Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

MATRICES Y DETERMINANTES

MATRIZ INVERSA

Índice

Presentación 3

Determinante de una matriz 4

Determinante de matrices de orden 2 y 3 5

Determinante de una matriz 6

Ejemplo 7

Propiedades del cálculo de determinantes 8

Matriz inversa 9

Propiedades de la matriz inversa 10

Ejemplo 11

Resumen 12

Presentación

En este tema introduciremos el concepto de determinante de una matriz y cómo calcularlo según el orden de la matriz.

Además, veremos algunas de sus propiedades más importantes que, utilizadas correctamente, pueden ayudarnos a que el cálculo de los determinantes sea más sencillo.

Veremos que el determinante de una matriz nos permite obtener una fórmula general para calcular la matriz inversa.

El determinante de una matriz tiene, además, otras aplicaciones como resolver sistemas de ecuaciones lineales y calcular el rango de una matriz, etc.

Determinante de una matriz

Existen múltiples formas de definir el determinante de una matriz. En nuestro caso, definiremos el **determinante** de la matriz *A* como un número asociado a una matriz y lo denotaremos por *det(A)* o bien $|A|$.

Es importante señalar que únicamente se puede definir el determinante de una matriz que sea **cuadrada**.

Ten cuidado con la notación: cuando representamos matrices lo hacemos utilizando () o [], sin embargo el determinante lo escribimos con | |.

Históricamente, la introducción del determinante de una matriz tiene como objetivo resolver sistemas de ecuaciones lineales, por lo que su introducción en las matemáticas es anterior al desarrollo de las matrices. En el s. XVI, **Girolamo Cardano** lo utiliza para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Unos 100 años después se desarrollan determinantes de órdenes superiores, gracias a los descubrimientos de Leibniz y del matemático japonés **Kowa Seki**.

Girolamo Cardano
(1501-1576)

Kowa Seki
(1642-1708)

Determinante de matrices de orden 2 y 3

Aunque existe un método general para calcular el determinante de una matriz cuadrada de cualquier orden, para las matrices pequeñas (de orden 2 y 3) existen reglas fácilmente recordables que nos permiten encontrar el valor de los determinantes.

Matrices de orden 2

Las matrices más sencillas son las de orden 2, es decir, aquellas que tienen dos filas y dos columnas. En este caso, su determinante lo calcularemos restando el producto de los elementos de la diagonal principal menos los de la diagonal secundaria.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Matrices de orden 3

Los determinantes de matrices con tres filas y columnas se pueden calcular mediante la siguiente regla nemotécnica, denominada **regla de Sarrus.**

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + bfg + dhc) - (ceg + bdi + hfa)$$

Ejemplo

Utiliza estas fórmulas para calcular los siguientes determinantes

Regla de Sarrus

La **regla de Sarrus** es un método de fácil memorización para calcular el determinante de una matriz 3×3. Recibe su nombre del matemático francés **Pierre Frédéric Sarrus**.

Ejemplo

Utiliza estas fórmulas para calcular los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-6) = 6$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 36) - (0 - 16 + 0) = 52$$

Determinante de una matriz

Daremos ahora la definición general del determinante de una matriz de orden *n*.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

En esta definición llamaremos $|A_{ij}|$ al determinante de la matriz que queda de eliminar la fila *i-ésima* y la columna *j-ésima* de la matriz *A*.

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}|A_{n1}|$$

Observaciones:

- En este caso hemos desarrollado a través de la primera columna, pero es posible calcular el determinante de la matriz de forma análoga a través de cualquier fila o columna.
- Mediante esta definición para calcular el determinante de una matriz de orden *n* tendremos que calcular *n* determinantes de orden *n-1*.

Ejemplo

Resolveremos el siguiente ejemplo utilizando la regla general de cálculo de determinantes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

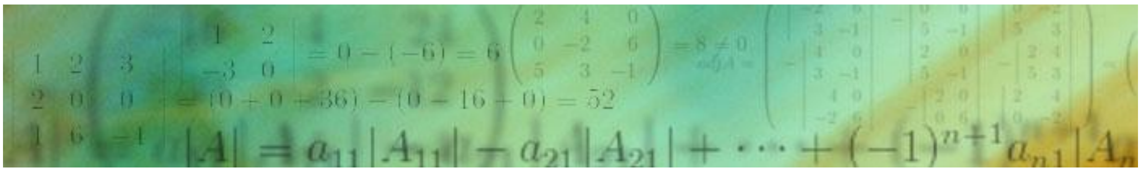
En este caso utilizaremos, para resolverlo, la primera columna

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 95 - 5 \cdot (-6) + 0 + 2 \cdot 28 = 95 + 30 + 56 = 181$$

Observación:

Fíjate que como uno de los elementos de la primera columna es un cero, no ha sido necesario calcular el tercer determinante (ya que al multiplicarlo por *0* obtenemos *0*). Esto nos ha ahorrado un cálculo, por lo tanto, lo conveniente será desarrollar por la fila o columna que tenga la mayor cantidad de ceros.

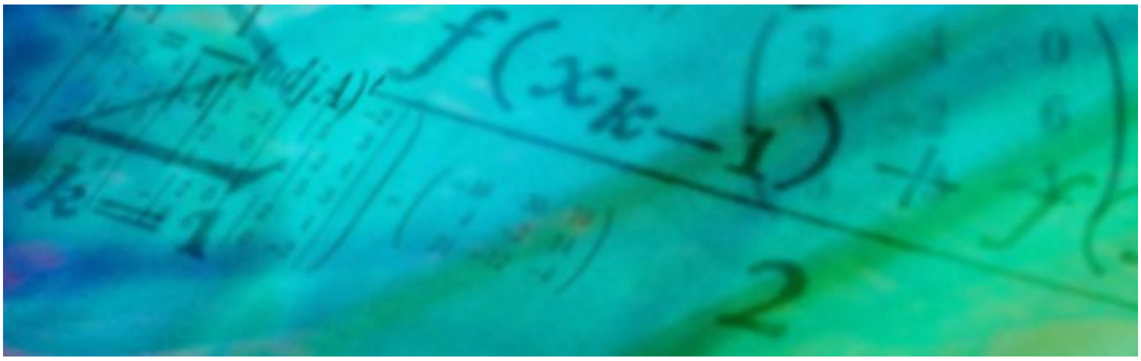


Propiedades del cálculo de determinantes

Como habrás podido observar el cálculo de determinantes mediante la definición general es muy largo, por lo que será conveniente conocer algunas propiedades que nos ayuden a simplificar su cálculo. En esta ocasión no demostraremos ninguna de las propiedades.

Matriz y su determinante

- Si una matriz tiene una fila o columna de ceros el determinante es cero.
- Si una matriz tiene una fila (o columna) igual o proporcional a otra fila (o columna) su determinante es cero.
- Si intercambiamos dos filas (o columnas) el determinante de la matriz obtenida es igual pero de signo contrario al determinante de la matriz original.
- Si multiplicamos una fila (o columna) de la matriz A por un escalar k el determinante de la nueva matriz será $|B|=k|A|$.
- Si tenemos una matriz triangular superior o inferior el determinante es el producto de los elementos de su diagonal.
- El determinante de toda matriz coincide con el de su transpuesta $|A| = |At|$.
- El determinante de un producto de matrices del mismo orden es el producto de los determinantes $|A \bullet B|=|A| \bullet |B|$.



Matriz inversa

Al estudiar las operaciones de las matrices vemos que se pueden sumar, restar, multiplicar por un escalar y en algunos casos, multiplicar entre ellas. Sin embargo, no hemos definido la división de matrices. Entonces, ¿cómo podríamos resolver una ecuación del tipo $AX=B$?, es decir, si quisiésemos calcular una matriz que al multiplicarla por A nos diese la matriz B, ¿qué tenemos que hacer?

Si en lugar de matrices fueran números, por ejemplo $5x=6$, tenemos que $x=6/5$, pero, ¿cómo dividimos las matrices?

La respuesta a esta pregunta pasa por considerar el elemento inverso, es decir, si encontramos una matriz C que al multiplicarla por A nos diese la identidad (el uno de las matrices), entonces:

$$AX=B \Longrightarrow \overset{I}{CA}X=CB \Longrightarrow IX=CB \Longrightarrow X=CB$$

A esta matriz C se le denomina matriz inversa de la matriz A

Matriz inversa

Si A es una matriz cuadrada de orden n tal que $|A|\neq 0$, entonces existe una matriz A^{-1} tal que $A^{-1}A= AA^{-1}=I$. En ese caso se dice que A es invertible y que su matriz inversa es A^{-1}.

Cálculo de la matriz inversa

De forma general, si A es una matriz invertible, entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\,A)^t$$

Donde ***adj A*** es la matriz adjunta de A, es decir, la matriz que se obtiene de sustituir cada coeficiente por el valor del determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila y la columna de dicho elemento con su signo $(-1)^{i+j}|A_{ij}|$.

Propiedades de la matriz inversa

Veamos ahora algunas propiedades de las matrices inversas:

- Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n y se cumple que $AB=I$, entonces se cumple que $BA=I$, y por lo tanto son mutuamente inversas, es decir, $B=A^{-1}$ y $A=B^{-1}$.
- Si A es una matriz invertible entonces $|A^{-1}|=-1/|A|$.
- Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo orden e invertibles se tiene que $(B\cdot A)^{-1}=A^{-1}\cdot B^{-1}$.
- Si A es invertible entonces $(A^{-1})^{-1}=A$.
- Si A es invertible entonces $(A^{t})^{-1}=(A^{-1})^{t}$.

Otras observaciones:

- Recuerda que, además, $(adj\ A)^{t}=adj\ A^{t}$, por lo tanto para calcular la inversa de una matriz puedes trasponer y luego calcular la adjunta o al contrario.
- Es fácil comprobar si hemos calculado bien la matriz inversa, lo único que tenemos que hacer es multiplicarla por la matriz inicial y ver si obtenemos la matriz identidad.

Ejemplo

Calcular la **matriz inversa** de la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución:

En primer lugar debemos comprobar que es invertible, como es cuadrada, basta con calcular su determinante y observar si es nulo

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

Calculamos la **matriz adjunta**:

$$adjA = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 30 & 10 \\ 4 & -2 & 14 \\ 24 & -12 & -4 \end{pmatrix}$$

Después la **matriz traspuesta** y la dividimos por el determinante:

$$(adjA)^t = \begin{pmatrix} -16 & 4 & 24 \\ 30 & -2 & -12 \\ 10 & 14 & -4 \end{pmatrix}$$

La **matriz inversa** será:

$$A^{-1} = \frac{1}{88} \begin{pmatrix} -16 & 4 & 24 \\ 30 & -2 & -12 \\ 10 & 14 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{11} & \frac{1}{22} & \frac{3}{11} \\ \frac{15}{44} & \frac{-1}{44} & \frac{-3}{22} \\ \frac{5}{44} & \frac{7}{44} & \frac{-1}{22} \end{pmatrix}$$

Resumen

En este tema hemos presentado el concepto de determinante y su cálculo para matrices de cuadradas de cualquier orden.

Recuerda que aunque existen reglas para las matrices de orden 2 y 3 (Regla de Sarrus), la forma general es a través de una fila o una columna:

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}|A_{n1}|$$

En general, el cálculo de un determinante resulta bastante largo, por lo que es recomendable conocer bien sus propiedades para simplificar los cálculos.

Una de las aplicaciones de los determinantes es que gracias a ellos, podemos encontrar una fórmula general para el cálculo de la matriz inversa, que es aquella que al multiplicar por una matriz se obtiene la identidad,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj A)^t$$

Recuerda que únicamente es posible calcular la matriz inversa de las matrices cuadradas con determinante no nulo.