Resolución de sistemas de ecuaciones mediante la regla Cramer

El presente documento recoge un pequeño recordatorio de cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales independientes mediante determinantes, empleando la regla de Cramer. No es un estudio formal ni riguroso del mismo y no contiene demostraciones. Para un estudio más riguroso, referirse a textos de matemáticas, como los recomendados en el bachillerato y en los primeros cursos del grado.

Este método es especialmente sencillo para sistemas de de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, (aunque en este caso despejar directamente puede ser incluso más sencillo) y para sistemas de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. Para sistemas de orden superior es un método más tedioso que implica el empleo de adjuntos.

El texto y las ecuaciones se han tomado de la Wikipedia, y tras revisarlo no se han detectado errores:

http://es.wikipedia.org/wiki/Regla_de_Cramer

Sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

Para la resolución de un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, expresado de la forma:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Se representa en forma de matrices de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Entonces, las incógnitas x e y pueden ser resueltas con la regla de Cramer, con una división de determinantes, de la siguiente manera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Nota.- Para que las ecuaciones sean linealmente independientes se debe cumplir que el determinante de los coeficientes (el que divide en x, y) sea distinto de 0, ya que si no se tendría una división por 0.

Sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

La regla para un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es similar, con una división de determinantes:

$$\begin{cases} ax + by + cz = j \\ dx + ey + fz = k \\ gx + hy + iz = l \end{cases}$$

Que representadas en forma de matriz es:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

Entonces, las incógnitas *x*, *y*, *z* pueden ser resueltas como sigue:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

Para calcular un determinante de orden 3 se calcula mediante la regla de Sarrus:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - (a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} + a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2})$$

Nota.- Para que las ecuaciones sean linealmente independientes se debe cumplir que el determinante de los coeficientes (el que divide en x, y, z) sea distinto de 0, ya que si no tendríamos una división por 0.