Universidad
Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE

LÍMITE DE FUNCIONES: CÁLCULO DE INDETERMINACIONES

Índice

Presentación

La idea de límite de una función está relacionada con el lugar hacia el que se acerca la función cuando se hace una aproximación a un punto dado.

En algunos casos, al calcular el límite de una función en un punto (o en el infinito) aparecen expresiones que involucran el *0* o el ∞, cuyo resultado depende de la función que se esté analizando. Este tipo de expresiones se denominan indeterminaciones.

Este tema lo dedicaremos a la resolución de los distintos casos de interminaciones, aprendiendo técnicas que ayuden a determinarlos.

Indeterminaciones

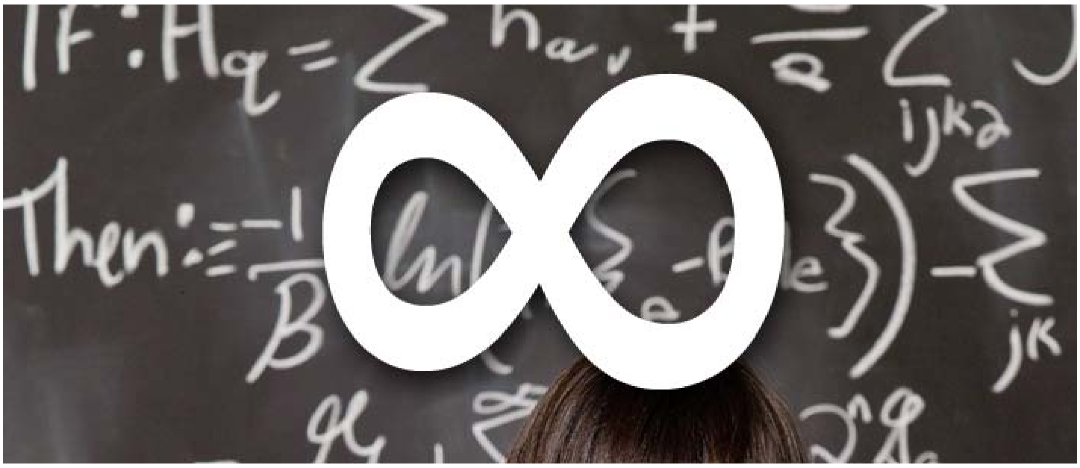
Cuando al sustituir en el límite de una función se obtiene alguna de las siguientes expresiones:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty-\infty \quad 0\cdot\infty \quad 1^{\infty}$$

Se dice que existe una **indeterminación**. Este nombre viene del hecho de que su resultado no está determinado, es decir, cambia según la función que se esté considerando.

Para resolver estos casos se pueden aplicar una serie de técnicas que permiten evitar estas indeterminaciones.

En las siguientes secciones se verá cómo afrontar cada caso de indeterminación, para llegar a un resultado concreto.



Caso 1: Indeterminación {0/0}

Si al calcular un límite de un cociente de polinomios, se obtiene una indeterminación del tipo *{0/0}*, se deben **factorizar ambos polinomios y simplificar las expresiones obtenidas**.

Si se calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \left\{ \frac{0}{0} \right\}$$

Se factoriza utilizando, por ejemplo, la **regla de Ruffini** ambos polinomios, obteniendo que:

$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ y $x^4 - 4x + 3 = (x-1)^2(x^2+2x+3)$

Al **sustituir en el límite y simplificar**, se obtiene:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3}$$

Ahora, se ha conseguido **eliminar la indeterminación**, de forma que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$ por lo tanto: $$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo

Cálculo de límites

Ejemplo

Cálculo de límites

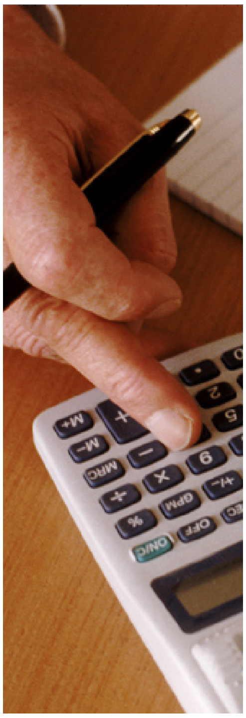
Hay que calcular los siguientes **límites**:

- $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$ = $\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+3)} = 4/5$
- $\lim_{x \to -1} \frac{11x + 6x^2 + x^3 + 6}{3x + x^2 + 2}$ = $\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+2)} = 2$

Caso 2: Indeterminación {∞ / ∞}

Si se tiene un cociente de polinomios cuyo límite es ∞, se puede resolver la indeterminación dividiendo cada término del numerador y denominador por la *x* de mayor grado y simplificando.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^4}-\frac{3x}{x^4}+\frac{2}{x^4}}{\frac{x^4}{x^4}-\frac{4x}{x^4}+\frac{3}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}}{1-\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^4}} = \frac{0}{1} = 0$$



También se pueden resolver este tipo de indeterminaciones **comparando los límites del numerador y denominador**:

- Si el polinomio del numerador tiene **mayor grado** que el denominador: el cociente tiende a **infinito**.
- Si el polinomio del numerador tiene **menor grado** que el denominador: el cociente tiende a **cero**.
- Si ambos polinomios tienen el **mismo grado**: el valor del límite **depende de los coeficientes de los términos de mayor grado**.

Ejemplos:

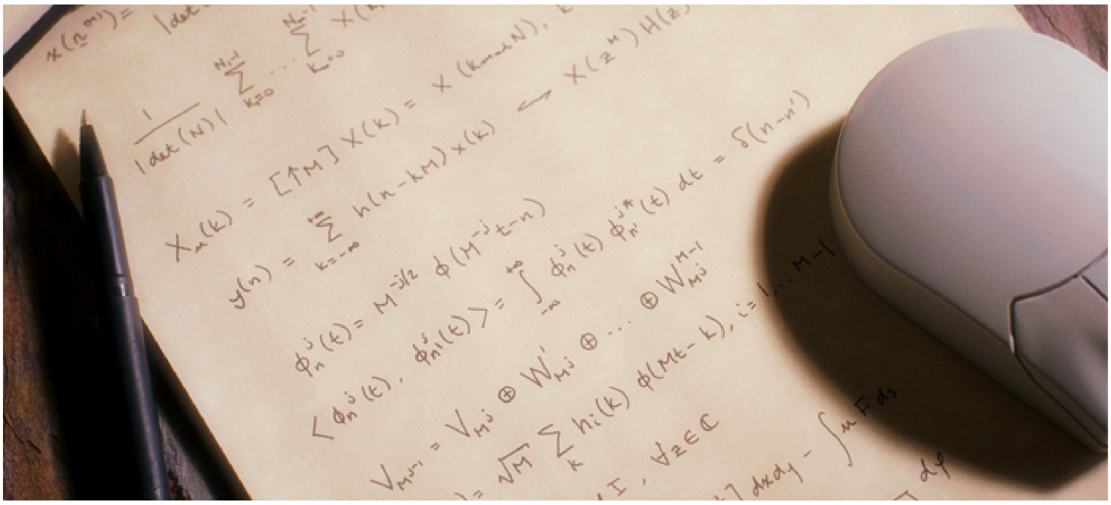
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x-3x}{x^2+5x-9} = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x^2+x+1}{x^2+5x-9} = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x}{3x^2+5x-9} = \frac{1}{3}$

Caso 3: Indeterminación {∞ - ∞}

Cuando se obtiene una indeterminación como **diferencia de infinitos** se pueden realizar las siguientes operaciones:

- Si se presenta como diferencia de raíces, se multiplica y divide por el **conjugado**[1]**.**
- En caso contrario, se opera para intentar transformarla en una indeterminación del tipo *{∞ / ∞}* o *{0/0}*, y se aplican las técnicas de dichas indeterminaciones.

[1] Conjugado: Dado un binomio *(a+b)* se le llama conjugado al binomio con el signo contrario *(a-b)*.



[Ejemplo 1](#) [Ejemplo 2](#)

Ejemplo

Ejemplo 1:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+5x-2}-\sqrt{x^2-3x}) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+5x-2}-\sqrt{x^2-3x})(\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2-3x})}{\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2-3x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+5x-2})^2-(\sqrt{x^2-3x})^2}{\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2-3x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+5x-2)-(x^2-3x)}{\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2-3x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{8x-2}{\sqrt{x^2+5x-2}+\sqrt{x^2-3x}} = \{\infty-\infty\} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{8\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+5x-2}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-3x}{x^2}}} = \frac{8}{2} = 4$$

Comentario: El uso del conjugado nos permite, mediante uno de los productos notables *(a-b)(a+b)=a^2-b^2*, eliminar las raíces.

Ejemplo

Ejemplo 2:

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{3}{x+1}-\frac{12}{x^2+6x+5}\right) =$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{3(x+5)-12}{(x+1)(x+5)} = \lim_{x\to-1}\frac{3x+3}{(x+1)(x+5)} =$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{3(x+1}{(x+1)(x+5)} = \lim_{x\to-1}\frac{3}{x+5} = \frac{3}{4}$$

Comentario: Se debe tener en cuenta que para poder operar las funciones racionales hay que calcular un denominador común.

Caso 4: Indeterminación {0 · ∞}

Cuando se tienen indeterminaciones de este tipo se operará para transformar en una indeterminación del tipo *{∞ / ∞}* o *{0/0}*. En muchas ocasiones, esto se conseguirá simplemente realizando las operaciones que indica el límite.

Una operación que puede ayudar a conseguir esta transformación es:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$$

a)

$$\lim_{x\to\infty}(x+3)\sqrt{\frac{1}{9x^2+2}} = \{\infty\cdot 0\} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{(x+3)^2}{9x^2+2}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+2}\cdot(3x-1) = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{3x^2-x}{x^2+2}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = 3$$

Caso 5: Indeterminación {1∞}

La indeterminación del tipo *{1∞}* se resuelve mediante el número *e*, que se define mediante el siguiente límite:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Si hay que calcular $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^{g(x)}$ donde $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$

Se puede utilizar esta definición para resolver, de forma sencilla, este caso de indeterminación:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x))^{g(x)} = \{1^\infty\} \qquad \lim_{x\to\infty}(f(x))^{g(x)} = e^L$$

donde

$$L = \lim_{x\to\infty}[(f(x)-1)g(x)]$$

A continuación se pueden observar dos enlaces que hacen referencia a un mismo ejemplo:

Ejemplo [Límite {1∞}](#)

Ejemplo [Indeterminación {1∞}](#)

Ejemplo

Límite {1∞}

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+6}\right)^{x^5+1}$$

Por un lado se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+6}\right)=1$$

...al ser un cociente de polinomios con el mismo grado. Y por otro:

$$\lim_{x\to\infty} x^5+1=\infty$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+6}\right)^{x^5+1}=1^{\infty}$$

Ejemplo

Indeterminación {1∞}

Utilizando la fórmula anterior se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+6}\right)^{x^5+1}=e^{L}$$

donde:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+6}-1\right)(x^5+1)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-9}{x+6}(x^5+1)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-9(x^5+1)}{x+6}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=-\infty$$

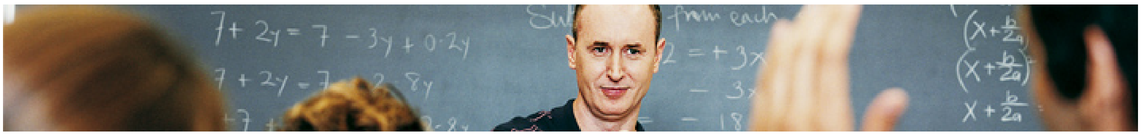
Al sustituir, se halla el resultado del límite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+6}\right)^{x^5+1}=e^{-\infty}=0$$

Ejercicios

Para repasar las técnicas aprendidas se proponen los siguientes ejercicios:

- $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x+9}{(x+3)}=\dfrac{9}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9(x^2+5)}$
  $= \lim\limits_{x\to 2} 3+\sqrt{x^2+5}=6$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+x-2}{4x^3-1} = 0$
- $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x-3}-\sqrt{x^2+4}) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-7}{\sqrt{x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+4}}=1$
- $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2}{x^2-2x}-\dfrac{x}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-(x-2)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-1}{x}=\dfrac{-1}{2}$



Ejemplos

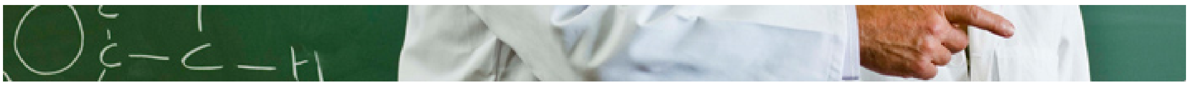
Para repasar los conceptos aprendidos en este tema se pueden repasar los siguientes ejemplos:

- $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$ = $\left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}-3)} =$ $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+5-9}{(x^2-2x)(\sqrt{x^2+5}+3)} =$ $\lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = 4/12 = 1/3$

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{-x^3+x^2-2x+1}{x^2-1}$ = $-\infty$

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^4+3x^3-2x^2-11}{x^4-x}$ = 2

- $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x-2}{x+9}\right)^x$ = $\{1^\infty\} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-2}{x+9}\right)^x = e^L = L = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-2}{x+9} - 1\right) x =$ $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{-11x}{x+9}\right) = -11 = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-2}{x+9}\right)^x = e^{-11}$



Resumen

En este tema se han visto los distintos tipos de indeterminación que aparecen en el cálculo de los límites de funciones y los métodos que ayudarán a resolverlos.
Hay que recordar que las indeterminaciones más importantes son:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad 1^{\infty}$$

Es necesario conocer las distintas técnicas de cálculo que ayudan a resolver dichas indeterminaciones.