Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

DERIVADAS PARCIALES Y DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Índice

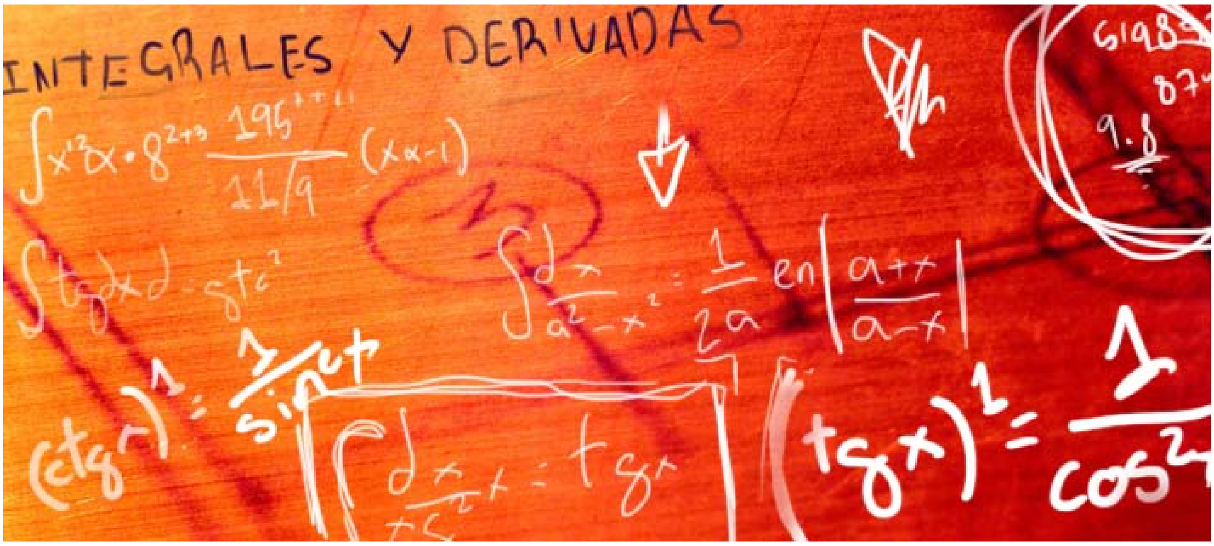
Presentación

En este tema generalizaremos el concepto de **derivada de una función de una variable al de varias variables**. Aparecerá el concepto de **derivada parcial** al considerar variaciones de cada variable por separado.

La **interpretación geométrica de la derivada** también la podemos generalizar para el caso de funciones de dos variables, **obteniendo el plano tangente a una superficie en un punto**.

El **concepto de gradiente** de una función nos indicará la dirección de mayor crecimiento, lo que será una herramienta muy útil para determinar en qué sentido debemos movernos para alcanzar más rápidamente un valor.

Por último calcularemos las **derivadas de orden superior de las funciones de varias variables**, practicando su cálculo mediante algunos ejemplos.



Introducción

Durante el S. XVII uno de los problemas que motivó el **desarrollo del cálculo diferencial de funciones de una variable** fue cómo medir la variación que se producía en la variable dependiente (*y*) según las distintas variaciones de la variable *x*. La derivada de una función nos permite conocer cómo cambia la función y si éste cambio se produce lenta o rápidamente.

Para definir la derivada de una función en un punto es necesario considerar el **incremento** que se produce **entre dos puntos** de la función relativos a la distancia que hay entre esos puntos.

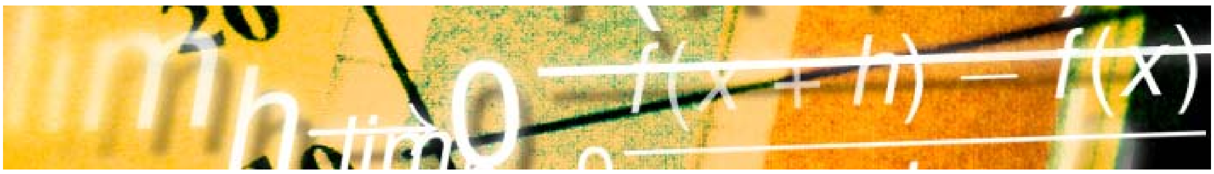
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Si lo que queremos medir es el cambio instantáneo, es decir, en un solo punto, tenemos que recurrir al **concepto de límite**, por lo que podemos definir la derivada de una función en un punto como:

$$lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Cuando en lugar de funciones de una variable lo que tenemos son funciones de varias y queremos conocer cómo varía *z* en función de las variaciones de *x* e *y*, parece lógico estudiar la variación de cada variable por separado cuando la otra permanece constante. Estos cálculos se denominan **derivadas parciales** de la función.

Antes de presentar el cálculo de las derivadas parciales de las funciones de varias variables, esbozaremos los conceptos de límite y continuidad para el caso de funciones de varias variables.



Límites y continuidad de varias variables

Exponemos a continuación, de modo informal, los conceptos de **continuidad** y de **límites de funciones de varias variables**, que al igual que en el caso de funciones de una variable, están relacionadas con el concepto de derivada.

La definición y los resultados básicos del límite y de la continuidad de funciones de varias variables son los **mismos que para funciones de una variable**. Intuitivamente, una función de dos variables *f(x,y)* tiene por límite *L* en el punto cuando *(x,y)* tiende a (x_0,y_0) si al aproximarnos al punto (x_0,y_0) a partir de *(x,y)*, los valores de *f(x,y)* se aproximan a *L*.

La **diferencia esencial** entre el concepto de límite en una variable y en dos (o varias) está en la **manera de aproximarnos al punto**. Cuando consideramos funciones de una variable la manera de acercarnos al punto x_0 es únicamente en una dirección, (solamente podemos diferenciar si nos acercamos por la derecha o por la izquierda), de manera que si los límites laterales existen y son iguales, entonces existe el límite.

Sin embargo en el caso de funciones de dos variables, cuando nos aproximamos a (x_0,y_0) lo podemos hacer desde cualquier dirección en un plano. Si existe el límite tiene que coincidir con el límite al aproximarse al punto a lo largo de cualquier recta que pase por dicho punto. Esta condición es necesaria pero no suficiente. Es decir, si existen y son iguales los límites de la función al aproximarnos mediante rectas a dicho punto, no es condición suficiente para que exista el límite. En este caso, tendremos que utilizar una definición más estricta del límite, que aquí no mencionaremos.

Una vez conocida su existencia, el cálculo a partir de la definición resulta muy trabajoso, por lo que resultaría útil algunas reglas para poder calcularlo, sin embargo **no existe**, por ejemplo, **un análogo a la regla de L`Hopital para el caso de varias variables.**

Para el estudio de la continuidad de una función en un punto podemos utilizar una definición análoga a la de funciones de una variable. De modo que una función *f(x,y)* es continua en el punto (x_0,y_0) si se cumple que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

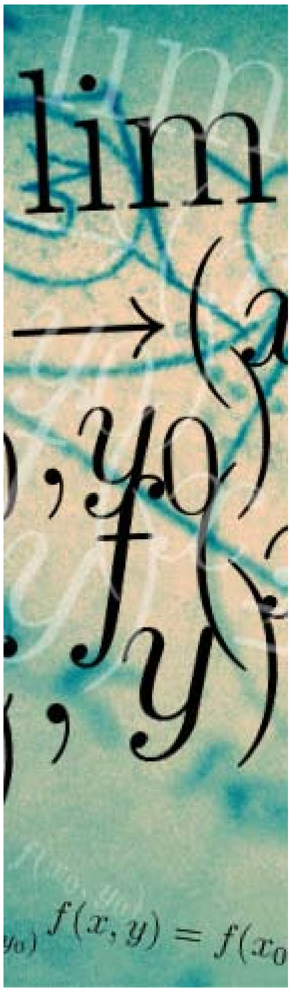
En detalle **Límites y continuidad**

En detalle

Límites y continuidad

Otra diferencia importante entre las funciones de una y las de varias variables, es que en éste último caso, la existencia de derivadas parciales no implica la continuidad de la función.

Derivadas parciales



Hemos recordado al comienzo del tema el concepto de derivada de una función de una variable. Al igual que para éstas funciones, la derivada de la función de varias variables representa la razón de cambio de *f*, y nos podemos preguntar cómo varia la función al aumentar una de las variables cuando las demás permanecen constantes. A estas razones de cambio se las denomina **derivadas parciales** de *f* y las denotamos por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots$$

y decimos: "derivada parcial de *f* respecto a la variable *x*, o a la variable *y* o a la variable *z*".

O bien, de forma más simple mediante f_x, f_y, f_z, etc.

La definición de estas derivadas parciales son similares a la de las funciones de una variable, de modo que se llama **derivada parcial de *f* respecto de *x*** en el punto (x_0, y_0), al límite (si existe)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Al igual que para funciones de una variable **es posible calcular las derivadas parciales utilizando las reglas para derivar**, de modo que al calcular cada derivada parcial respecto a una variable debemos considerar el resto constantes.

Ejemplo **Cálculo de derivadas parciales**

Ejemplo

Cálculo de derivadas parciales

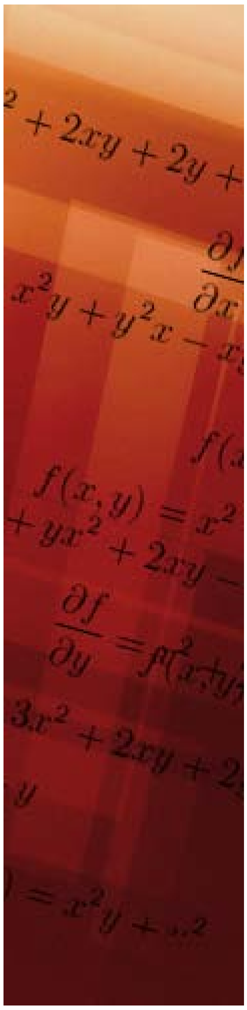
Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$, una función. Calcular sus derivadas parciales.

Solución:

- Derivada parcial respecto de *x*: $f_x=2x$
- Derivada parcial respecto de *y*: $f_y=2y$

Ejemplos

Ejemplo 1



Calcularemos, ahora, las derivadas parciales de las siguientes funciones. Recuerda que para calcular la derivada parcial respecto de una variable, debemos **considerar la otra constante**:

1. $f(x,y) = x^2 + xy \qquad \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x$
2. $f(x,y) = x^2y + y^2x - xy + y$

   $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 - y \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy - x + 1$
3. $f(x,y) = x^3 + yx^2 + 2xy - y + x$

   $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + 2y + 1 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2x - 1$

Ejemplo 2

Si recordamos el ejemplo de la fábrica de cochecitos mini y maxi, teníamos una función de coste que venía dada por la función *C(x,y)=10000+10x+30y*.

En dicho ejemplo, veíamos cómo los coeficientes de las variables son los costes marginales.

En efecto, si calculamos las derivadas parciales de esta función.

Coste marginal de los cochecitos mini: *Cx=10*

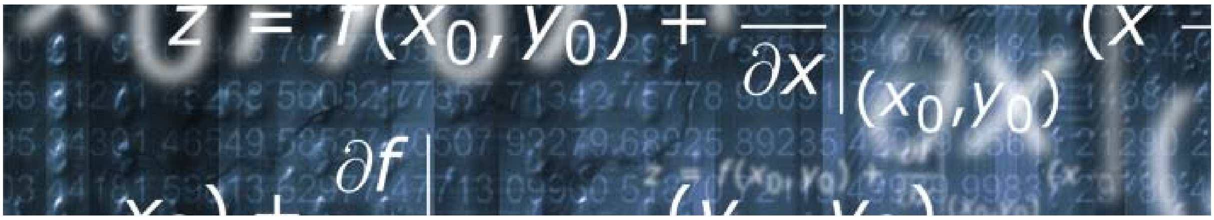
Coste marginal de los cochecitos maxi: *Cy=30*

Interpretación geométrica de la derivada

La interpretación geométrica de la derivada de una función de una variable como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto dado, es fácilmente generalizable al caso de funciones de dos variables, en el que consideraremos el plano tangente a una superficie en un punto.

Podemos calcular el **plano tangente** a una superficie *f(x,y)* en un punto (x_0,y_0) mediante la ecuación:

$$z = f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} (y - y_0)$$



Ejemplo:

Calcular el plano tangente a la superficie dada por la función $f(x,y)=x^2+y^2$ en el punto *(1,1)*.

Ejercicio **Solución**

Ejercicio

Solución

Consideramos $z=x^2+y^2$. Ahora como las derivadas parciales respecto de cada variable son $f_x=2x$ y $f_y=2y$, tenemos que el plano pedido es:

$$z = f(1,1) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} (x - 1) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} (y - 1)$$

$$z = 2 + 2(x-1) + 2(y-1)$$

Observación:

El plano tangente contiene a todas las rectas tangentes a las curvas contenidas en la superficie $z=f(x,y)$ que pasan por el punto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

Vector Gradiente

En un mapa meteorológico **podemos expresar la función temperatura respecto a las distancias**. Las **curvas de nivel** relacionan las ciudades que tienen la misma temperatura, se denominan **isotermas**.

Además, como ya hemos visto, las derivadas parciales nos dan la razón de cambio de la función cuando varía alguna de las variables permaneciendo constantes las demás, por lo que podemos calcular cómo cambia la temperatura si nos movemos hacia el este (variable *x*) o al norte (variable *y*). Pero, ¿cómo podemos saber el cambio que experimenta la temperatura si nos movemos hacia otra dirección?

Para resolver esta pregunta tenemos las **derivadas direccionales** que calculan la razón de cambio de las funciones en cualquier dirección.

Vector Gradiente

Si f es una función de dos variables x e y, entonces el **gradiente** es la función vectorial definida por:

$$\nabla f(x,y) = \left(f_x(x,y), f_y(x,y) \right)$$

Ejemplo:

Calcular el vector gradiente de la función $f(x,y)=e^{xy}$.

Solución

Calculamos las derivadas parciales: $f_x(x,y)=ye^{xy}$ $f_y(x,y)=xe^{xy}$

Por lo tanto el **vector gradiente** es:

$$\nabla f(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

En detalle [En detalle]

En detalle

La importancia del vector gradiente

Nos podemos preguntar en cuál de todas las posibles direcciones la función cambia más rápido y cuál es la máxima razón de cambio.

Las respuestas a estas preguntas están, por lo tanto, en el gradiente, ya que es el vector gradiente el que nos proporciona la dirección de mayor incremento de *f*, y el máximo cambio se da en el módulo de dicho vector. Además el vector gradiente es perpendicular a la curva de nivel que pasa por el punto *(x,y)*.

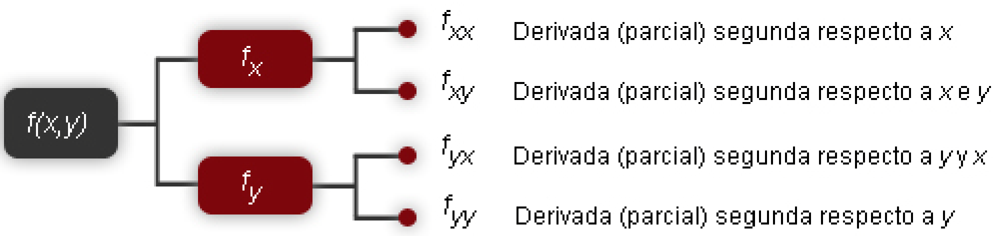
Por lo tanto, a través del gradiente, es posible calcular, por ejemplo, la curva de máximo ascenso en una montaña.

Derivadas de orden superior

De la misma manera que en el caso de las funciones de una variable **es posible calcular las derivadas sucesivas, para el caso de dos variables** (y en general de *n* variables), podemos extender el concepto de derivada de orden superior.

Si nos centramos en el caso de funciones de dos variables, podemos calcular las derivadas de segundo orden.

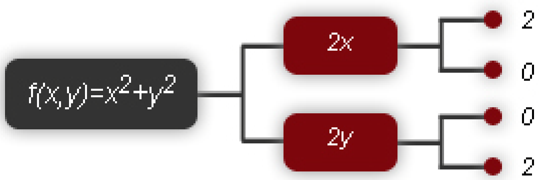
Sea $f(x,y)$ una función definida en un conjunto de R^2 y supongamos que existen las primeras derivadas parciales f_x y f_y, **las derivadas de segundo orden serán las cuatro derivadas siguientes**:



A las segundas derivadas respecto a *x* e *y*, y respecto a *y* y *x*, las llamamos **derivadas cruzadas** de la función. Bajo hipótesis muy generales que cumplen la gran mayoría de funciones, estás derivadas coinciden, por lo que no importará el orden de derivación.

Ejemplo

Calculamos las derivadas de segundo orden de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ a partir de las derivadas parciales calculadas en la sección anterior:



Ejemplos

Para repasar este concepto realizaremos los siguientes ejemplos del **cálculo de derivadas sucesivas de funciones de varias variables.**

Observa cómo se escriben las derivadas parciales de segundo orden utilizando la otra notación:

1. $f(x,y) = x^2 + xy$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x + y \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

2. $f(x,y) = x^2 y + y^2 x - xy + y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 - y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy - x + 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 2y - 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

3. $f(x,y) = x^3 + yx^2 + 2xy - y + x$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2xy + 2y + 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2x - 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Resumen

En el **estudio de una función** es importante **conocer cómo varía la función y si ésta variación es lenta o rápida**. De la misma manera que ocurre en las funciones de una variable, es posible definir la derivada de una función de varias variables y esta definición se basa, también, en un límite que mide la variación instantánea de la función en un punto.

En el caso de funciones de varias variables calculamos las derivadas parciales respecto de cada variable cuando el resto permanecen constantes.

La interpretación geométrica de la derivada de una función de dos variables nos permite calcular el plano tangente a la superficie en dicho punto, mediante el cálculo de las derivadas parciales.

Se ha presentado también, el **concepto de gradiente de una función** como el vector que indica la dirección de máximo crecimiento.

Por último hemos visto cómo calcular las derivadas de orden superior para funciones de dos variables, de modo que para cada función obtenemos dos derivadas parciales y cuatro derivadas parciales de segundo orden.

Recuerda que **las derivadas cruzadas de las funciones de varias variables suelen**, en muchos de los casos, **coincidir**.