Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

MATRICES Y DETERMINANTES

DEFINICIÓN DE MATRIZ. TIPOS

Índice

Presentación

Introducimos en este tema el elemento clave del Álgebra lineal, el concepto de matriz.

Definiremos una matriz como una serie de elementos ordenados en filas y columnas. Según la dimensión de la matriz y los elementos que contiene, podemos clasificar las matrices en varios tipos.

Describiremos también sus operaciones más relevantes como la suma y resta de matrices, la multiplicación por un escalar, la multiplicación de matrices y la matriz traspuesta.

Matrices

Las matrices son elementos que nos permiten representar varios valores de manera conjunta mediante una tabla. Estas tablas de valores son además de gran ayuda para la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales, por lo que es importante conocer sus propiedades y operaciones.

Se llama **matriz** de *m* filas y *n* columnas al conjunto de *m•n* elementos ordenados en forma de tabla.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

● Fila
● Columna

Los elementos de la matriz se denotan como a_{ij} es el elemento de la fila *i* y de la columna *j* y se denominan **coeficientes** de la matriz. En este caso decimos que la matriz *A* tiene dimensión *mxn*.

Ejemplos:

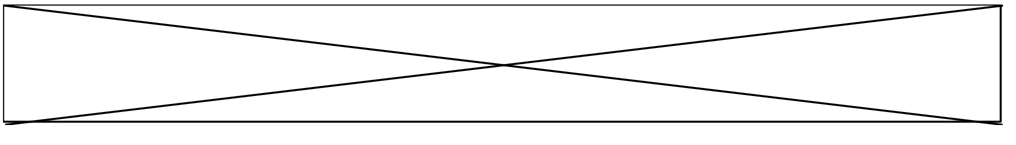
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & -9 \\ 3 & 8 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Si observamos las matrices *A*, *B*, *C* y *D*, vemos que estas tablas pueden tener distintos tamaños según el número de filas y columnas que tienen. En este caso la matriz *A* es *2x2*, la matriz B es *4X3*, ¿qué dimensiones tienen las matrices *C* y *D*?

La matriz C es de dimensión 1x3 y D es 4x4

Utilizando la notación de los coeficientes o elementos de la matrices, vemos que en la matriz *A* el elemento $a_{22}=-5$. Observa el resto de matrices y contesta:

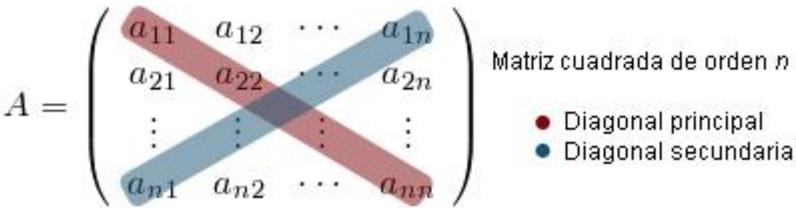
1. En la matriz B: ¿Qué valor tienen los elementos a_{21} y a_{42}? **$a_{21}=4$, $a_{42}=8$**
2. En la matriz D: ¿Qué valor tienen los elementos a_{34} y a_{44}? **$a_{34}=1$, $a_{44}=3$**



Tipos de matrices I

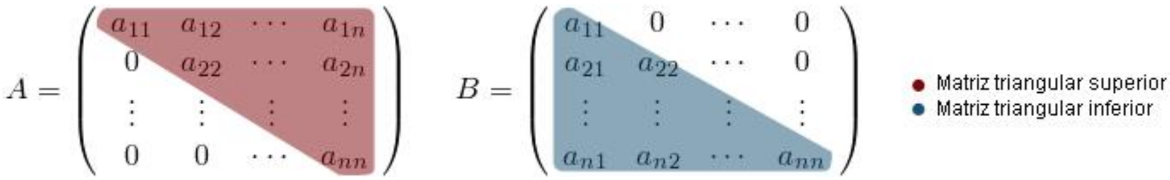
Veremos ahora algunas matrices que por su forma o por sus elementos reciben un nombre especial.

Las **matrices cuadradas** son aquellas que tienen igual número de filas que de columnas.



Se denomina **traza** de una matriz cuadrada a la suma de los elementos de la diagonal principal.

Las **matrices triangulares** son aquellas en las que los elementos que están por debajo (o por encima) de la diagonal principal son todos nulos.



La **matriz diagonal** es aquella matriz cuyos elementos los nulos excepto los de la diagonal principal.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tipos de matrices II

Otras matrices importantes son la **matriz nula** y la **matriz identidad**, pues son los elementos neutros respecto de la suma y la multiplicación de matrices.

La matriz nula tiene todos sus coeficientes cero y la matriz identidad es una matriz diagonal con elementos igual a 1.

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz nula — Matriz identidad

Observación: la matriz nula puede tener cualquier tamaño, sin embargo la matriz identidad debe ser cuadrada.

Matrices simétricas y antisimétricas

Una matriz cuadrada es simétrica cuando coinciden los elementos situados simétricamente respecto a la diagonal principal, y antisimétrica si los elementos situados simétricamente respecto a la diagonal principal son opuestos, (lo que implica que los elementos de la diagonal principal son todos nulos).

Ejemplo:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{pmatrix} \qquad AS = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -3 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz simétrica — Matriz antisimétrica

Suma de matrices

Las matrices son elementos matemáticos con los que podemos operar obteniendo nuevas matrices, sin embargo, como veremos, estas operaciones no cumplen las mismas propiedades que los números reales.

Suma y resta de matrices

Es posible sumar o restar dos matrices que tengan el mismo tamaño sin más que operar coeficiente a coeficiente.

O de forma más precisa: dadas dos matrices *A* y *B* de tamaño *mxn* con elementos a_{ij} y b_{ij}, la matriz *A+B* es una matriz de tamaño *mxn* cuyo elemento de la fila *i* y la columna *j* es $a_{ij}+bij$. Del mismo modo definimos la resta como la matriz *A-B* de tamaño *mxn* cuyo elemento de la fija de la fila *i* y la columna *j* es $a_{ij}-b_{ij}$.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 9 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{4} & 7 & -9 \\ 9 & 1 & \boxed{0} \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 2+2 \\ \rightarrow 3+(-3) \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 9 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \boxed{7} \\ -9 & -5 & 6 \\ -5 & 2 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow -1-(-8)=-1+8 \\ \\ \end{array}$$

Propiedades:

Si *A* y *B* son dos matrices de tamaño *mxn*, entonces se cumplen las siguientes propiedades relacionadas con la suma (y la resta de matrices).

1. Propiedad asociativa: *(A+B)+C=A+(B+C)*
2. Propiedad conmutativa: *A+B=B+A*
3. Elemento neutro de la suma: *A+O=O+A=A*
4. Elemento opuesto: sea *A* una matriz, existe una matriz *–A* tal que *A+(-A)=I*, donde *I* es la matriz identidad.

Multiplicación por un escalar

Otra operación importante de las matrices es la **multiplicación por un escalar**. En este caso, podemos operar números reales (escalares) con matrices, multiplicándolos. La operación se define de la siguiente manera:

Sea *A* una matriz de tamaño *mxn* y sea *k* un escalar, la multiplicación de *k* por la matriz *A*, es una matriz *kA* tal que todos los elementos de la matriz *A* quedan multiplicados por *k*.

Ejemplos:

$$3\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -3 \\ 0 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

Sea *a* y *b* dos números reales y *A* y *B* son matrices de tamaño *nxm*, entonces:

1. Propiedad distributiva respecto de la suma de escalares: *(a+b)A=aA+bA*
2. Propiedad distributiva respecto de la suma de matrices: *a(A+B)=aA+aB*
3. Propiedad asociativa: *(ab)A=a(bA)*
4. Existencia de elemento neutro: *1A=A*

Producto de matrices

La operación multiplicación de matrices no se realiza coeficiente a coeficiente sino que requiere de unas técnicas más especiales. Formalmente decimos que:

Dadas dos matrices *A* y *B* de tamaños *mxn* y *nxp* respectivamente definimos el producto de *A•B* como la matriz *C*, de tamaño *mxp*, de manera que el elemento c_{ij} de *C* es la suma del producto de los elementos de la fila *i* de *A* con los elementos de la columna *j* de *B*, tal que $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$

Ejemplo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}}_{3x2}\underbrace{\begin{pmatrix} g & h & i \\ j & k & l \end{pmatrix}}_{2x3} = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{ag+bj} & ah+bk & ai+bl \\ cg+dj & ch+dk & ci+dl \\ eg+fj & eh+fk & ei+fl \end{pmatrix}}_{3x3}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{8} & 11 & -3 & -4 \\ 14 & 20 & -1 & -10 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{1+2\cdot(-1)+3\cdot 3}$$

Propiedades:

Sean *A*, *B* y *C* tres matrices y *k* un número real. Entonces se cumple (siempre que se pueda multiplicar):

1. Propiedad asociativa: *A(BC)=(AB)C y k(AB)=(kA)B.*
2. Propiedades distributivas: *A(B+C)=AB+AC , (B+C)A=BA+CA.*
3. Elemento neutro *IA=AI=A*, donde *I* es la matriz identidad.

Atención, el producto de matrices no es conmutativo, es decir AB≠BA

Trasposición de matrices

Existe una operación especial de matrices que utilizaremos en muchas ocasiones llamada **trasposición de funciones**.

Dada una matriz A de orden mxn, definimos la matriz traspuesta como aquella matriz que obtenemos al intercambiar las filas de la matriz por sus columnas. La denotamos por A^t y tiene dimensión nxm.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -5 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 8 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

Sean A, B matrices y k un número, se tiene que:

1. $(A^t)^t=A$
2. $(A+B)^t=A^t+B^t$
3. $(kA)^t=kA^t$
4. $(A\ B)t=B^t\ A^t$
5. A es antisimétrica sí y sólo sí $A=-At$

Otros resultados relevantes

Además se cumple que:

- Si A es una matriz cuadrada, entonces $A+A^t$ y AA^t son matrices simétricas y A-A^t es antisimétrica.
- Toda matriz cuadrada de orden n se puede descomponer de forma única como la suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

Ejemplos

Repasaremos los distintos conceptos expuestos realizando los siguientes ejemplos. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizar, cuando sea posible, las siguientes operaciones:

- $(A+B)C$ Para calcular (A+B)C, calculamos en primer lugar (A+B) y el resultado lo multiplicamos por C.

$$(A+B) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 2 \\ 3 & 14 & 22 \end{pmatrix}$$

- $A - 3B$ $\quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -12 \\ -15 & -14 & -4 \end{pmatrix}$

- $-5A$ $\quad -5\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 5 & 0 \\ -15 & -5 & -10 \end{pmatrix}$

- $AB, AC, CA \; y \; BC$

  Las operaciones AB y CA no se pueden realizar.

$$AC = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 9 & -2 \\ 1 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

Resumen

Hemos definidos las matrices como una tabla de valores ordenados en filas y columnas cuyos elementos denotamos por *aij*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Según el orden de la matriz y la disposición de los elementos, podemos clasificar las matrices según diferentes tipos. Las matrices cuadradas tienen el mismo número de filas que de columnas. Dentro de este grupo, aquellas matrices que tienen todos los elementos que están por encima o por debajo de la diagonal principal cero, se denominan triangulares y las que únicamente tienen elementos no nulos en dicha diagonal se denominan matrices diagonales.

Se puede definir también la matriz nula como aquella que tiene todos sus valores cero y la identidad como la matriz diagonal con unos en la diagonal y cero en el resto.

Se pueden definir además algunas operaciones entre matrices como la suma y la resta que operan coeficiente con coeficiente. También es posible multiplicar un escalar (número) por una matriz, multiplicando a todos los elementos de la matriz por ese número. La multiplicación de matrices solo se puede realizar si el número de columnas de la primera coincide con el número de filas de la segunda. Y además no es conmutativa, es decir, $AB \neq BA$.

La traspuesta de una matriz se obtiene al cambiar sus filas por columnas y cumple una serie de relaciones importantes que permiten descomponer una matriz cuadrada en la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.