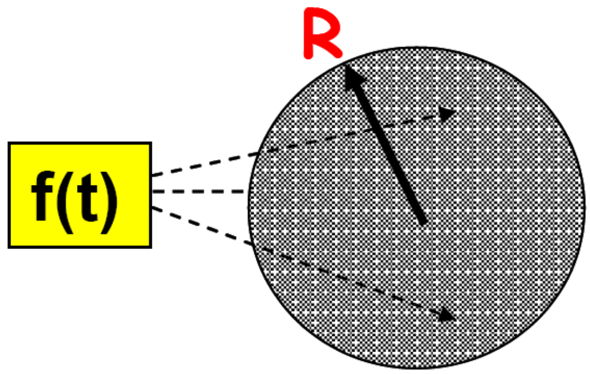
Problemas de Metodos Matematicos III.

Problema 1 Oscilaciones forzadas de una membrana circular

Hallar oscilaciones de una membrana con radio R fija en los bordes, si a partir de momento $t = 0$ es sujeta a una fuerza distribuida homogéneamente con densidad $f(t) = P_0 sen(\omega t)$

Condiciones iniciales (t<0): membrana está en reposo



Solución:

1. Como el problema es angularmente simétrico, la ecuación a resolver será:

   $\rho_0 \frac{\partial u^2(\rho,t)}{\partial t^2} - T\Delta u(\rho, t) = P_0 \sin(\omega t)$ (t>0)

   $\frac{1}{a^2}\frac{\partial u^2(\rho,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}[\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}] = (P_0/T)\sin(\omega t)$ (t>0)

   con $a^2 = T/\rho_0$

   $CI = \ u(\rho, 0) = u_t(\rho, 0) = 0$
   $CC1 : \ u(R, t) = 0$
   $CC2 : \ u(0, t) < \infty \ (i.e. finito)$

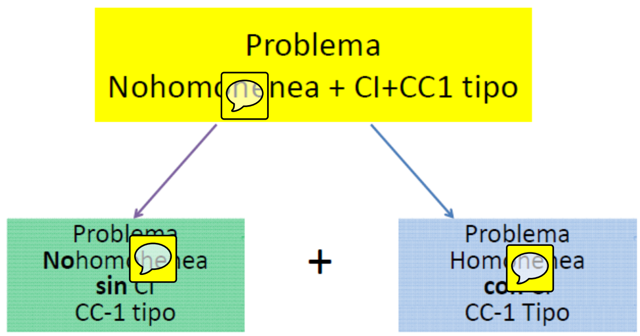
2. Usando el principio de superposición, buscaremos solución como suma de soluciones:

   (i) **de problema inhomogeneo** $v(\rho, t)$ estacionaria (solución que no depende de CI) mas (ii) solución **problema homogeneo** pero **sin CI nulas**.

En nuestro caso CI nulas correspoderán a solución total

$u(\rho,t) = w(\rho,t) + v(\rho,t)$

De tal manera que el problema original se obtiene como superposición o suma de estos subproblemas más sencillos.

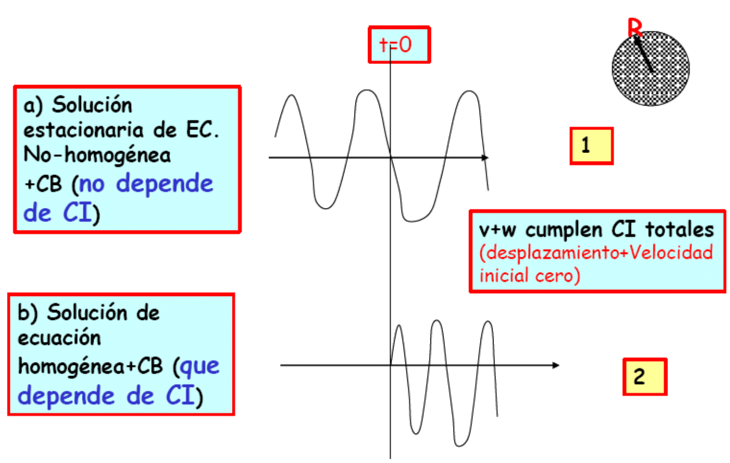


Problema 1:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2}\frac{\partial w^2(\rho,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}] = (P_0/T)sen(\omega t) \\ CI:\ \text{no hay (solucion estacionaria en limite t=}\infty) \\ w(R,t) = 0 \\ w(0,t) < \infty \end{pmatrix}$$

Problema 2:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2}\frac{\partial v^2(\rho,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}] = 0 \\ CI: de\ u(\rho,0) = w(\rho,0) + v(\rho,0) = 0 \\ CI => v(\rho,0) = -w(\rho,0) \\ CI2: v_t(\rho,0) = -w_t(\rho,0) \\ v(R,t) = 0 \\ v(0,t) < \infty \end{pmatrix}$$



3. Buscamos la solución del **problema inhomogeneo** $w(\rho, t)$ como

   $w(\rho, t) = A(\rho)\sin(\omega t)$

4. Sustituimos esta expresión en problema (1) y dividimos resultado por factor $\sin(\omega t)$

   $\rho^2 A_{\rho\rho} + \rho A_\rho + \frac{\rho^2\omega^2}{a^2}A = -\frac{P_0}{T}\rho^2$

   $$\left\{ \begin{array}{c} \rho^2 A_{\rho\rho} + \rho A_\rho + \frac{\rho^2\omega^2}{a^2}A = -\frac{P_0}{T}\rho^2 \\ A(R) = 0 \end{array} \right\}$$

5. Buscamos solución como suma de solución Ec. homogénea (A_1) mas solución particular (A_2)

   $A(\rho) = A_1(\rho) + A_2(\rho)$

6. Ecuación para hallar $A_1(\rho)$:

   $\rho^2 A_{1\rho\rho} + \rho A_{1\rho} + \frac{\rho^2\omega^2}{a^2}A_1 = 0$

7. Con cambio de variables $x = \frac{\rho\omega}{a}$ esta ecuación se convierte en Ecuación para función Bessel de orden cero:

   $x^2 A_{1xx} + x A_{1x} + x^2 A_1 = 0$

   o

   $A_{1xx} + \frac{1}{x}A_{1x} + A_1 = 0$

   Con la siguiente solución:

   A$_1$= C*J$_0$(x)=C*J$_0$($\frac{\rho\omega}{a}$)   (C- Constante)

   Nota: Solución radial no puede incluir función Neuman)

8. Buscamos solución particular A$_2(\rho)$ para satisfacer luego CC:

   $A(R) = A_1(R) + A_2(R) = 0$

   La solución particular $A_2(\rho)$ es una constante:

   $A_2(\rho) = -\frac{P_0 a^2}{T\omega^2}$

9. Imponemos CC: $A(R) = A_1(R) + A_2(R) = C \times J_0(\frac{R\omega}{a}) - \frac{P_0 a^2}{T\omega^2} = 0$

   Obtenemos constante:

   $C = \frac{P_0 a^2}{T\omega^2} \frac{1}{J_0(\frac{R\omega}{a})}$

   Entonces:

   $w(\rho, t) = A(\rho)\sin(\omega t) = [A_1(\rho) + A_2(\rho)]\sin(\omega t) = \frac{P_0 a^2}{T\omega^2}\left(\frac{J_0(\frac{\rho\omega}{a})}{J_0(\frac{R\omega}{a})} - 1\right)\sin(\omega t)$

10. Como ya sabemos la forma de $w(\rho, t)$, buscamos ahora **solución** de **ecuacion homogénea** (que depende de CI)

    $$\left(\begin{array}{c} \frac{1}{a^2}\frac{\partial v^2(\rho,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}[\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}] = 0 \\ CI : de\ u(\rho, 0) = w(\rho, 0) + v(\rho, 0) = 0 \\ CI1 => v(\rho, 0) = -w(\rho, 0) \\ CI2 => v_t(\rho, 0) = -w_t(\rho, 0)??? \\ v(R, t) = 0 \\ v(0, t) < \infty \end{array}\right) (**)$$

11. Buscamos CI1:

    $v(\rho, 0) = -w(\rho, 0) = -\frac{P_0 a^2}{T\omega^2}\left(\frac{J_0(\frac{\rho\omega}{a})}{J_0(\frac{R\omega}{a})} - 1\right)\sin(\omega 0) = 0$

12. Buscamos CI2:

    $v_t(\rho, 0) = -w_t(\rho, 0) = -\frac{\omega P_0 a^2}{T\omega^2}\left(\frac{J_0(\frac{\rho\omega}{a})}{J_0(\frac{R\omega}{a})} - 1\right)\cos(\omega 0) = -\frac{P_0 a^2}{T\omega}\left(\frac{J_0(\frac{\rho\omega}{a})}{J_0(\frac{R\omega}{a})} - 1\right)$

13. Solucionamos problema (**) homogeneo usando método de separación de variables:

    $v(\rho, t) = D(\rho)T(t)$

    Obtendremos dos ecuaciones diferenciales sin influencia de la variable angular:

    $$\left(\begin{array}{c} \rho^2 D_{\rho\rho} + \rho D_\rho + \lambda\rho^2 D = 0 \\ T_{tt} + \lambda a^2 T = 0 \end{array}\right)$$

14. Soluciones para la parte radial son conocidas autofunciones del problema SL

$$\left(\begin{array}{c} D_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} D_\rho + \lambda D = 0 \\ D(R) = 0; D(0) < \infty \end{array} \right)$$

$$D(\rho) = J_0(\sqrt{\lambda_n}\rho) \;\; con \;\; \sqrt{\lambda_n} = \frac{x_{n0}}{R}$$

donde x_{n0} son n-esimos ceros de función Bessel de argumento cero:

$$J_0(x_{n0}) = 0$$

15. Solución para parte temporal:

$$T_n(t) = C_1 \cos[a\frac{x_{n0}}{R}t] + C_2 \sin[a\frac{x_{n0}}{R}t]$$

16. Solución general para ecuación homogenea

$$v(\rho, t) = \sum_n J_0(\sqrt{\lambda_n}\rho)\{C_{1n} \cos[a\frac{x_{n0}}{R}t] + C_{2n} \sin[a\frac{x_{n0}}{R}t]\}$$

17. Encontramos coefiencentes de sumatorio usando CI(1,2)

Aplicando CI1 $v(\rho, 0) = 0 => C_{1n} = 0$

Aplicando CI2 $v_t(\rho, 0) = -\frac{P_0 a^2}{T\omega}\left(\frac{J_0(\frac{\rho\omega}{a})}{J_0(\frac{R\omega}{a})} - 1\right) = \sum_n C_{2n}(a\frac{x_{n0}}{R})J_0(\sqrt{\lambda_n}\rho)$

De aqui, para hallar coeficentes C$_{2n}$ multiplicamos ambas partes de anterior relacion por autofunciones ortogonales $J_0(\sqrt{\lambda_k}\rho)$

e integramos $\int_0^R (*) \; \rho d\rho$

Usamos la propiedad de ortogonalidad de funciones Bessel

$$\int_0^R J_0(\sqrt{\lambda_n}\rho)J_0(\sqrt{\lambda_k}\rho)\rho d\rho = \left\{ \begin{array}{c} 0 \text{ (si n} \neq k) \\ \frac{R^2}{2}[J_0'(x_n)]^2 \text{ (si n} = k) \end{array} \right\}$$

con $J_0'(x_n)$ - derivadas de función Bessel en los ceros x=x_n

18. Ademas, usaremos siguente relación:

$$\int_0^x zJ_0(z)dz = xJ_1(x)$$

19. tambien usaremos la integral:

$$\int_0^R J_0(\sqrt{\lambda_n}\rho)J_0(k\rho)\rho dx = \frac{x_n J_0'(x_n) J_0(kR)}{k^2-\lambda_n} \quad (para\ k \neq \lambda_n)$$

Encontramos $C_{2n} = -\frac{2P_0 a\omega R^3}{Tx_n J_0'(x_n)}\left(\frac{1}{\omega^2 R^2 - x_n a^2}\right)$

20. Solucion final:

$$u(\rho,t) = w(\rho,t) + v(\rho,t) =$$

$$= \frac{P_0 a^2}{T\omega^2}\left(\frac{J_0(\frac{\rho\omega}{a})}{J_0(\frac{R\omega}{a})} - 1\right)\sin(\omega t) - \frac{2P_0 a\omega R^3}{T}\sum_n \frac{1}{x_n J_0'(x_n)}\left(\frac{1}{\omega^2 R^2 - x_n a^2}\right) J_0(\sqrt{\lambda_n}\rho)\sin[a\frac{x_{n0}}{R}t]$$

Nota:

solución obtenida supone que la frecuencia de la fuerza exterior no coincide con ninguna de frecuencias resonantes de la membrana