- 26 -

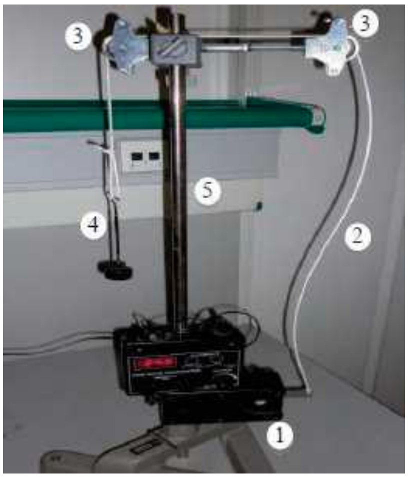
ONDAS ESTACIONARIAS. CUERDA VIBRANTE

OBJETIVO.

Determinación de los modos de vibración y velocidad de fase de ondas estacionarias generadas en una cuerda sujeta por sus extremos, en función de la tensión de la cuerda.

MATERIAL.

- Un generador de frecuencias alimentando a un oscilador
- Una cuerda elástica
- Dos poleas
- Un soporte para pesas y varias pesas, para ajustar la tensión de la cuerda
- Un soporte ajustable en altura para el oscilador y la polea



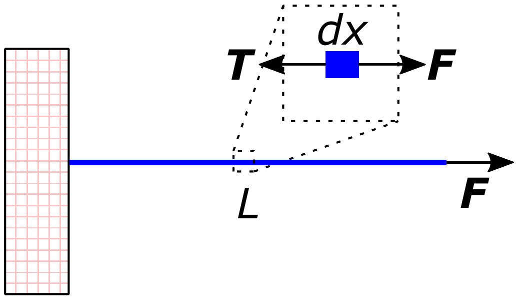
FUNDAMENTO TEÓRICO.

En esta práctica emplearemos una cuerda tensa que oscila entre dos extremos fijos como modelo para estudiar la formación de ondas estacionarias. Una onda estacionaria es aquella que se encuentra confinada en una región concreta del espacio, de modo que sus extremos permanecen fijos (es decir, con amplitud nula). Cuando una onda que se propaga por el interior de un espacio cerrado alcanza una de sus fronteras sufre una reflexión, y comienza a propagarse en sentido opuesto con un desfase de π radianes. La superposición de la onda inicial con su onda reflejada da lugar a un perfil de oscilación en el que los máximos y mínimos de amplitud se mantienen fijos en el espacio: de ahí el nombre de ondas estacionarias. Las ondas estacionarias tienen una importancia fundamental en infinidad de procesos, desde la emisión y recepción de ondas electromagnéticas en antenas, a la formación de ondas acústicas en instrumentos musicales o la aparición de niveles electrónicos definidos en los átomos.

En nuestro modelo, cuando la cuerda tensa y fija en sus extremos se encuentra en condiciones de equilibrio, la fuerza externa $\boldsymbol{F}$ que tensa la cuerda es igual a la propia tensión de la cuerda $\boldsymbol{T}$ en cada uno de sus puntos, de modo que $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}$, para cada elemento dx de la cuerda (dx es un segmento tan pequeño como se quiera de la cuerda). Al perturbar la cuerda, sin embargo, cada elemento dx de longitud ya no está en equilibrio, como se ilustra en la figura adjunta, y las componentes horizontal y vertical de las fuerzas que actúan sobre sobre él pasan a ser:

$$F_x = F\cos(\alpha + d\alpha) - F\cos\alpha \tag{1}$$

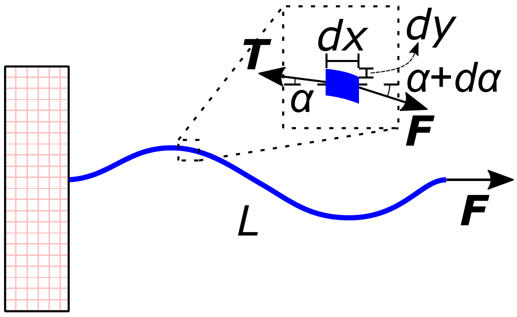
$$F_y = F\sin(\alpha + d\alpha) - F\sin\alpha \tag{2}$$



Donde se ha usado que |***T***| = |***F***|= *F*, y α es el ángulo que forma la fuerza ***F*** respecto al eje x (la horizontal). Si α es pequeño (y por tanto también $\alpha + d\alpha$), entonces podemos aproximar tan(α) ≈ sin(α) ≈ α, y cos(α) ≈ 1, de modo que:

$$F_x \approx 0 \tag{3}$$

$$F_y \approx F d\alpha \tag{4}$$



El ángulo α se puede calcular como:

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{dy}{dx} \tag{5}$$

Y su variación, $d\alpha$, entre los extremos del elemento de cuerda será:

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x}dx \underbrace{\approx}_{\alpha\approx\frac{dy}{dx}} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx \tag{6}$$

De modo que la ecuación (4) queda escrita como:

$$F_y = F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx \tag{7}$$

Esta fuerza vertical que experimenta cada elemento de cuerda puede expresarse, de acuerdo a la segunda ley de Newton como la masa del elemento, dm, multiplicada por la aceleración vertical que experimenta $a = \partial^2 y/\partial t^2$, de modo que:

$$F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dx = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}dm \quad \xrightarrow{dm=\rho A\cdot dx} \quad F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{8}$$

Donde ρ es la densidad de la cuerda, y A su sección transversal. El producto $\mu = \rho A$ define la densidad lineal de la cuerda. La ecuación (8) se ajusta exactamente a la expresión de una ecuación de ondas en una dimensión:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{9}$$

Donde v es la velocidad de fase de la onda, que en nuestro caso es:

$$v = \sqrt{F/\rho A} = \sqrt{F/\mu}\,. \tag{10}$$

La solución general a este tipo de ecuaciones es de la forma:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(k_n x \pm \omega_n t + \varphi_n) \qquad (11)$$

Donde A es la amplitud, que vendrá dada por las condiciones iniciales, k es el número de onda ($k = 2\pi/\lambda$, siendo λ la longitud de onda), ω la frecuencia angular ($\omega = 2\pi f$, siendo f la frecuencia), y φ es la diferencia de fase. El signo ± indica el sentido de propagación de la onda. Para que la expresión (11) sea solución de la ecuación de ondas (9) la frecuencia angular y el número de onda deben cumplir que:

$$\frac{\omega_n}{k_n} = v \qquad (12)$$

Que es lo que se conoce como relación de dispersión.

Como hemos dicho al principio, toda onda estacionaria es el resultado la superposición de dos ondas viajeras (la inicial y su reflexión) de misma frecuencia y amplitud, pero viajando en sentido opuesto con una diferencia de fase de π radianes. Por tanto:

$$y(x,t) = A\cos(kx + \omega t) + A\cos(kx - \omega t + \pi) \qquad (13)$$

Aplicando las relaciones trigonométricas cos(x + π) = -cos(x), sin(-x) = -sin(x), cos(-x) = cos(x) y cos(a + b) = sin(a)sin(b) - cos(a)cos(b) llegamos a la solución:

$$\boxed{y(x,t) = 2A\sin(kx)\sin(\omega t)} \qquad (14)$$

El factor sin(ωt) contiene la dependencia temporal de la oscilación y nos indica la frecuencia con la que oscila cada punto de nuestra cuerda. Sin embargo, la amplitud máxima de oscilación de cada punto viene dada por el factor 2Asin(kx) que es constante en el tiempo por lo que sólo depende de la posición del punto en sí. Es decir, el perfil de la onda no se desplaza con el tiempo, al contrario de lo que sucede con las ondas viajeras, tal como adelantábamos al principio.

Una característica de gran importancia de las ondas estacionarias es que no pueden tener cualquier frecuencia, ya que como hemos dicho la amplitud en los extremos debe ser nula (en nuestra cuerda, los extremos están fijos). Esto significa que:

$$y(0,t) = y(L,t) = 2A\sin(kL)\sin(\omega t) = 0 \qquad (15)$$

Para que esto se cumpla para cualquier t la única solución posible es que $k = \pi n/L$ siendo n un número natural ($n \in \mathbb{N}$). Es decir, la longitud de onda debe ser una fracción entera del doble de la longitud de la cuerda ($\lambda = 2\pi/k = 2L/n$). Teniendo en cuenta la relación de dispersión dada en (12) tenemos que:

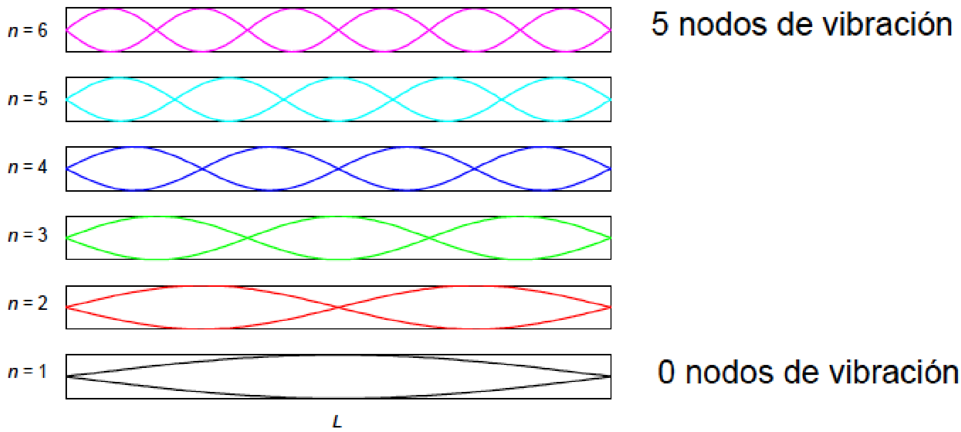
$$\omega = vk = v\frac{\pi n}{L} \qquad (16)$$

Recordando que la frecuencia f se relaciona con la frecuencia angular como $\omega = 2\pi f$, tenemos que:

$$\boxed{f = v\frac{n}{2L}} \qquad (17)$$

Por tanto, para que una perturbación periódica en nuestra cuerda dé lugar a la formación de ondas estacionarias debe tener una frecuencia f tal que se cumpla la expresión (17).

A los distintos valores posibles de f (ó ω) se les conoce como modos de oscilación (o armónicos). En la siguiente gráfica se representan los seis primeros modos de oscilación de una cuerda de longitud L:



NOTA: el número de *vientres* (máximos de amplitud) coincide con el número modo, mientras que el número de *nodos* (mínimos de amplitud) es siempre $n - 1$.

MODO DE OPERAR.

Se dispone de una cuerda sujeta en un extremo a la lengüeta de un oscilador, y en el otro a un soporte porta pesas. Colocamos una pesa del 50 g en el soporte y con el generador de frecuencias iremos variando la frecuencia de vibración de la cuerda hasta observar la formación de los cuatro primeros modos de oscilación (n = 1, 2, 3, 4). A continuación, iremos incrementando la fuerza de tensión de la cuerda añadiendo sucesivas pesas de 50 g cada una, con el fin de observar el cambio en la frecuencia de vibración de cada modo.

DATOS.

- Longitud de la cuerda entre el vibrador y la polea L = 58 cm.
- Densidad lineal de la cuerda μ = 4.2 g/m.
- Masa del soporte porta pesas $M_{soporte}$ = 50 g.
- Masa de cada pesa M_{pesa} = 50 g.

RESULTADOS EXPERIMENTALES.

1. Construir una tabla con las frecuencias medidas para los modos de vibración n=1, 2, 3, 4 para los que, respectivamente, se producen 0, 1, 2, y 3 nodos en la cuerda. Justificar la elección de la incertidumbre en la medida de la frecuencia.

2. Hallar la velocidad de propagación de la onda en la cuerda para cada modo de vibración y en cada una de las tres configuraciones de masas. Calcular la incertidumbre en cada uno de los casos. Dar como valor final de la velocidad para cada configuración de masas el resultado de hacer la media ponderada de las velocidades obtenidas para cada uno de los modos de vibración.

3. Hallar la tensión de la cuerda para cada modo de vibración y en cada una de las tres configuraciones de masas. Utilice la expresión (10) para hallar la tensión en la cuerda. Calcular la incertidumbre en cada uno de los casos. Dar como valor final de la tensión para cada configuración de masas el resultado de hacer la media ponderada de las tensiones obtenidas para cada uno de los modos de vibración.

4. Comparar los valores obtenidos para la tensión con los teóricos calculados a partir de la masa y del soporte y las pesas (puede despreciarse la masa de la cuerda).