Universidad Europea de Madrid

LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

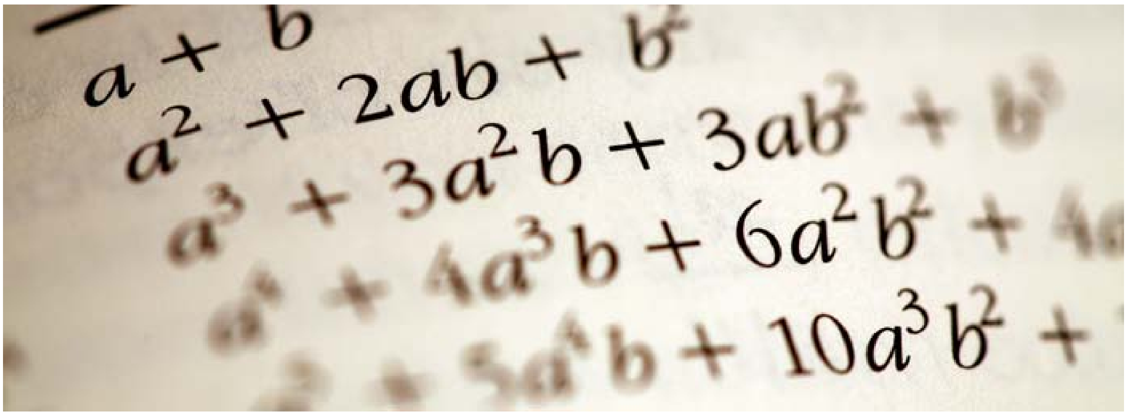
FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Índice

Presentación

En este tema se hace un repaso de algunos conceptos básicos de matemáticas y que utilizaremos posteriormente, por ello es importante que se estudien, o recuerden, con atención.



Los conceptos básicos que se van a trabajar son:

- La **construcción de los números** reales a partir de los números racionales y los irracionales.
- La definición de intervalos de la recta real distinguiendo entre **intervalos acotados y no acotados**.
- Las **principales propiedades del cálculo con potencias** de números reales.
- Las operaciones suma, resta, multiplicación y división entre **polinomios con coeficientes reales**.
- La **factorización de polinomios**, como producto de polinomios irreducibles.
- La **resolución de ecuaciones e inecuaciones**.

Conjunto de los números reales

El conjunto de los **números reales** nos permite representar todos los puntos de la recta. La construcción de los números reales la veremos a partir de los números naturales, enteros, racionales e irracionales. Los números racionales y los irracionales forman el conjunto de los **números reales R**.

Números naturales(N)	Son aquellos que sirven para contar. $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ Al operar con ellos con las operaciones elementales (suma o producto) obtenemos, de nuevo, números naturales. Sin embargo, este conjunto no nos permite restar cualquier par de números, ya que, por ejemplo, si quisiéramos realizar la operación *3 - 5* el resultado obtenido no sería un número natural. Para que esta operación esté bien definida, necesitamos un conjunto mayor, llamado **números enteros** , que incluye el *"0"* y los números negativos.
Números enteros (Z)	Está formado por $\mathbf{Z} = \{\cdots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$. Como podemos ver, todos los naturales son enteros. Con este conjunto solucionamos las dificultades de la resta de números pero, sin embargo, no nos permite realizar la división. Por ejemplo, no podríamos repartir 10 unidades entre tres personas. Necesitamos un conjunto mayor que contenga fracciones: los números racionales.
Números racionales	Se definen como el cociente de dos números enteros. $\mathbf{Q} = \left\{\frac{a}{b}, a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0\right\}$ Observemos que el conjunto de los números enteros está contenido en los números racionales, ya que los podemos ver como una fracción cuyo denominador es el *1*.Por ejemplo, el número *5* lo podemos escribir, también como: $5 = \frac{5}{1}$
Números irracionales	Están formados por todos aquellos números que no son racionales, es decir, que no pueden expresarse mediante una fracción. Son los números con decimales no periódicos, como las raíces cuadradas, por ejemplo. Son números irracionales el $\sqrt{2}$,el número pi (π) , o el número *e*.

Gráfico [Conjunto de los números reales]

Gráfico

Conjunto de los números reales

Los intervalos

Un **intervalo** de la recta real es un subconjunto de números reales que corresponde con un segmento de la recta. Consideramos los siguientes intervalos:

Intervalos	Representación
Intervalo abierto	$(a,b)=\{x\in\mathbf{R}: a<x<b\}$
Intervalos semiabierto por la izquierda	$(a,b]=\{x\in\mathbf{R}: a<x\leq b\}$
Intervalo semiabierto por la derecha	$[a,b)=\{x\in\mathbf{R}: a\leq x<b\}$
Intervalo cerrado	$[a,b]=\{x\in\mathbf{R}: a\leq x\leq b\}$

También podemos considerar intervalos no acotados, en los que algunos de sus extremos es el ∞

Intervalos no acotados

- $(a,+\infty)=\{x\in\mathbf{R}: a<x\}$
- $[a+\infty)=\{x\in\mathbf{R}: a\leq x\}$
- $(-\infty,b)=\{x\in\mathbf{R}: x<b\}$
- $(-\infty,b]=\{x\in\mathbf{R}: x\leq b\}$
- $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$

Las potencias

Repasaremos el concepto de potencia de un número y sus principales propiedades.

Definimos a^n como el producto del número *a* consigo mismo *n* veces. Llamaremos a *a* base de la potencia y a *n* exponente.

Algunas de sus **propiedades** son:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (a^n)^m = a^{nm} \qquad a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (ab)^n = a^n b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejercicio:

Simplifica las siguientes expresiones mediante el uso adecuado de las propiedades:

- $\dfrac{(2a^2b^3)^{-2}(6a^3b^{-1})^3}{2b^2/a^2} = \dfrac{2^{-2}a^{-4}b^{-6}6^3a^9b^{-3}}{2b^2a^{-2}} = \dfrac{a^5b^{-9}(2\cdot 3)^3}{2^3b^2a^{-2}} = \dfrac{a^5b^{-9}2^3 3^3}{2^3b^2a^{-2}} = \dfrac{3^3a^7}{b^{11}}$
- $\sqrt{75} - \sqrt{27} - \sqrt{12} = \sqrt{5^2 3} - \sqrt{3^3} - \sqrt{2^2 3} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}(5-3-2) = 0$

Los polinomios

Un **polinomio** (con coeficientes reales) se define de la forma $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + .. + a_nx^n$

Llamaremos **grado del polinomio**, y lo denotaremos por *gr (P)*, a la mayor potencia a la que aparece elevada *x* y cuyo coeficiente es no nulo. A dicho coeficiente lo llamaremos **coeficiente principal**.

Veamos ahora algunas **operaciones** con polinomios.

Suma y resta de polinomios

Para sumar o restar dos polinomios, sumaremos (o restaremos) los coeficientes de cada término.

Ejemplo

Consideremos los polinomios $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 9$ y $Q(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 2x - 11$. Calcular su suma y su resta.

- $P(x)+Q(x) = x^4+(3-2)x^3+(2+5)x^2+(-4+2)x+9-11 = x^4+x^3+7x^2-2x-2$
- $P(x)-Q(x) = (3x^3+2x^2-4x+9)-(x^4-2x^3+5x^2+2x-11) = -x^4+5x^3-3x^2-6x+20$

Producto y división de polinomios

Para **multiplicar** dos polinomios utilizaremos la propiedad distributiva de la suma y el producto. Multiplicaremos cada término por todos los términos del otro polinomio.

Ejemplo

Multiplicar los polinomios del ejemplo anterior.

- $$\begin{aligned}\mathrm{P(x)}\cdot Q(x) &= (3x^3+2x^2-4x+9)\cdot(x^4-2x^3+5x^2+2x-11) = 3\mathrm{x}^7-6x^6+15x^5+6x^4 \\ &-33x^3+2x^6-4x^5+10x^4+4x^3-22x^2-4x^5+8x^4-20x^3-8x^2+44x+ \\ &+9\mathrm{x}^4-18x^3+45x^2+18x-99 = 3x^7-4x^6+7x^5+33x^4-67x^3+15x^2+62x-99\end{aligned}$$

Para la división de dos polinomios utilizaremos el algoritmo de división.

$P(x) = C(x) \cdot Q(x) + R(x)$

El polinomio es igual a un polinomio cociente por el polinomio divisor más un resto.

La factorización de polinomios (I)

En numerosas ocasiones nos encontraremos con la necesidad de **factorizar** un polinomio. Del mismo modo que podemos escribir los números enteros como productos de números primos, podemos factorizar un polinomio escribiéndolo como producto de polinomios irreducibles, es decir, como producto de polinomios más pequeños. Para ello es necesario calcular sus raíces.

Si α es una raíz del polinomio entonces el polinomio *P(x)* es divisible entre $x-\alpha$. Por lo tanto, podemos escribir $P(x)=(x-\alpha)q(x)$. De hecho, si un polinomio de grado *n* tiene m raíces $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$, entonces $P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_m)c(x)$
donde *c(x)* es un polinomio de grado *n-m*.

Los polinomios de segundo grado

Si tenemos un polinomio de segundo grado $P(x)=ax^2+bx+c$ podemos encontrar sus raíces si resolvemos la ecuación $ax^2+bx+c=0$, para ello utilizaremos la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Recordemos que para que tenga raíces reales, es necesario que b^2-4ac sea un número positivo ó *0*.

Ejemplo: Factorizar los siguientes polinomios:

- $p(x)=x^2+4x+4$ Para factorizar este polinomio utilizaremos la formula anterior (doble), por lo tanto:
  $$p(x)=(x-(-2))(x-(-2))=(x+2)^2$$
  Es importante observar que, aunque parece que hemos obtenido solo un valor, en realidad hemos obtenido dos: $\frac{-4+0}{2}$ y $\frac{-4-0}{2}$
- $p(x)=2x^2+5x+2$ = $p(x)=2x^2+5x+2=(x+2)(x+1/2)$
- $p(x)=x^2+3x+8$ = Este polinomio es ireducible

La factorización de polinomios (II)

Los polinomios de grado tres o mayor

Es posible obtener raíces enteras de polinomios mediante el método de Ruffini. Esta regla nos permite calcular las raíces enteras de un polinomio mediante una sencilla división.

Los productos notables

Existen algunos resultados que, por su importancia, resulta conveniente conocer y ello te ayudará a factorizar polinomios:

1. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
3. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
4. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

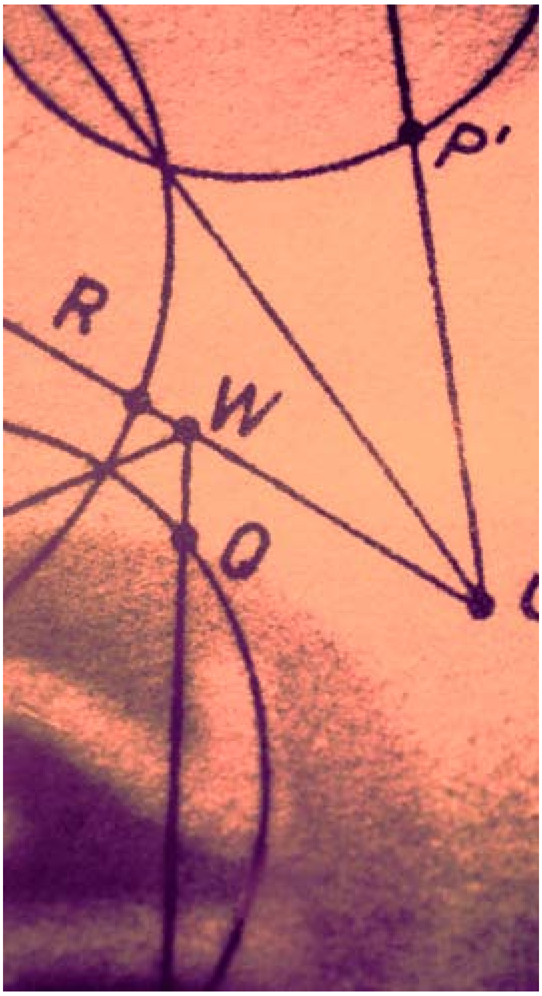
Ecuaciones y las inecuaciones

Llamamos **ecuación** a una igualdad entre dos expresiones. Resolver una ecuación implica obtener los valores de *x* que verifican dicha igualdad.

Observemos que el cálculo de las raíces de un polinomio es un ejemplo de resolución de ecuaciones. Otros ejemplos son $2x-3=x^2-3x+1$ o $x^4+3x^3+x^2-x+7=0$.

Si en lugar de una igualdad tenemos una desigualdad (< o >) entonces obtenemos las **inecuaciones**. Tendremos que resolver, por ejemplo, expresiones del tipo $2x-3 \leq 4$, o $x^2-2x+1 \geq 0$ o incluso $\frac{x+7}{x-3} \geq 0$

El objetivo es calcular el valor (o valores) de las variables que cumplen dicha desigualdad.



Ejemplos

Veamos cómo resolver algunas inecuaciones:

- $x-2 \geq 0$

Para ello tenemos que despejar el valor de *x*, por lo tanto $x \geq 2$

- $x+7 \leq 3$

En este caso tenemos que $x \leq 3-7$ o lo que es lo mismo $x \leq -4$

Ejemplo [Inecuación resuelta](#)

Ejemplo

Inecuación resuelta

Si tenemos la inecuación $x^2+2x-3 \geq 0$.

Obetener la solución

Observemos que esta inecuación busca los valores de x para los cuales la expresión cuadrática es positiva. Para ello buscaremos primero, los puntos que hacen cero la expresión resolviendo mediante la fórmula vista anteriormente.

$x^2+2x-3=0 \Rightarrow x=1,-3$

Estos puntos nos han determinado 3 intervalos: $(-\infty,-3),(-3,1)$ y $(1, \infty)$. Ahora debemos estudiar el signo (positivo o negativo) de la expresión en cada intervalo, esto se consigue sustituyendo en la expresión dada cualquier punto de ese intervalo.

Por ejemplo, si tomamos el punto -4 y lo sustituimos, obtenemos $(-4)^2+2(-4)-3=16-8-3=5 > 0$, por lo tanto los valores de $x \in (-\infty,-3)$ hacen positiva la expresión. Elegimos, ahora, un punto cualquiera en $(-3,1)$, por ejemplo el 0. Si sustituimos $0+2\cdot0-3=-3 < 0$, por lo tanto, los valores de $x \in(-3,1)$ hacen negativa la expresión. De forma análoga podemos ver que los valores de $x \in(1,\infty)$ hacen positiva la expresión.

La solución de la inecuación es, por tanto, $(-\infty,-3)$ y $(1,\infty)$.

Resumen

En este tema se ha hecho un repaso de algunos conceptos básicos que se necesitarán para cualquier operación matemática que se vaya a realizar posteriormente.

- Los **números reales** son aquellos que sirven para contar y están formados por los números naturales,enteros, racionales e irracionales.
- La forma de escribir algunos subconjuntos de la recta real se realiza mediante los **intervalos** que es un subconjunto de números reales que corresponde con un segmento de la recta.
- Definimos una potencia como el producto del número "*a*" consigo mismo "*n*" veces.
- Un **polinomio** (con coeficientes reales) se define de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \_ + a_nx^n$$

- La factorización de los polinomios se realiza a partir de la resolución de **ecuaciones de segundo grado** y mediante la **regla de Ruffini**, para polinomios de grado mayor.
- Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones y si tenemos una desigualdad se utiliza la resolución de **inecuaciones** mediante el uso adecuado de las desigualdades.