Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

CONTINUIDAD Y DERIVADA

ESTUDIO DE LA CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Índice

Presentación

En este tema estudiaremos el concepto de continuidad de una función.
De forma intuitiva podemos decir que una función es continua si podemos dibujar su gráfica sin tener que levantar el lápiz del papel.

La continuidad de las funciones se estudia en cada punto, de manera que diremos que una función es continua si lo es en todos sus puntos.

Cuando una función no es continua en un punto, diremos que presenta una discontinuidad y las clasificaremos según sus características.

Por último, presentaremos algunos teoremas importantes relacionados con la continuidad de funciones.

Continuidad en un punto

Decimos que una **función es continua en un punto *a*** si se cumplen las siguientes condiciones:

- Existe: $f(a)$
- Existe el límite:
  $$\lim_{x \to a} f(x)$$
- Se cumple que:
  $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Veamos que implica cada punto de la definición:

- Existe: $f(a)$

Que exista la función en el punto implica que dicho punto pertenece al dominio de la función, o lo que es lo mismo, que la función está definida en el punto *a*. Esto nos permite dibujar la función en dicho punto.

- Existe el límite:
  $$\lim_{x \to a} f(x)$$

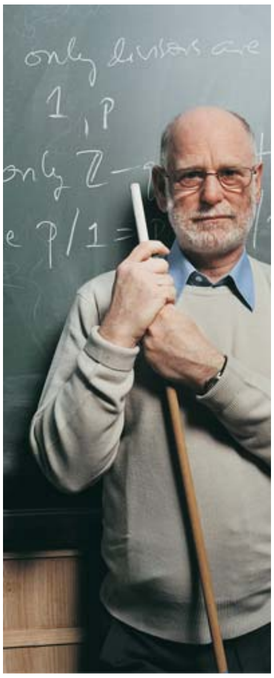
Para que exista el límite de una función en un punto, deben existir los límites laterales y ser iguales.
La existencia de cada límite lateral implica que al acercarnos todo lo que queramos al punto *a*, la función se aproxima al mismo punto por la derecha y por la izquierda.

- Se cumple que:
  $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Esta última condición nos dice que el valor que tiene la función en ese punto y el valor que toma al acercarnos a *a* es el mismo, por lo que la función "se pega" bien en ese punto y se consigue así, la continuidad.

Para poder decir que la función f es continua en *a* es necesario que se cumplan las tres condiciones anteriores.

Estudio de la continuidad en un punto a partir de un ejemplo



Ejemplo 1: Estudiar la continuidad de la función siguiente en el punto $x=3$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2}$$

En primer lugar, calcularemos el dominio de la función, pues es necesario saber en qué puntos está definida la función. Como es una función racional, sabemos que el dominio será todos los **números reales excepto aquellos que anulan el denominador**, por lo tanto,

$$Dom f = \mathbf{R} - \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

Para estudiar la continuidad tenemos que ver si se cumplen las **tres condiciones**.

Tres condiciones

Condiciones de continuidad

Existe $f(3) = \frac{4}{7}$

Para ver si existe el:

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{x+1}{x^2-2} = \frac{4}{7} \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{x+1}{x^2-2} = \frac{4}{7}$$

Como existen y son iguales, se puede decir que existe el:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{4}{7}$$

Se cumple que:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$$

Ya que lo que hemos obtenido en la primera condición coincide con el valor obtenido en la segunda.

Ejercicio Solución

Solución

Por lo tanto, la función:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2}$$

Es continua en: $x = 3$

Ejemplo 2: Estudiar la continuidad de la función siguiente en el punto $x = 1$

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$$

Ejercicio Solución

Solución

En primer lugar, calcularemos el dominio de la función, pues es necesario saber en qué puntos está definida la función.

$Dom f = \mathbf{R} - \{1, -1\}$

Para estudiar la continuidad tenemos que ver si se cumplen las tres condiciones:

No existe $f(1)$ ya que el punto $x = 1$ no está en el dominio.

Por lo tanto, la función

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$$

No es continua en $x = 1$

Discontinuidades

Si una función **no es continua** en un punto se dice que presenta una **discontinuidad**.

Las discontinuidades pueden clasificarse en:

- **Discontinuidad evitable**. Si existe el límite de la función en el punto *a* pero no coincide con $f(a)$, bien porque no existe la función en ese punto o bien porque son distintas.
- **Discontinuidad de salto finito**. Si existe la función en el punto y los límites laterales pero estos no son iguales.
- **Discontinuidad de salto infinito**. Si no existe alguno (o ninguno) de los límites laterales.

Ejemplo: Estudia la continuidad de la función en el punto indicado y clasifica la discontinuidad.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} \quad en \quad x=1$$

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} \quad en \quad x=-2$$

Evitable

El nombre de evitable proviene del hecho que se pueda solventar la discontinuidad redefiniendo la función en ese punto.

Ejercicio Solución en *x=1*

Solución en *x=1*

No existe $f(1)$, ya que no pertenece al dominio.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x-1} = \{0/0\} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} x+1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} = \{0/0\} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} x+1 = 2$$

Por lo tanto existe el límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x-1} = 2$$

En $x = 1$ hay una discontinuidad evitable.

Ejercicio Solución en *x= -2*

Solución En *x= -2*

No existe $f(-2)$, ya que no pertenece al dominio.

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x-2}{x^2-4} = \{0/0\} = \lim_{x\to -2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2} = \infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x-2}{x^2-4} = \{0/0\} = \lim_{x\to -2^-} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$$

Por lo tanto no existe el límite:

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x-2}{x^2-4}$$

En $x = -2$ hay una discontinuidad de salto infinito.

Continuidad de las funciones definidas a trozos

Las **funciones definidas a trozos** tienen diferentes expresiones según los distintos valores de *x*. Este tipo de funciones suelen tener problemas de continuidad en los puntos de cambio de expresión ya que, para que sean continuas en dichos puntos, las gráficas de cada trozo se tienen que "pegar bien".

Ejemplo 1: Estudiar la continuidad de la función en el punto $x=3$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & x < 3 \\ x - 4 & x \geq 3 \end{cases}$$

Solución:

En primer lugar calculamos el dominio de la función.

$Dom f = \mathbf{R}$, ya que cada expresión es un polinomio.

Para estudiar la continuidad de la función seguimos **varios pasos**.

Ejemplo 2: Estudiar la continuidad de la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & x < 0 \\ \frac{x+4}{x-2} & 0 \leq x < 4 \\ x^2 - x - 8 & x \geq 4 \end{cases}$$

Varios Pasos

Pasos para calcular la continuidad

Existe $f(3) = -1$

Límites laterales:

$$\lim_{x\to 3^+} x - 4 = -1 \qquad \lim_{x\to 3^-} x^2 + x - 2 = 10$$

Los límites laterales existen pero son distintos, por lo tanto la función es discontinua en $x=3$ y presenta una **discontinuidad de salto finito**.

Ejercicio Solución en *x=0*

Solución en $x=0$

$Dom f = \mathbf{R} - \{2\}$

En $x=0$

$f(0) = -2$

Para calcular el

$\lim_{x\to 0} f(x)$

$$\lim_{x\to 0^-} x+4 = 4 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x+4}{x-2} = -2$$

Discontinuidad de salto finito en $x=0$

Ejercicio Solución en *x=2*

Solución en $x=2$

En $x=2$

No existe

$f(2)$

Para calcular el

$\lim_{x\to 2} f(x)$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+4}{x-2} = \infty \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x+4}{x-2} = -\infty$$

Discontinuidad de salto infinito

Ejercicio Solución en *x=4*

Solución en $x=4$

En $x=4$

$f(4)=4$

Para calcular el

$$\lim_{x \to 4} f(x)$$

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{x+4}{x-2} = 4 \qquad \lim_{x \to 4^+} x^2 - x - 8 = 4$$

$$f(4) = lim_{x \to 4} f(x)$$

Continua en $x=4$

Propiedades de las funciones continuas

Estudiar la continuidad de una función puede facilitarse si conocemos sus propiedades.

Propiedades

Sean f y g funciones continuas en $x=a$:

- La función $f(x)+g(x)$ es continua en $x=a$.
- La función $f(x)-g(x)$ es continua en $x=a$.
- La función $f(x)\cdot g(x)$ es continua en $x=a$.
- La función $\frac{f(x)}{g(x)}$ es continua en $x=a$ si $g(a)\neq 0$.
- La función fog es continua en $x=a$, siempre que g sea continua en f.

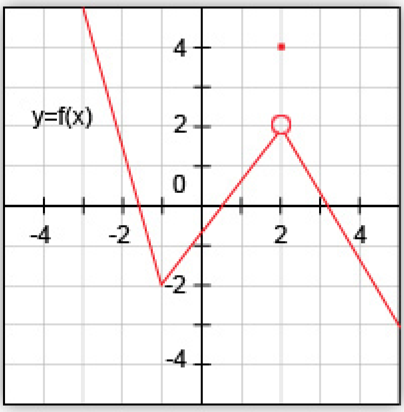
Observación

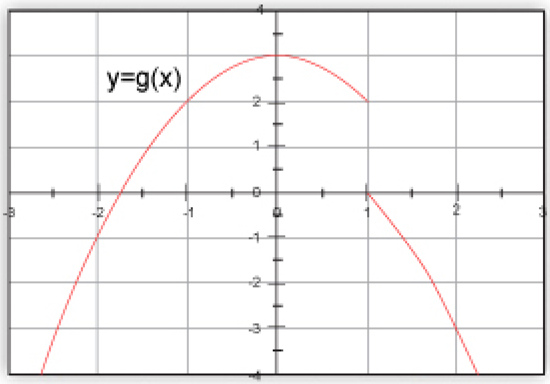
Las funciones lineales, polinómicas, racionales, raíces, exponenciales y logarítmicas son continuas en todos los puntos de su dominio.

Es importante calcular el dominio de una función antes de comenzar cualquier estudio. Los puntos que no están en el dominio serán discontinuidades de la función.

Ejemplos

Observar las siguientes gráficas de funciones y clasificar las discontinuidades:





Para ello, hay que responder a estas preguntas:

- ¿Es continua la función *f(x)* en todo su dominio?
- ¿En qué punto existe una discontinuidad?
- ¿De qué tipo?

Ejercicio Solución

Solución

La función *f (x)* es continua excepto en el punto *x=2*, en el que presenta una discontinuidad evitable, ya que existen los límites laterales de la función en el punto pero no coinciden con *f(2)*.

Observa ahora la gráfica de la función *g(x)* ¿qué ocurre en *x=1*?

Ejercicio Solución

Solución

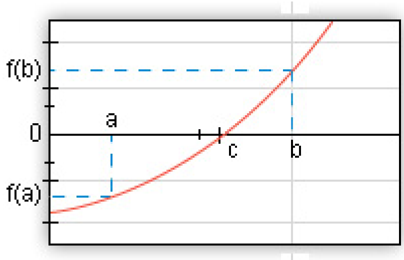
En *x=1*, existe una discontinuidad de salto finito ya que los límites laterales existen pero son distintos, por la derecha de *1* la función tiende a *0*, pero por la izquierda tiende a *2*.

Teoremas sobre funciones continuas

Existen algunos resultados importantes relacionados con la continuidad de funciones que resulta interesante conocer. Los más importantes son el Teorema de Bolzano y el Teorema del Valor intermedio.

Teorema de Bolzano

Toda función continua en un intervalo a,b], tal que f(a) · f(b) < 0 tiene, al menos, un punto c del intervalo en el que f(c*)=0*.



Este teorema dice que si una función es continua en un intervalo cerrado y en los extremos del intervalo toma valores con signo contrario (uno positivo y otro negativo), entonces, en al menos un punto del intervalo, cortará al eje *ox*.

Gracias al Teorema de Bolzano podemos acotar las raíces de una función en un intervalo.

Teorema del valor intermedio

Sea una función *f* continua en un intervalo *[a,b]*, y consideremos *K* tal que *f(a)*, entonces existe, al menos, un punto *c* del intervalo en el que *f(c)=K*.

El teorema del valor intermedio afirma que una función continua en un intervalo toma todos los valores intermedios entre los valores *f(a) y f(b)*.

Ejemplos de aplicación

1. Demostrar que el polinomio $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$ **tiene, al menos una raíz en el intervalo *[1,2]*.**

Solución:

Para poder aplicar el **Teorema de Bolzano**, debemos ver si se cumplen las **condiciones**:

a) La función es continua en el intervalo.

En nuestro caso como la función es un polinomio, es continua en todo su dominio, y por lo tanto, lo es en el intervalo *[1,2]*.

b) La función toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo.

El intervalo es:*[1,2]*, como f(1)=4-6+3-2=-1< 0 y f(2)=12>0, se cumple que f(1)f(2)<0

Por lo tanto, por el teorema de Bolzano, podemos afirmar que **existe**, al menos **un valor *c* en el intervalo *[1,2]***, **tal que *f(c)=0***.

2. Demostrar, utilizando el teorema adecuado, que el polinomio $P(x) = 2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$ **tiene, al menos, una raíz en el intervalo *[-10,0]*, y otra en *[0,1]*. ¿Podrías dar otro intervalo donde hay otra raíz?**

Solución:

Para demostrar la existencia de raíces utilizamos el Teorema de Bolzano. Siguiendo el procedimiento anterior, tenemos que ver, en primer lugar, que se cumplen las condiciones de aplicación del teorema. En este caso, al tratarse de un polinomio la función es continua en esos intervalos. Calculamos el valor de la función en los extremos:

f(-10)> 0   f(0)<0   f(1)>0

Como f(-10)f(0)<0 y como f(0)f(1)<0 por el Teorema de Bolzano, existe, al menos, **una raíz de la función en dichos intervalos**.

Para dar otro intervalo en el que existan raíces, deberás buscar uno en el que cambie el signo de la función al sustituir en sus extremos.

Resumen

En este tema hemos visto el estudio de la continuidad de una función a partir del estudio de la continuidad de la función en un punto.

En el caso de no cumplir alguna de las condiciones de continuidad, encontraremos una discontinuidad que podemos clasificar en evitable, de salto finito y de salto infinito.

Además, hemos visto que las funciones definidas a trozos pueden presentar problemas de continuidad en los puntos de ''enganche" de las expresiones.

Existen importantes teoremas relacionados con la continuidad de las funciones como el Teorema de Bolzano o el del valor intermedio que nos permiten, por ejemplo, demostrar la existencia de las raíces de las funciones.