Dept. de Vibraciones y Aeroelasticidad
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

EJERCICIO

OBJETIVO: Efecto de la compresibilidad en la velocidad de divergencia.

Introducción: Los efectos de compresibilidad añaden complejidad a los cálculos aerodinámicos. En una primera aproximación, los efectos del número de Mach se pueden dividir en 4 regiones: 1) Régimen subsónico: $0 < M_\infty < 0{,}80$; 2) Régimen transónico: $0{,}80 < M_\infty < 1{,}2$; 3) Régimen supersónico: $1{,}2 < M_\infty < 5$; y 4) Régimen hipersónico con $M_\infty > 5$. En este problema se describirá cómo afecta la compresibilidad al fenómeno aeroelástico de divergencia en el régimen subsónico. Se definirá también el concepto de *matched point* que aparecerá posteriormente en otros cálculos aeroelásticos como *flutter*.

Enunciado: Sea un perfil con coeficiente de sustentación $C_{L\alpha 0}$ en flujo incompresible (típicamente $M_\infty < 0{,}3$), una distancia e del eje elástico al centro aerodinámico y una rigidez elástica a torsión K_α. El coeficiente de sustentación se ha adimensionalizado con una superficie S.

Se pide:

1. Formular la expresión general de la presión dinámica de divergencia q_{D0} en régimen incompresible. Establecer la dependencia de la velocidad de divergencia V_{D0} con la altura de vuelo.
2. Utilizando la transformación de *Prandtl-Glauert* para régimen compresible expresar la ecuación implícita con la que se podría calcular el Mach de vuelo en el que aparece la divergencia. Formular la ecuación de forma adimensional con el parámetro q_{D0}/q_h donde $q_h = 1/2\rho a^2$ siendo ρ la densidad del aire y a la velocidad del sonido, ambas función de la altura de vuelo h.
3. Elevar al cuadrado la expresión anterior para obtener una ecuación cuadrática en M^2 que permita obtener el Mach de vuelo de divergencia en compresible. Expresar el Mach M_D y la velocidad de divergencia V_D en función del parámetro q_{D0}/q_h. Teniendo en cuenta el apartado (1), establecer la relación V_D/V_{D0} que relaciona la velocidad de divergencia con efectos de compresibilidad V_D y la calculada sin efectos compresibles V_{D0}.

Homework: Se estima una velocidad de divergencia de 150 KEAS a nivel del mar. Teniendo en cuenta la expresión del último apartado, dibujar la velocidad de divergencia en función de altura *SIN* y *CON* efectos de compresibilidad[1]. Se necesitará una expresión de la densidad del aire y la velocidad del sonido en función de la altura. La atmósfera estándar internacional establece los siguientes valores (extraído de ESDU 77022):

- Altitud H < 11000 [m]:

$$\begin{aligned} T[K] &= 288{,}15 - 0{,}0065 \cdot h[m] \\ p[N/m^2] &= 101325 \left(\frac{T[K]}{288{,}15} \right)^{5{,}2558797} \end{aligned} \tag{1}$$

- Altitud H en en rango 11000 [m] < H < 20000 [m]:

$$\begin{aligned} T[K] &= 216{,}65 \\ p[N/m^2] &= 22632 \cdot e^{-0{,}00015768852 \cdot (H[m] - 11000)} \end{aligned} \tag{2}$$

Una vez obtenida la temperatura y la presión, la velocidad del sonido a se calcularía con las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p}{RT} \\ a &= \sqrt{\gamma R T} \\ R &= 287{,}05287 Nm/KgK \\ \gamma &= 1{,}4 \end{aligned} \tag{3}$$

[1]Los puntos de vuelo calculados según esta ecuación se denominan *matched points* ya que el número de Mach M, la velocidad V y la altura h se relacionan a través de la atmósfera estándar. Por el contrario, los *unmatched points* son puntos en los que no se corresponde Mach, velocidad y altura.

SOLUCIÓN

APARTADO 1

La ecuación de equilibrio en momentos se escribe:

$$\begin{aligned}
K_\alpha \alpha_e &= q_0 Sc C_{MAC} + q_0 Se C_{L\alpha 0} (\alpha_0 + \alpha_e) \\
(K_\alpha - q_0 Se C_{L\alpha 0}) \alpha_e &= q_0 Sc C_{MAC} + q_0 Se C_{L\alpha 0} \alpha_0 \\
\alpha_e &= q_0 Se C_{L\alpha 0} \frac{\alpha_0 + \frac{c}{e} \frac{C_{MAC}}{C_{L\alpha 0}}}{K_\alpha - q_0 Se C_{L\alpha 0}}
\end{aligned}$$

La condición de divergencia se obtiene de igualar a cero la expresión del denominador, i.e.:

$$K_\alpha - q Se C_{L\alpha 0} = 0 \Rightarrow K_\alpha = \frac{1}{2} \rho V_{D0}^2 e C_{L\alpha 0} \Rightarrow V_{D0}^2 = \frac{2}{\rho (h)} \frac{K_\alpha}{Se C_{L\alpha 0}} \Rightarrow V_{D0} = \sqrt{\frac{2}{\rho (h)}} \cdot \sqrt{\frac{K_\alpha}{Se C_{L\alpha 0}}}$$

La expresión para la densidad en función de la altura se obtiene de las relaciones que se expresan en la parte inferior del ejercicio.

APARTADO 2

Volviendo a la ecuación que proporciona la presión dinámica de divergencia:

$$K_\alpha = \frac{1}{2} \rho V_D^2 Se C_{L\alpha} = \frac{1}{2} \rho a^2 M_D^2 Se \frac{C_{L\alpha 0}}{\sqrt{1 - M_D^2}} \Rightarrow \frac{K_\alpha}{Se C_{L\alpha 0}} = q_{D0} = q_h \frac{M_D^2}{\sqrt{1 - M_D^2}} \Rightarrow M_D^2 - \frac{q_{D0}}{q_h} \sqrt{1 - M_D^2} = 0$$

APARTADO 3

Elevando al cuadrado la expresión anterior:

$$\begin{aligned}
M_D^4 - \left(1 - M_D^2\right) \left(\frac{q_{D0}}{q_h}\right)^2 = 0 \Rightarrow M_D^4 + \left(\frac{q_{D0}}{q_h}\right)^2 M_D^2 - \left(\frac{q_{D0}}{q_h}\right)^2 = 0 \\
M_D^2 = \frac{-\left(\frac{q_{D0}}{q_h}\right)^2 + \sqrt{\left(\frac{q_{D0}}{q_h}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{q_{D0}}{q_h}\right)^2}}{2} = F\left(\frac{q_{D0}}{q_h}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto, la velocidad de divergencia se escribe:

$$M_D^2 = \frac{V_D^2}{a^2} = F\left(\frac{q_{D0}}{q_h}\right) \Rightarrow V_D^2 = a^2 F\left(\frac{q_{D0}}{q_h}\right) \Rightarrow V_D = a \cdot \sqrt{F\left(\frac{q_{D0}}{q_h}\right)}$$

Adimensionalizando con V_{D0}:

$$\frac{V_D^2}{V_{D0}^2} = \frac{a^2 F\left(\frac{q_{D0}}{q_h}\right)}{\frac{2K_\alpha}{\rho Se C_{L\alpha}}} = \frac{1}{2} \rho a^2 \frac{1}{\frac{K_\alpha}{Se C_{L\alpha}}} F\left(\frac{q_{D0}}{q_h}\right) = \frac{1}{\frac{q_{D0}}{q_h}} F\left(\frac{q_{D0}}{q_h}\right) \Rightarrow \frac{V_D}{V_{D0}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{q_{D0}}{q_h}}} \sqrt{F\left(\frac{q_{D0}}{q_h}\right)}$$