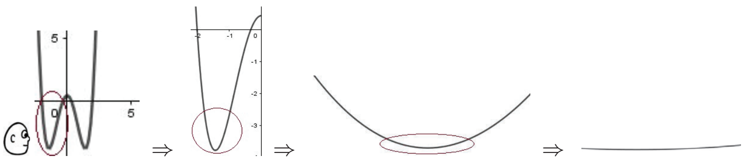
1.1. Curvas

“**Donde hay materia, hay geometría**".
Johannes Kepler.

Funciones suaves

Una función real $f : I \to \mathbb{R}$, definida en un conjunto abierto $I \subseteq \mathbb{R}$, se dice que es una **función suave** si es infinitamente derivable en todos los puntos de I.



Resultados de cálculo

Si $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ son funciones suaves entonces: la suma $f(t) + g(t)$, el producto $f(t)g(t)$, el cociente $\frac{f(t)}{g(t)}$ y la composición $f(g(t))$ son funciones suaves en el dominio donde están definidas las operaciones correspondientes.

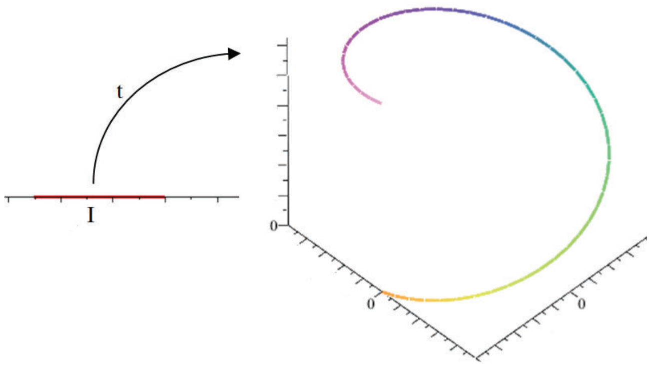
Curva parametrizada en $\mathbb{R}^n$

Una **curva parametrizada** en $\mathbb{R}^n$ es una función vectorial

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n, \qquad \gamma(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$$

Donde $I = (a, b) = \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$ con $-\infty \leq a < b \leq \infty$, y cada función componente

$$x_i : I \to \mathbb{R} \qquad \text{es función suave.}$$

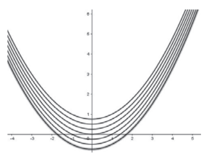


Notación para una curva: (I, γ),
o γ si se sobreentiende el intervalo de definición I.

Curva implícita, en cartesianas o de nivel

- Dada la aplicación continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\forall c \in \mathbb{R}$ se denomina **curva implícita** del plano, al conjunto de puntos:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$



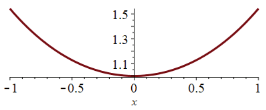
- Dadas las aplicaciones continuas $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ se denomina **curva implícita** del espacio, al conjunto de puntos:

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c_1, \quad g(x, y, z) = c_2\}$$

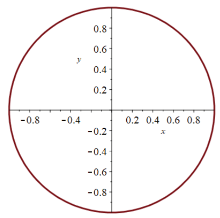
Parametrizaciones de una curva implícita

Una curva parametrizada cuya traza está contenida en una curva implícita C, diremos que es una **parametrización** de C.

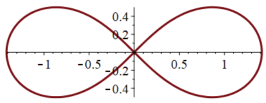
Ejemplos de curvas parametrizadas



$\gamma_1(t) = (t, \cosh(t)), \quad t \in (-1, 1)$

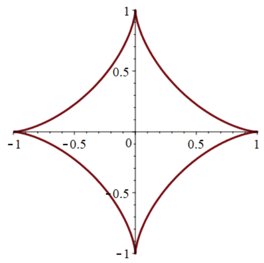


$\gamma_2(t) = (\cos(t), \sin(t)), \quad t \in (-\pi, \pi)$



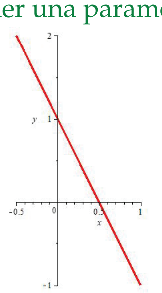
$$\gamma_3(t) = \left(\frac{\cos(t)}{1+\sin^2(t)}, \frac{\sin(t)\cos(t)}{1+\sin^2(t)} \right),$$

$$t \in (-\pi, \pi)$$

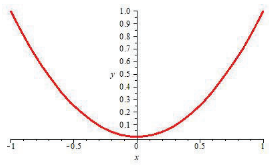


$\gamma_4(t) = \left(\cos^3(t), \sin^3(t) \right), \quad t \in (-\pi, \pi)$

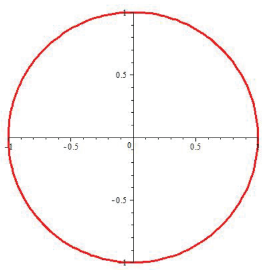
Obtener una parametrización de las curvas de nivel



$2x + y = 1$



$y - x^2 = 0$



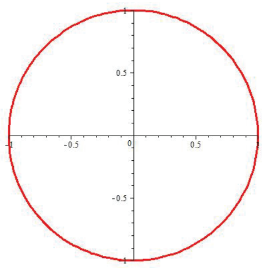
$x^2 + y^2 = 1$

Encontrar tres parametrizaciones distintas

$$y = x^2$$

Encontrar tres parametrizaciones distintas

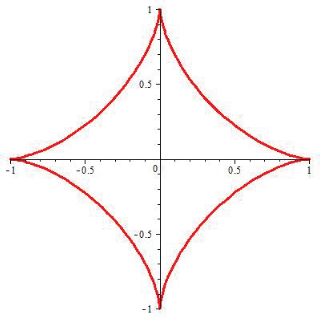
$$x^2 + y^2 = 1$$



Obtener una curva implícita para la siguiente curva parametrizada

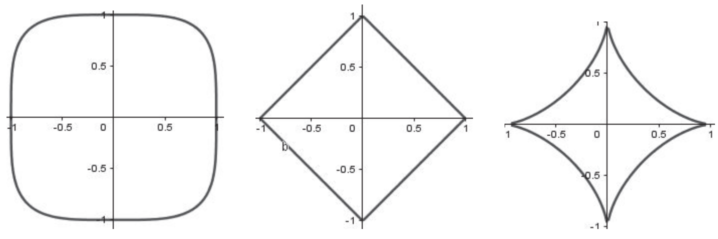
Astroide: $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\gamma(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t))$$



Encontrar una parametrización

$$\left(x^2\right)^p + \left(y^2\right)^p = 1, \qquad p > 0$$

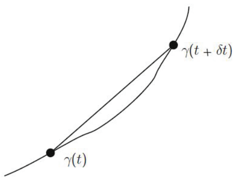


$2p > 1$ $\quad$ $2p = 1$ $\quad$ $2p < 1$

Vector velocidad de una curva

Sea (I, γ) curva parametrizada.
Se llama **vector velocidad** de γ en $t \in I$ al vector:

$$\vec{\gamma}'(t)$$



Velocidad escalar de una curva

Se llama **velocidad escalar** de (I, γ), o simplemente **velocidad**, en $t \in I$ al valor:

$$\| \vec{\gamma}'(t) \|$$

Vector tangente

Si la velocidad de (I, γ) en $t \in I$ es no nula,
se llama **vector tangente** a γ en $t \in I$ al vector:

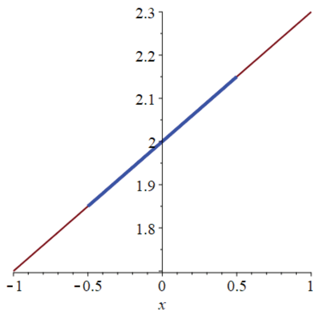
$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{\gamma}'(t)}{\| \vec{\gamma}'(t) \|}$$

Recta tangente

Sea (I, γ) curva con velocidad no nula en $t \in I$.
Se llama **recta tangente** a γ en $t \in I$ a la recta que pasa por $\gamma(t)$ con la dirección del vector $\vec{\gamma}'(t)$.

Curvas con vector velocidad constante

Si una curva parametrizada tiene vector velocidad constante no nulo, entonces es parte de una recta.



Curvas con velocidad (escalar) constante

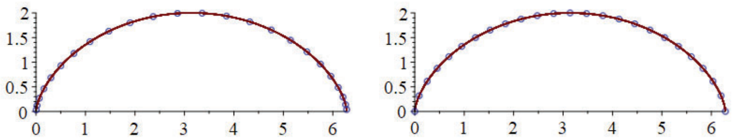
Una curva parametrizada (I, γ) se dice que tiene tiene **velocidad constante** si

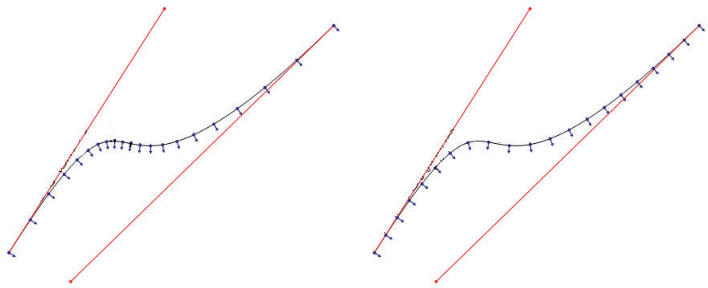
$$\| \vec{\gamma}'(t) \| = c = cte, \qquad \text{para todo} \quad t \in I$$

Curvas con velocidad unitaria

Una curva parametrizada (I, γ) se dice que tiene **velocidad unitaria**, si tiene velocidad constante igual a 1:

$$\| \vec{\gamma}'(t) \| = 1, \qquad \text{para todo} \quad t \in I$$

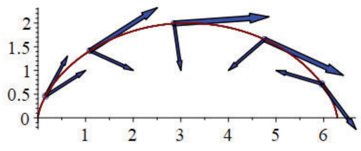


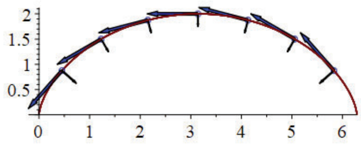


Propiedad de un campo vectorial de norma constante

Si $\vec{n}(t)$ es una función vectorial suave, tal que $\| \vec{n}(t) \| = c = cte \quad \Rightarrow$

$$\vec{n}'(t) \cdot \vec{n}(t) = 0 \qquad\qquad \forall t$$





Vector aceleración de una curva

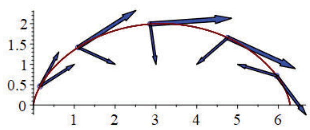
Dada una curva $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$, se llama **vector aceleración** de γ al vector

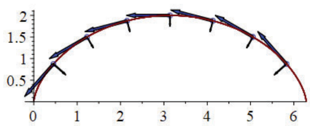
$$\vec{\gamma}''(t)$$

Vector velocidad y vector aceleración ortogonales

Si γ tiene velocidad constante, entonces:

$$\vec{\gamma}'(t) \cdot \vec{\gamma}''(t) = 0, \qquad \text{para todo} \qquad t \in (a, b)$$

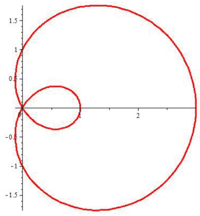




Obtener el vector velocidad y el vector aceleración

$$\gamma(t) = ((1 + 2\cos(t))\cos(t), (1 + 2\cos(t))\sin(t)), \qquad t \in \mathbb{R}$$

En $\quad t_0 = \frac{2\pi}{3}$,



Calcular los vectores velocidad y aceleración de la curva

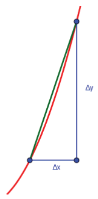
$$\gamma(t) = (t, \sqrt{1 - t^2})$$

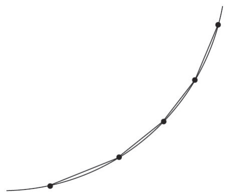
Comprobar si es cierto que $\quad \vec{\gamma}'(t) \cdot \vec{\gamma}''(t) = 0$.
Estudiar si la curva tiene velocidad constante.

Longitud de una curva

La longitud de la curva $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ es:

$$\mathrm{long}(\gamma) = L_a^b(\gamma) = \int_a^b \| \vec{\gamma}'(u) \| \, du$$





Función longitud de arco

La **función longitud de arco** de la curva $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^n$, desde el punto $t_0 \in [a,b]$, es la función $s : (a,b) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$s(t) = L_{t_0}^t(\gamma) = \int_{t_0}^t \| \vec{\gamma}'(u) \| \, du$$

Dependencia del valor inicial

Distintas elecciones del parámetro t_0 proporciona funciones de longitud de arco que difieren entre sí en una constante.

Derivada de la función longitud de arco

La función longitud de arco: $s(t) = \int_{t_0}^t \| \vec{\gamma}'(u) \| \, du$ es derivable y su derivada, por el teorema fundamental del cálculo, es:

$$\frac{ds}{dt} = \| \vec{\gamma}'(t) \|$$

La función longitud de arco es invariante por movimientos

Dado un movimiento $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que $\Phi(x) = Mx + b$, con $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ verificando que $M^t M = I$ y $b \in \mathbb{R}^n$, si $\gamma : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada, entonces:

$$L_{t_0}^{t}(\Phi \circ \gamma) = L_{t_0}^{t}(\gamma)$$

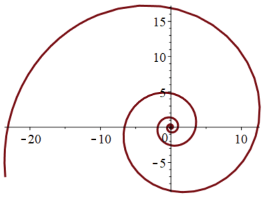
Obtener la función longitud de arco

$$\alpha : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t)),$$

$$\text{para} \quad a > 0, \quad \text{desde} \quad t_0 = 0$$

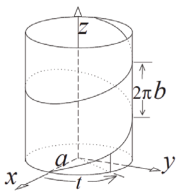
Obtener la función longitud de arco

$$\gamma(t) = (e^{kt}\cos(t), e^{kt}\sin(t)), \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad \text{desde} \qquad t_0 = 0$$



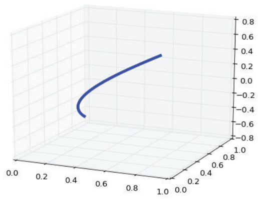
Obtener la función longitud de arco

$$\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt), \quad t \in \mathbb{R} \quad a > 0,\ b > 0, \quad \text{desde} \quad t_0 = 0$$



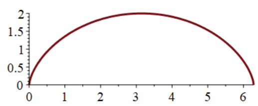
Obtener la función longitud de arco

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2},\ \frac{1}{3}(1-t)^{3/2},\ \frac{t}{\sqrt{2}}\right), \quad t \in (-1,1), \quad \text{desde} \quad t_0 = -1$$



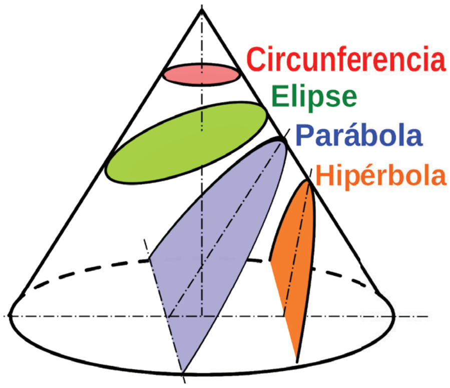
Obtener la función longitud de arco

$$\gamma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)), \qquad t < 2\pi, \qquad \text{desde} \qquad t_0 = 0$$



Cónicas

Toda curva que en implícitas está definida por una ecuación de segundo grado, se denomina **cónica**.



$\forall\, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c \in \mathbb{R}$,

$$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; a_1\, x^2 + 2\, a_2\, x\, y + a_3\, y^2 + b_1\, x + b_2\, y + c = 0\Big\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; (x,y) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (b_1, b_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0\right\}$$

$$\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; a_1\, x^2 + 2\, a_2\, x\, y + a_3\, y^2 + b_1\, x + b_2\, y + c = 0\Big\}$$

$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; (x,y) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (b_1, b_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = 0\right\}$$

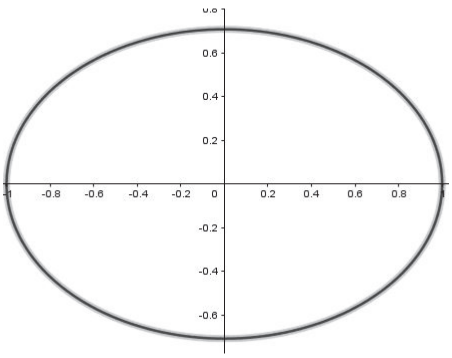
Ecuación canónica de una cónica

1. Circunferencia: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = p^2\}$
2. Elipse: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1\}$
3. Hipérbola: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1\}$
4. Parábola: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{p^2} = y\}$
5. Una o dos rectas: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = p^2\}$,
   $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 0\}$
6. Un punto: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 0\}$

Dar una parametrización local

Elipse: Dados $p \neq 0, q \neq 0$,

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad \frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1 \right\}$$



Dar una parametrización local

Hipérbola: Dados $p \neq 0$, $q \neq 0$,

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1 \right\}$$