Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

MATRICES Y DETERMINANTES

RANGO DE UNA MATRIZ

Índice

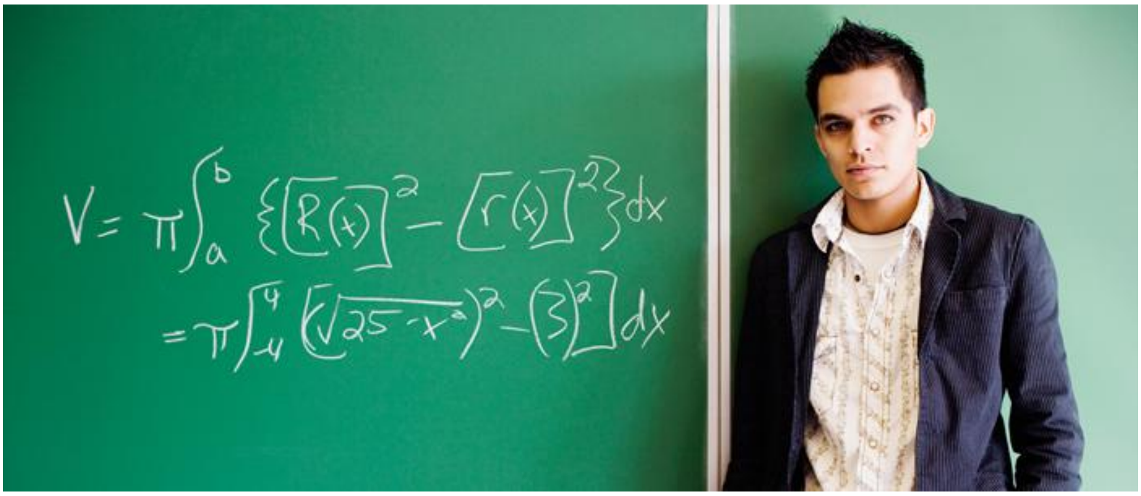
Presentación

En este tema introduciremos el concepto de rango de una matriz y cómo calcularlo a partir de dos métodos:

- Matrices elementales.
- Uso de determinantes.

El rango de la matriz nos ayudará en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

Para definir el concepto de rango presentaremos el concepto de dependencia e independencia lineal.



El determinante de una matriz tiene, además, otras aplicaciones como resolver sistemas de ecuaciones lineales y calcular el rango de una matriz, etc.

Matrices equivalentes

Existen una serie de operaciones que se pueden realizar entre las filas o columnas de la matriz de manera que obtenemos una nueva matriz. Estas operaciones se denominan operaciones elementales y son:

- Multiplicar una fila o columna por un número real distinto de cero.
- Intercambiar dos filas o columnas.
- Sumar o restar un múltiplo de una fila o columna por otra fila o columna.

Si una matriz se ha obtenido de otra mediante operaciones elementales se denomina matriz equivalente y tiene las mismas propiedades que la matriz original.

Nos va a interesar buscar una matriz equivalente a una dada que sea lo más sencilla posible, ya que eso nos facilitará las cálculos que hagamos con ella.

Una matriz sencilla para calcular con ella es la matriz escalonada, que es aquella que tiene cero por debajo de una escalera dibujada en su diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriz escalonada

Recuerda:
Si realizas operaciones en filas: para conseguir ceros debajo del primer elemento utiliza la fila primera. Una vez conseguidos, utiliza la segunda fila para los ceros de la segunda columna.

Ten cuidado, si vuelves a utilizar la primera fila, desharás los ceros conseguidos antes (¡no vuelvas a utilizarla!).

Suele ser recomendable que el primer número de la columna sea un *1*.

Ejemplo

Veamos mediante un ejemplo, cómo conseguir una matriz escalonada equivalente a una dada.

Escribiremos las operaciones que hemos realizado entre las matrices para que no te pierdas.

Para escribir que dos matrices son equivalentes utilizaremos el símbolo ~

Ejemplo

Consideremos la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Vamos a tratar de transformarla en una **matriz escalonada**

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Resulta más sencillo si el primer valor es un *1*, por lo que intercambiamos la fila 1 y la 2 y operamos las filas 2 y 3 con la fila 1 para conseguir ceros en la primera columna:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_2 = F_2 - 3F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -9 & 5 & -5 & 6 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_2 = F_2 - 2F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -9 & 5 & -5 & 6 \\ 0 & -9 & 5 & -5 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_3 = F_3 - F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para conseguir un cero en la segunda columna operamos la fila 3 con la 2. Fíjate que, como son iguales, la tercera fila se anula totalmente.

Dependencia lineal

Presentamos ahora los conceptos de **dependencia** e **independencia lineal** que serán de ayuda para definir el rango de una matriz. Para definir estos conceptos utilizaremos la definición de combinación lineal.

Decimos que una fila (o columna) v es **combinación lineal** de otras dos u_1 y u_2 si existen dos números λ, μ distintos de cero tales que $v= \lambda u_1+ \mu u_2$.

Decimos que tres filas (o columnas) son linealmente independientes si ninguna de ellas se puede escribir como combinación lineal de las otras.

Decimos que tres filas (o columnas) son linealmente dependientes una de ellas se puede escribir como combinación lineal de las otras dos.

Ejemplos

- Las filas *u=(1 2 3)*, *v=(0 3 4)* y *w=(1 -1 -1)* son linealmente dependientes ya que

  (1 2 3)-(0 3 4)=(1 -1 -1)

- Las filas *u=(1 2 3)*, *v=(3 5 7)* y *w=(4 6 5)* son linealmente independientes ya que no existen ninguno par de números tales que

$$1\ 2\ 3 = \bar{o}\,(3\ 5\ 7) + \beta\,(4\ 6\ 7)$$

Observación:

Cuando en una matriz realicemos operaciones elementales entre las filas o columnas, si éstas son linealmente dependientes entonces podremos operarlas para conseguir que todos sus elementos sean cero.

Rango de una matriz

Introduciremos la definición de rango de una matriz que nos servirá para estudiar si los sistemas de ecuaciones tienen o no solución.

Presentaremos dos definiciones equivalentes: una a partir de los conceptos de dependencia lineal y otra a partir del valor del determinante.

Se llama rango de una matriz A, y lo denotaremos por rg A, al número de filas (o columnas) linealmente independientes.

Observaciones:

- El número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes.
- El valor máximo que puede tener el rango de una matriz es el menor de los números correspondientes al número de filas y columnas, es decir, si una matriz tiene dimensión *2 x 6*, el valor máximo que puede alcanzar el rango de dicha matriz es *2*.

Cómo calculamos el rango de una matriz

Para calcular el número de filas (o columnas) linealmente independientes realizaremos operaciones elementales en la matriz buscando una matriz equivalente escalonada. Durante el proceso eliminaremos las filas (o columnas) con todos sus elementos nulos.

El rango de la matriz será el número de filas con algún elemento distinto de cero.

Ejemplo

Estudiaremos ahora el rango de una matriz siguiendo el procedimiento descrito.

Trataremos de escalonar la matriz dada mediante transformaciones elementales y contamos cuántas filas tienen algún elemento distinto de cero.

Calculamos el **rango de la matriz**

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Mediante **transformaciones elementales** obtenemos

$$\underset{F_2 = F_2 - 2F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \underset{F_2 = F_2 - 3F_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, el rango de la matriz es 1, ya que únicamente nos ha quedado una fila que no tiene todos los elementos igual a cero.

Hemos definido el rango como el número de filas (o columnas) linealmente independientes. En este caso, si observas la matriz con atención, verás que la segunda y la tercera son proporcionales a la primera y, por lo tanto, dependientes.

Rango de una matriz a partir de los determinantes

Es posible calcular el rango de una matriz utilizando el concepto de determinante, ya que el determinante de una matriz que tiene sus filas (o columnas) linealmente dependientes es cero.

Definimos el rango de una matriz A de orden mxn como el orden de la submatriz cuadrada más grande con determinante distinto de cero.

Ejemplo:

Observa la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Es una matriz de dimensión 3x4 (3 filas y 4 columnas), por lo tanto, las submatrices cuadradas más grandes que podemos encontrar son de orden 3. Eso quiere decir que, como mucho, el rango de la matriz será *3*.

Según la definición, si encontramos una submatriz de orden 3 cuyo determinante sea distinto de cero, entonces el rango será *3*. Si todas las matrices de orden 3 que podemos encontrar tienen determinante cero, entonces el orden será *2* o *1*.

Las posibles **submatrices de orden 3** que están en esta matriz son:

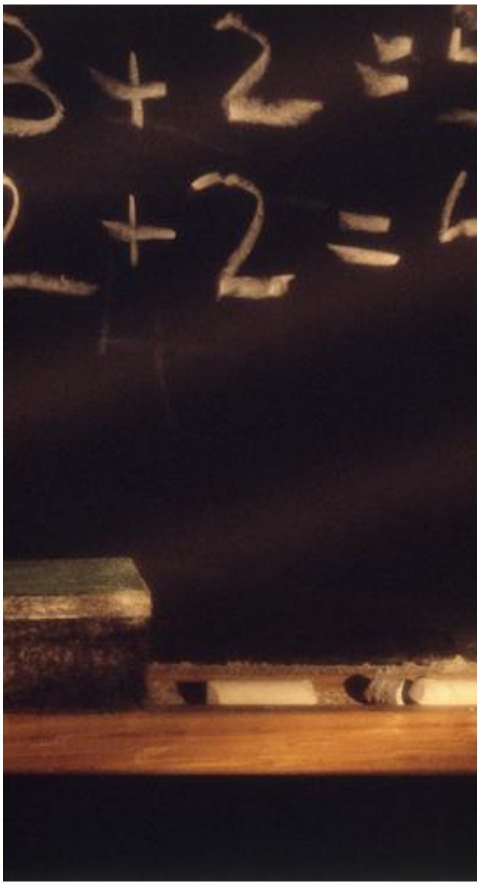
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

Al calcular los **determinantes** vemos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Por lo tanto **el rango de la matriz es 3**.

Ejemplo



Seguimos practicando el método con otro ejemplo.

Calculamos el **rango de la matriz:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 11 & 22 \end{pmatrix}$$

Como se trata de una matriz cuadrada de orden 3, tendrá rango *3* si su determinante es distinto de cero. Si es cero, su rango será *2* o *1*. Si encontramos una matriz de orden 2 cuyo determinante sea distinto de cero, entonces el rango de la matriz será *2*. Si los determinantes de todas las matrices de orden 2 contenidas en la matriz son cero, entonces el rango es *1*.

Calculamos el **determinante:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 3 & 11 & 22 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante es cero, el rango de la matriz será *2*, ya que, existe al menos una matriz de orden 2 cuyo determinante no es cero, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Propiedades del rango de la matriz

Veremos algunas de las **propiedades del rango de la matriz**:

- Si *A* es una matriz de dimensión *mxn* su rango será, como mucho, el mínimo valor entre *n* y *m*.
- Si *A* y *B* son dos matrices equivalentes, entonces tienen el mismo rango.
- El rango de una matriz *A* es igual al rango de su traspuesta A^t.

Recuerda que en una matriz el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes. Como la matriz traspuesta no es más que cambiar filas por columnas, es lógico que sus rangos coincidan.

- Si una matriz *A* de orden *n* es invertible, entonces su rango es igual a *n*.

Si una matriz es invertible, entonces es cuadrada y tiene determinante distinto de cero, por lo tanto, su rango coincide con su orden, y por tanto es n.

Resumen

En este tema hemos presentado el concepto de rango de una matriz a partir de dos definiciones equivalentes. Una de ellas se basa en el concepto de dependencia lineal y el otro utiliza el determinante.

Se llama rango de una matriz *A (rg A)* al número de filas (o columnas) linealmente independientes, es decir, que no pueden escribirse como combinación lineal de las demás.

De forma equivalente, definimos el rango de una matriz *A* de orden *mxn* como el orden de la submatriz cuadrada más grande con determinante distinto de cero.

Si utilizamos la primera definición es conveniente realizar una serie de operaciones en la matriz para convertirla en una matriz escalonada, el número de filas que no tengan todos sus elementos igual a cero, será el rango de la matriz.

Para utilizar la segunda definición, buscaremos las posibles submatrices de la matriz dada y calcularemos sus determinantes.