Ecuaciones de Frenet - Serret en forma matricial

$$\begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{N} \\ \vec{B} \end{pmatrix}$$

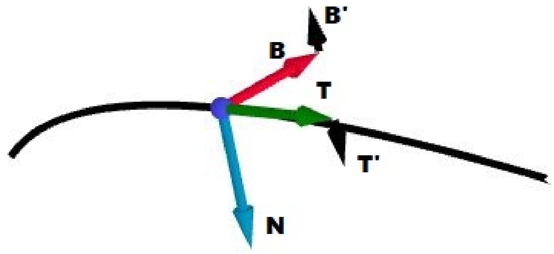
Torsión

Sea $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ una curva regular con velocidad unitaria y curvatura no nula. Se define la **torsión** de γ como la función $\tau : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\vec{B}'(s) = -\tau(s)\vec{N}(s)$$

O bien:

$$\tau(s) = -\vec{B}'(s) \cdot \vec{N}(s)$$



La torsión de una curva con parametrización arbitraria se define como la torsión de cualquiera de sus reparametrizaciones a velocidad unitaria.

Torsión en una curva arbitraria

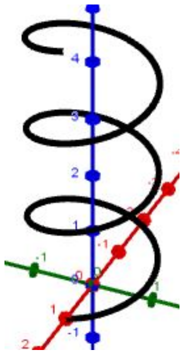
Si $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular con parametrización arbitraria y curvatura no nula, entonces la torsión viene dada por la fórmula:

$$\tau = \frac{(\vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}'') \cdot \vec{\gamma}'''}{\| \vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}'' \|^2} = \frac{\det(\vec{\gamma}', \vec{\gamma}'', \vec{\gamma}''')}{\| \vec{\gamma}' \times \vec{\gamma}'' \|^2}$$

Obtener la torsión

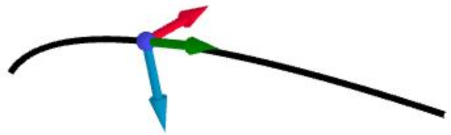
Hélice circular:

$$\gamma(t) = (a\cos(t),\ a\sin(t),\ bt), \qquad a > 0, \qquad t \in \mathbb{R}$$



Calcular la torsión

$$\gamma(t) = \left(t^2,\ t,\ \frac{4}{3}\sqrt{t^3}\right), \qquad t \in (0, 10), \qquad \text{en} \qquad t_0 = 1$$



Curvatura y torsión

$$\alpha(t) = (e^t\cos(t),\ e^t\sin(t),\ e^t), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad \text{en} \qquad t_0 = 0$$

Torsión de curvas planas

Sea γ una curva regular con curvatura no nula. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. La traza de γ está contenida en un plano.
2. La torsión de γ es cero en todos sus puntos.

En tal caso el plano que contiene a la curva es el plano osculador.

Caracterización de curvas por su curvatura y torsión

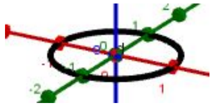
Si dos curvas regulares, parametrizadas con velocidad unitaria $\alpha, \beta : (a,b) \to \mathbb{R}^3$

$$\text{verifican que} \qquad \forall t \in (a,b) \qquad \kappa^{\alpha}(t) = \kappa^{\beta}(t) \qquad \text{y} \qquad \tau^{\alpha}(t) = \tau^{\beta}(t)$$

entonces existe un movimiento rígido $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\beta = M \circ \alpha$.

Curvas con curvatura constante y torsión nula

Si $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva regular con velocidad unitaria, curvatura constante y torsión nula $\Rightarrow$ $\gamma(I)$ es parte de una recta (si $\kappa \equiv 0$) o de una circunferencia (si $\kappa = cte \neq 0$).



Curvas con curvatura y torsión constante

Toda curva, con curvatura $\kappa_0 > 0$ constante positiva y torsión $\tau_0 \neq 0$ constante no nula es parte de la hélice

$$\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt), \qquad \text{siendo} \qquad a = \frac{\kappa_0}{\kappa_0^2 + \tau_0^2} > 0, \qquad b = \frac{\tau_0}{\kappa_0^2 + \tau_0^2}$$

Demostrar que es parte de una circunferencia

$$\gamma(t) = \left(\frac{4}{5}\cos(t),\ 1 - \sin(t),\ -\frac{3}{5}\cos(t) \right)$$

Encontrar su centro, radio y el plano que lo contiene.