han sido muchos los matemáticos que se han interesado por el cálculo simbólico o, más precisamente, por la **resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones** (lineales y no lineales).

En los **papiros egipcios** (especialmente en el de Rhind (1.650 a.C.) aparecen multitud de problemas matemáticos de tipo aritmético y algebraico.

Los **babilonios**, por su parte, se dedicaron a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y a las ecuaciones de segundo grado.

Los **matemáticos griegos** también se dedicaron a la resolución de sistemas de ecuaciones, pero utilizando métodos geométricos.

En detalle

Diofanto de Alejandría

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En detalle

Diofanto de Alejandría

De entre los griegos, resulta imprescindible destacar el trabajo de **Diofanto de Alejandría** (cuya obra más importante fue *Aritmética*) que es considerado el **padre del álgebra**. Este matemático griego dejó este epigrama que refleja su interés por el estudio de las soluciones de las ecuaciones y que se conserva en la antología griega:

"Transeúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad".

DIOFANTO de Alejandría (1993): *Antología palatina I: epigramas helenísticos*

¿Sabrías decir a qué edad murió Diofanto?

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ecuaciones

Un problema que se repite a largo de la historia es tener que determinar ciertas cantidades que deben cumplir una serie de relaciones de forma simultánea. Estas cantidades las representamos por medio de incógnitas y las relaciones las escribiremos en forma de ecuación.

Llamamos **ecuación** a una **igualdad entre dos expresiones**. Resolver una ecuación implica obtener los valores de *x* que verifican dicha igualdad.

Una ecuación con *n* variables (incógnitas) decimos que es lineal si puede escribirse de la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Las a_i reciben el nombre de **coeficientes** y *b* es el **término independiente**.

Las ecuaciones lineales, por lo tanto, pueden depender de una o varias variables:

- **Ecuaciones lineales con una incógnita** son del tipo *ax+b=c*.
- **Ecuaciones lineales con dos incógnitas** del tipo *ax+by+c=0*. Estas ecuaciones representan una recta en el plano.
- **Ecuaciones lineales con tres incógnitas** del tipo *ax+by+cz=d* que es la ecuación de un plano en el espacio (tres dimensiones).
- **Ecuaciones con más de tres variables** que no se pueden representar gráficamente ero si se pueden resolver de forma algebraica.

Como vemos, existe una **estrecha relación** entre el **álgebra** y la **geometría**.

Pitágoras y **Descartes**, entre otros, fueron capaces de resolver ecuaciones (lineales y no lineales) mediante el uso de elementos geométricos. Veremos en las secciones posteriores qué interpretaciones geométricas podemos dar a las soluciones de las ecuaciones o de los sistemas.

Pitágoras

Pitágoras de Samos (aproximadamente 582 a. C. - 507 a. C., en griego: *Πυθαγόρας ο Σάμιος*) fue un filósofo y matemático griego, famoso sobre todo por el Teorema de Pitágoras, que en realidad pertenece a la escuela pitagórica y no sólo al mismo Pitágoras. Afirmaba que *todo es matemáticas*, y estudió y clasificó los números.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Descartes

René Descartes [pronunciado *kaene de'kakt* en francés] (La Haye en Touraine, actual *Descartes*, 31 de marzo de 1596 – Estocolmo, 11 de febrero de 1650) fue un filósofo, matemático y científico francés, considerado como el padre de la filosofía moderna.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sistemas de ecuaciones lineales

En muchas ocasiones, las cantidades que queremos calcular deben cumplir de forma simultánea varias relaciones, es entonces cuando nos encontramos frente a un **sistema de ecuaciones**. En este caso nos centraremos en los sistemas con ecuaciones lineales.

De forma general escribiremos los sistemas de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

De forma general llamaremos a los a_{ij} **coeficientes** y a los b_i **términos independientes**. Los números *m* y *n* no tienen por qué ser iguales.

Expresión matricial de un sistema

Una característica que tienen los **sistemas lineales** es que es posible **escribirlos en forma matricial** de manera que el sistema anterior quedaría de la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de coeficientes}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de incógnitas}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de términos independientes}}$$

Y escribimos *AX=B*, donde *A* es la **matriz de coeficientes**, *X* la **matriz de incógnitas** y *B* la matriz que contiene a los **términos independientes**.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Tipos de sistemas

El primer paso que se plantea ante un sistema de ecuaciones lineales es saber si tiene solución y en caso afirmativo cómo calcularla.

Una **solución** particular de un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de escalares (números reales) que verifican todas las ecuaciones simultáneamente.

Con esta definición es fácil comprobar si un sistema está bien resuelto, pues basta con sustituir la solución en las ecuaciones y verificar que las cumple todas y cada una de ellas.

Atendiendo a las posibles soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales podemos clasificarlos en:

Sistemas de ecuaciones lineales

Tipos de sistemas	Definición
Sistemas compatibles	Sistemas que tienen solución. Pueden ser de dos tipos: • Determinados: si la solución es única. • Indeterminados: si hay infinitas soluciones.
Sistemas incompatibles	Sistemas que no tienen solución.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Teorema de Rouche- Frobenius

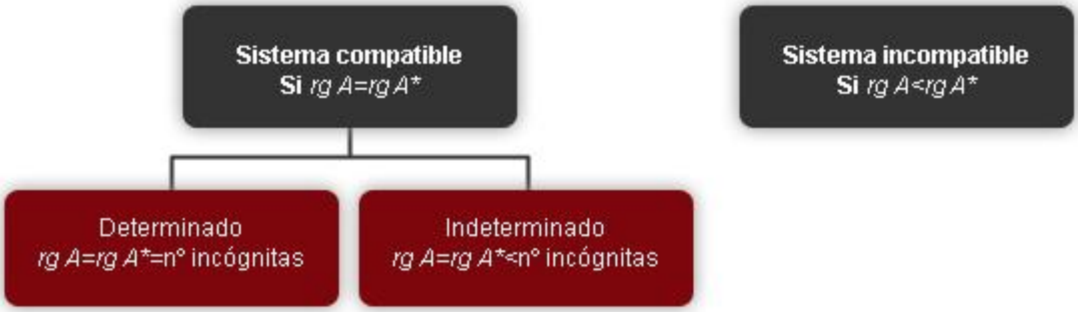
El Teorema de Rouche-Frobenius nos permite analizar de forma general si el sistema de ecuaciones lineal tiene o no solución y cuántas. Este estudio se denomina **discusión del sistema** y se basa en el estudio del rango de las matrices que forman el sistema.

Retrato de Ferdinand Georg Frobenius

De manera general llamaremos *A* a la matriz de coeficientes del sistema de ecuaciones y *A** a la matriz ampliada con la columna de términos independientes.

$$\underbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right)}_{A^*}$$

Denotaremos por *rg A* al rango de la **matriz de coeficientes** *A* y *rg A** al de la **ampliada**. Según el teorema tenemos que:



SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

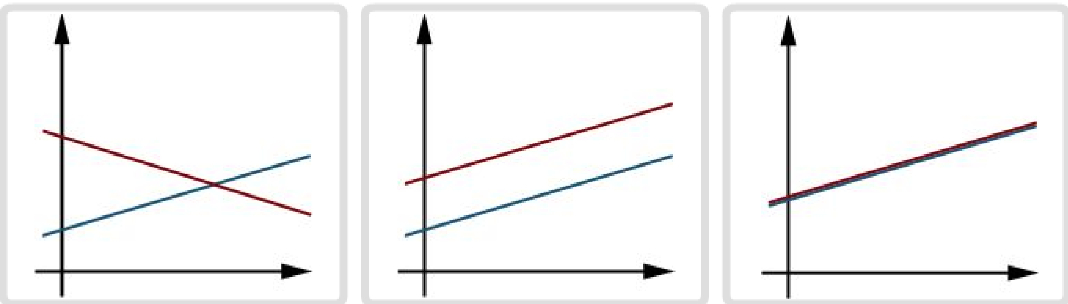
Interpretación geométrica de las soluciones

Ya hemos comentado que el álgebra y la geometría están muy relacionadas. Acabamos de ver cómo discutir de forma algebraica un sistema de ecuaciones lineales, en función del valor del rango de las matrices de coeficientes y ampliada y el número de incógnitas, pero geométricamente, ¿qué significado tiene cada posibilidad?

Veamos qué ocurre en el caso más sencillo de **sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas**. Geométricamente, resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es estudiar cuál es la posición relativa de dos rectas en el plano. Es decir, **resolver el sistema implica buscar si las rectas tienen o no puntos en común**.

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array}\right\}$$

Si dibujamos dos rectas en un plano vemos que únicamente existen tres posibilidades: **Las rectas se cortan en un punto** (la solución es única), **las rectas son paralelas** (no tiene solución) o bien son la misma recta y **se cortan en todos sus puntos** (infinitas soluciones).



$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
Solución única	No hay solución	Infinitas soluciones

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sistemas homogéneos

Existen una clase de sistemas de ecuaciones que por sus particularidades merecen ser estudiados de forma separada: los **sistemas homogéneos**.

> Un sistema se dice que es homogéneo si no tiene términos independientes, es decir, si sus términos independientes son todos igual a cero.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\
\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0
\end{cases}
$$

En detalle

Observaciones

En detalle

1. Los sistemas homogéneos siempre tiene solución.

   Esto ocurre porque la matriz ampliada añade una columna de ceros por lo que el rango de la matriz siempre será igual al de la matriz de coeficientes. (Piensa que una columna de ceros no puede aportar información independiente a la que ya tienes).Por lo tanto, si es homogéneo, siempre se da que *rgA=rgA**.
2. **Si su solución es única**, entonces es *(0,0,…,0)* y se denomina **solución trivial**.

   En el caso en el que el rango coincida con el número de incógnitas, entonces la solución es única y es *(0,0,...,0)*, ya que si sustituyes el valor 0 en todas las incógnitas, al multiplicar por los coeficientes y sumar (o restar) siempre obtendrás el valor 0. Recuerda: la solución *(0,0,…,0)* se denomina solución trivial.
3. Si el **sistema es compatible indeterminado** (infinitas soluciones), sus soluciones siempre cumplen que :
   - La **suma de dos soluciones** es una solución del sistema homogéneo.
   - El **producto de una solución** por un número (escalar) es una solución del sistema homogéneo.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ejemplo

Un problema típico relacionado con los sistemas de ecuaciones suele ser el de discutir un sistema en función del valor de un parámetro veamos un ejemplo de resolución de éste tipo de problemas.

Discute el siguiente sistema en función de los valores del parámetro:

$$¿\quad \left.\begin{array}{r} x-y=m \\ 2x+y-z=0 \\ -x+y+mz=m \end{array}\right\}\ ?$$

Para discutir el sistema, debemos **calcular el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada**, para ello, podemos escribir las matrices y buscar una matriz equivalente que sea triangular. Calcularemos el **rango en función de número de filas** que son linealmente independientes.

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & m & m \end{array}\right)}_{A^*} \begin{array}{c} \sim \\ F_2=F_2+2F_1 \\ F_3=F_3+F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & m \\ 0 & 3 & -1 & -2m \\ 0 & 0 & m & 2m \end{array}\right)$$

Fíjate en la última fila, si ***m=0*** entonces la matriz sería:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{A^{*}{}_{+}{}^{*}}$$

En este caso, el rango de la matriz A es igual al de la matriz ampliada igual a 2 pero menor que el número de incógnitas que es 3, por lo tanto el sistema es compatible indeterminado.

Si ***m≠0***, entonces *rg A=rg A*=3= nº incógnitas*, por lo que el sistema es compatible determinado.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Resumen

En este tema hemos definido el sistema de ecuaciones lineales como un conjunto de ecuaciones que deben cumplirse de forma simultánea. El término lineal equivale a proporcional es decir, a elementos multiplicados por números y sumados (o restados) entre ellos, de forma que no aparecen potencias de las incógnitas ni productos cruzados. Todos sistema de ecuaciones lineal se puede escribir en forma matricial $AX=B$ donde A es la matriz de coeficientes, X la matriz de incógnitas, y B la matriz de términos independientes. El **objetivo** será determinar si el sistema tiene solución y cuántas tiene, y para ello utilizaremos el teorema de Rouche-Frobenius.

- La **interpretación geométrica** de las soluciones de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas corresponde al **cálculo de las posiciones relativas de dos rectas en el plano**, donde: dos rectas que se cortan en un punto es un sistema con solución única; dos rectas paralelas es un sistema sin solución; y dos rectas coincidentes es un sistema con infinitas soluciones.
- Los **sistemas homogéneos** son aquellos sistemas cuyos **términos independientes son todos nulos**. Estos sistemas son siempre compatibles y en el caso de tener una única solución es la solución trivial *(0,0,…,0)*.