Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

MATRICES Y DETERMINANTES

EJERCICIOS RESUELTOS

Índice

Presentación

Se presentan en este tema algunos **ejercicios** resueltos con **matrices**. Los ejemplos planteados corresponden a distintos conceptos referentes a las matrices, determinantes y rango.

Para resolver estos problemas es importante no olvidar las **propiedades de las matrices** y sus operaciones, así como los **diferentes modos de calcular** lo que se pide. De esta forma se podrá elegir el método que más convenga en cada caso.

Una buena idea puede ser tratar de resolver los ejercicios por uno mismo antes de ver la solución y así detectar aquellos aspectos de la materia que no se entienden.

Una vez consultada la solución, hay que asegurarse de que se comprenden todos los pasos y en caso contrario consultar con el profesor las dudas que surjan.

Operaciones con matrices

Dadas las matrices A, B, C y D realizar las operaciones indicadas cuando sea posible.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calcular, si es posible, las siguientes operaciones *A • C, C • A, A • B, B • A, B • C, C • B, C • D, D • C, C + B, 3C y* D^{-1}.

Solución

Para poder sumar o restar dos matrices es necesario que tengan la misma dimensión; si se quiere multiplicar dos matrices, el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda. Obsérvese que las matrices dadas tienen las siguientes dimensiones:

Matriz A: 3x2 *Matriz B: 3x3* *Matriz C: 2x3* *Matriz D: 2x2*

- No es posible sumar o restar ninguna de ellas, al no coincidir sus dimensiones.
- Únicamente se pueden realizar los siguientes productos: *A • C, C • A, C • B, A • D, B • A, D • C*.
- Es posible multiplicar un número por cualquier matriz.
- Una matriz es invertible si es cuadrada y con determinante no nulo, por lo tanto, es posible calcular D^{-1}.

Las operaciones posibles puedes encontrarlas en el siguiente documento adjunto.

Documentos **Operaciones posibles con matrices**

Potencias de una matriz

Dada la matriz *A*, calcular A^3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para calcular la **potencia de una matriz** se debe recordar la definición de potencia:

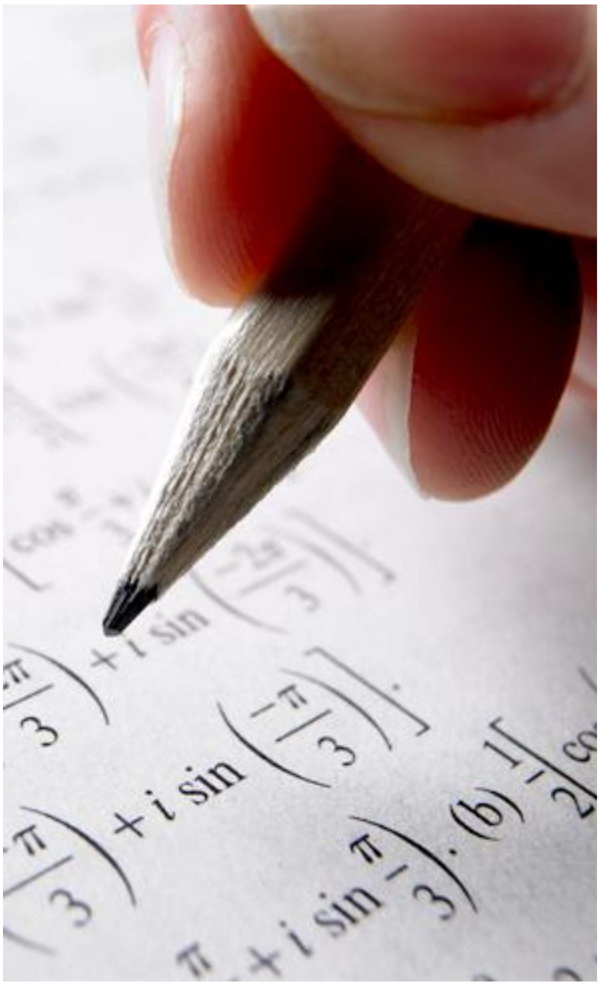
$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{\text{n veces}}$$

Por lo tanto, para calcular A^3 se debe multiplicar $A^3 = A \bullet A \bullet A$ (cuidado con el orden de multiplicación ya que el producto de matrices no es conmutativo).

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 28 & 20 & -1 \\ 43 & 63 & 25 \\ -8 & 4 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 225 & 134 \\ 433 & 545 & 185 \\ 57 & -11 & -58 \end{pmatrix}$$

Productos notables de matrices



Como ya se sabe, para los números reales se cumple que:
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

¿Qué ocurre para las matrices?
Estudiar si dadas dos matrices *A* y *B* se cumple que:

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

Solución:
Para calcular $(A+B)^2$ se tiene que tener en cuenta que el producto de matrices no es conmutativo.

Operando se obtiene:

$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$

Obsérvese el resultado. ¿Podemos decir, en general, que $A^2+AB+BA+B^2= A^2+2AB+B^2$?

Dado que el producto de matrices no es conmutativo, en general no se cumple que $AB=BA$, por lo que no es cierta la afirmación anterior.

Por lo tanto, para matrices $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$

Determinantes de una matriz

Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 4 & x & 6 \\ 5 & 7 & 12 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$$

Para resolver el sistema se calcula el determinante de la matriz de orden 3 y se iguala a cero. Se obtiene una ecuación de una variable que se tiene que resolver usando el método adecuado en función del grado de la ecuación.

Al resolver el **determinante** (utilizando, por ejemplo, la regla de Sarrus) se obtiene que:

$$\begin{vmatrix} 4 & x & 6 \\ 5 & 7 & 12 \\ 3 & -1 & x \end{vmatrix} = 64x - 5x^2 - 108$$

Por lo tanto, la ecuación para resolver es $64x-5x^2-108=0$. Al ser una ecuación de segundo grado se calculan sus raíces mediante la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cuyo resultado es $x = 2$ y $x = 10.8$

Rango de matriz

Calcular el rango de la matriz en función del valor de *a*.

$$\begin{pmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{pmatrix}$$

Para calcular el rango de la matriz se pueden utilizar varios métodos. En esta ocasión se reducirá la matriz a una matriz escalonada con el objetivo de estudiar el número de filas linealmente independientes. Es importante recordar que es posible calcular el rango de una matriz a través del cálculo de determinantes. Al observar la matriz se comprueba que su dimensión es *3x4*. Por lo tanto, el máximo rango que puede tener es el *3*.

$$\begin{pmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{pmatrix} \underset{F_1 \longleftrightarrow F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 1 & a & a & 1 \\ a & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 : F_2 - F_1 \\ F_3 : F_3 - aF_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Hay que fijarse en las filas que tienen el valor *a*, ¿Para qué valores de *a* se anula alguna fila?

Caso 1. Si *a = 1*, la matriz anterior queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rg A = 1

Ejemplo

Caso 2

Ejemplo

Caso 2

Si *a = -1*, la matriz anterior queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rg A = 2

Ejemplo **Caso 3**

Ejemplo

Caso 3

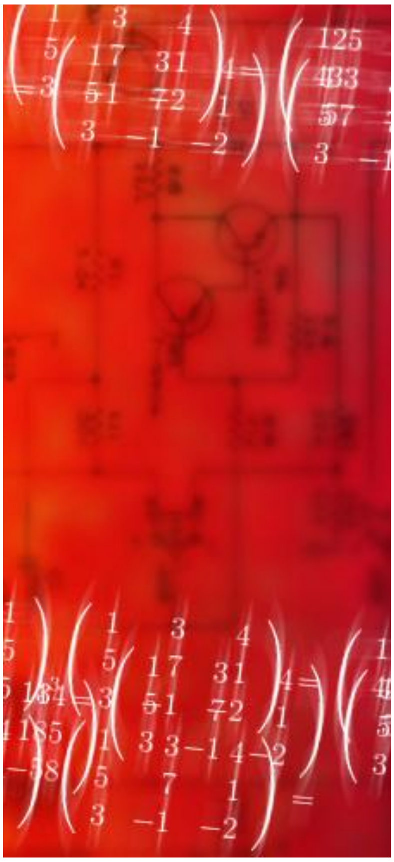
Si a ≠ ±1, la matriz anterior queda de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}$$

Rg A = 3

Inversa de una matriz

Calcular el valor de *a* para que la siguiente matriz sea invertible.



$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & 4 \\ 4 & a & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Para resolver el problema se debe tener presente que para que una matriz sea invertible debe ser:

- Cuadrada.
- Con determinante no nulo.

La matriz *A* es cuadrada y su determinante es:

$$A = \begin{vmatrix} a & 4 & 4 \\ 4 & a & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 3a - 4$$

Como se quiere que el determinante no sea cero, se busca el valor de *a* que no anule la ecuación, es decir, tal que $a^2 - 3a - 4 \neq 0$. Las raíces de este polinomio son $a = -1$ y $a = 4$, por lo que la matriz es invertible siempre que $a \neq -1$ y $a \neq 4$.

Ecuaciones matriciales

Se estudia ahora la resolución de un problema que implica resolver una ecuación matricial.

Comprobar que la matriz *x* verifica x^2-7x+10i=0 donde *x* es la matriz.

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Se realizan las operaciones pedidas recordando que *I* es la matriz identidad y *0* la matriz nula.

En primer lugar ser resuelve x^2

$$X^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la ecuación se obtiene la igualdad pedida.

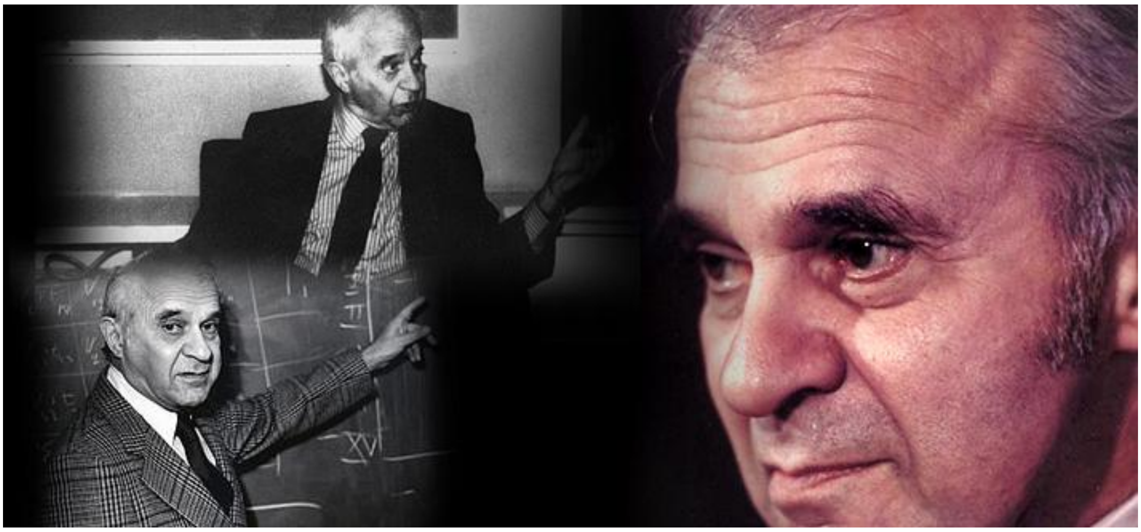
$$\begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 & 14 \\ 7 & 21 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18-28+10 & 14-14+0 \\ 7-7+0 & 11-21+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicación económica

Una de las aplicaciones de las matrices en el campo de la economía son los **procesos de producción**, ya que es posible representar varias cantidades simultáneamente mediante una matriz y calcular, a partir de ella, flujos de producción.

Wassily Leontief (1905-1999), premio Nobel en Economía en 1973, desarrolló un modelo input-output para la aplicación de problemas económicos. En este análisis introduce el **álgebra matricial** a los problemas de equilibrio general, estudiando la relación de dependencia entre los sectores productivos en los que se considera dividida la economía de un determinado país.



Wassily Leontief

Resumen

En este tema se han repasado algunos ejercicios resueltos del uso de las **matrices**. No hay que olvidar que no siempre se puede operar una matriz, pues la **suma** y la **resta**, por ejemplo, sólo están definidas para matrices de la **misma dimensión**. El producto de matrices, por su parte, sólo está definido para aquella matriz cuyo número de columnas coincida con el número de filas de la otra.

Es importante también recordar que **no está definida la división de matrices**. Una operación que en ocasiones puede resultar equivalente es el uso de la **matriz inversa**.

Además, el **producto de matrices no es conmutativo**, lo que supone que propiedades y relaciones conocidas para los números reales no se cumplen con este tipo de cantidades abstractas.

Las matrices pueden aplicarse en economía en los **procesos de producción**.