



GRADO

GUÍA DE ESTUDIO DE LA ASIGNATURA CAMPOS Y ONDAS

ORIENTACIONES PARA SU DESARROLLO



MODULO VI

ONDAS ELECTROMAGNETICAS PLANAS

Tema 13. Ecuaciones de las líneas de transmisión; Líneas infinitas	semana 11
Tema 14. Líneas finitas. Diagrama de Smith	semana 12
Tema 15. Guías de onda: Modos TEM , TE y TM ; Guías rectangulares	semana 13

FÉLIX ORTIZ SÁNCHEZ

GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA

GRADO EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

GRADO EN INGENIERÍA ELECTRÓNICA INDUSTRIAL Y AUTOMÁTICA

GRADO EN TECNOLOGÍAS INDUSTRIALES

CAPÍTULO VII

LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

Las *Líneas de Transmisión* son unos dispositivos para enviar energía electromagnética por medio de las ondas electromagnéticas que se propagan entre un generador y una carga. En el tema se van a estudiar las ecuaciones que cumplen las ondas E-M en dichos dispositivos y se comprobará que es en todo similar a la propagación de ondas planas en el vacío o en medios materiales. El siguiente esquema-resumen indica los ítems que cubre el capítulo.

ESQUEMA-RESUMEN

- Ecuaciones de las líneas de transmisión.
- Parámetros que definen las líneas de transmisión.
- Línea de transmisión infinita.
- Línea de transmisión finita.
- Estudio de las líneas en circuito abierto y en cortocircuito.
- Reflexión de ondas E-M en una línea de transmisión . Ondas estacionarias.
- Diagrama de Smith.

Requisitos previos

Estudio y asimilación de los capítulos previos sobre las ecuaciones de Maxwell y la propagación de ondas electromagnéticas

7 Líneas de transmisión

7.1 Introducción

El capítulo va a tratar sobre la transmisión de señales mediante líneas conductoras denominadas *Líneas de Transmisión*. Las líneas de transmisión en esencia consisten en dos conductores por los que circula la corriente en sentido contrario separados por un dieléctrico. Los tipos básicos de líneas de transmisión son tres; La línea de *alambres paralelos* (dos conductores separados una distancia constante d), la línea *coaxial* (dos conductores cilíndricos coaxiales), la línea de *placas paralelas* (dos placas paralelas conductoras separadas una distancia d).

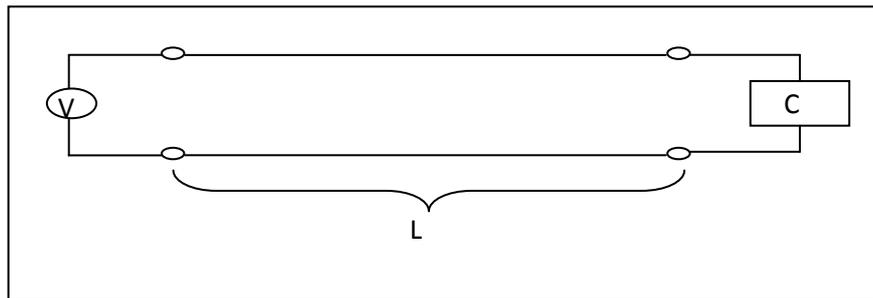


Figura 7.1

Línea de transmisión de hilos paralelos



Figura 7.2

Línea de transmisión coaxial

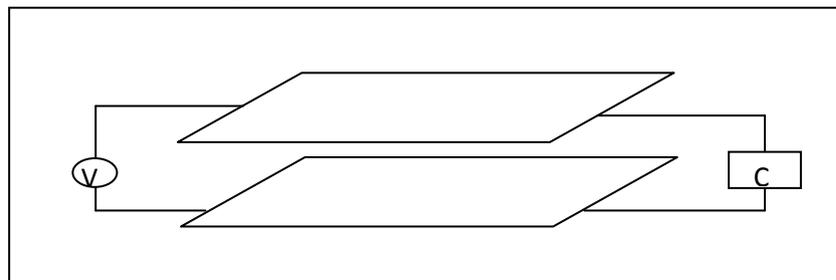


Figura 7.3

Línea de transmisión de Placas paralelas

Al establecer una diferencia de potencial V entre los extremos de una línea de transmisión, de longitud L , conectada a una carga C (figuras 7.1, 7.2 y 7.3) aparece un campo electromagnético (\mathbf{E} - \mathbf{H}) que se propaga por la línea. El modo de propagación de este campo electromagnético es el de ondas transversales electromagnéticas a la dirección de propagación (TEM – transversal electromagnetic mode), que coincide con el eje de la línea. En los modos TEM los campos eléctrico y magnético están contenidos en los planos normales a la línea de transmisión. Se supone, además, que el espacio entre y rodeando a los conductores de la línea es un material dieléctrico lineal y homogéneo de características ϵ , μ y en algunos casos cierta conductividad σ . En el siguiente capítulo se verá que en determinados modos de transporte de energía electromagnética, los campos pueden tener también componentes en la dirección de propagación (guías de onda, cavidades resonantes, fibras ópticas etc...). Lo expuesto requiere que si la dirección de propagación es z , las componentes E_z y H_z sean nulas. Esto es similar a lo que se ha visto en el capítulo anterior para la propagación de ondas planas, con la salvedad que si las ondas planas son uniformes, los campos E y H no varían al moverse por un plano ortogonal a la dirección de propagación, mientras que en nuestro caso los campos no son necesariamente invariantes en dichos planos ortogonales.

7.2 Ecuaciones de campo en las líneas de transmisión de sección constante

La forma de los conductores puede ser cualquiera, la única condición impuesta a la línea de transmisión, es que su sección transversal no varíe en toda su longitud (figura 7.4). En la figura se tienen dos conductores (de secciones distintas y ejes paralelos) uno interior a potencial positivo y otro exterior a potencial negativo.

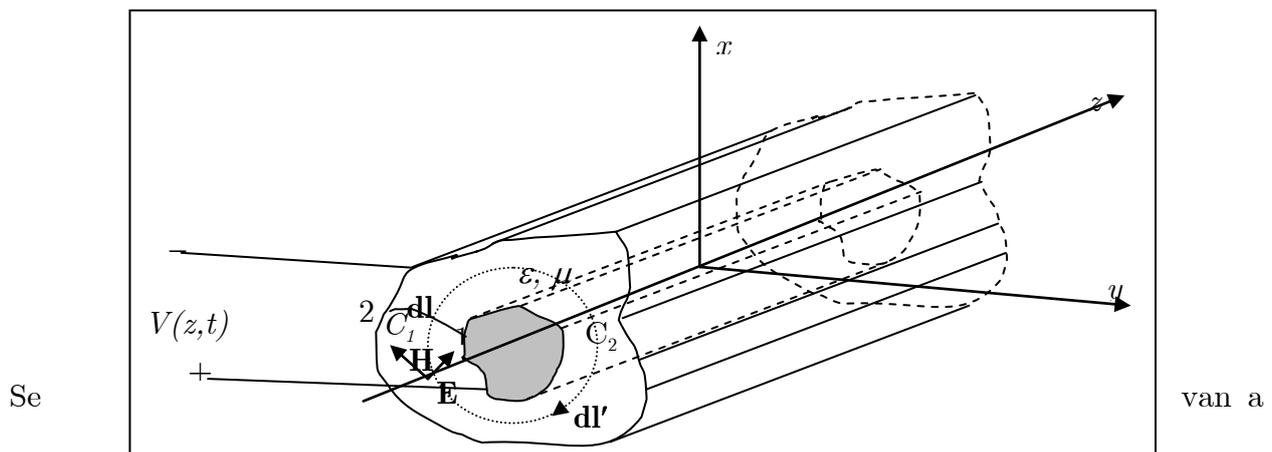


Figura 7.4

Línea de transmisión de dos conductores de ejes paralelos y de sección constante en la dirección perpendicular a los ejes.

determinar las ecuaciones que cumplen los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} en las líneas de transmisión partiendo de las ecuaciones de Maxwell y de la transversalidad de dichos campos (M. Zahn, C. R. Paul *et al*). En los campos y los operadores vectoriales se pueden separar las componentes transversales de la componente longitudinal (z). Se puede entonces utilizar la notación siguiente (el subíndice T indica componente transversal);

Para los campos

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &\equiv \mathbf{E}_T = \mathbf{a}_x E_x + \mathbf{a}_y E_y \\ \mathbf{H} &\equiv \mathbf{H}_T = \mathbf{a}_x H_x + \mathbf{a}_y H_y\end{aligned}\quad (7.1)$$

Para el operador nabla

$$\nabla = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z} = \nabla_T + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}\quad (7.2)$$

Con esta notación las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir como

$$\nabla \times \mathbf{E}_T = 0; \quad \nabla \times \mathbf{H}_T = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{E}_T = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{H}_T = 0\quad (7.3)$$

además se cumple que:

$$a) \quad \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_T = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}_T}{\partial t}; \quad b) \quad \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{a}_z \times \mathbf{H}_T = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial t}\quad (7.4)$$

las ecuaciones (7.4) aparecen al separar componentes en las ecuaciones de Faraday y Ampère. Si se multiplica vectorialmente la ecuación (7.4)a, por \mathbf{a}_z y se aplica la expresión del triple producto vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ y se tiene en cuenta que \mathbf{E}_T es ortogonal al eje z la ecuación queda igual a

$$\frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial z} = \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{a}_z \times \mathbf{H}_T\quad (7.5)$$

el conjunto de ecuaciones (7.3) para las componentes transversales del campo son las ecuaciones de Maxwell para campos estáticos y todos los métodos de resolución aplicables a tales campos pueden usarse para la resolución de las mismas. Por otro lado se sabe que las ecuaciones de Maxwell dependientes del tiempo no son irrotacionales, esto significa que no existe un potencial V unívoco entre los conductores y solo se mantiene constante en secciones perpendiculares a la dirección de la línea. Esto se puede ver pues todo camino cerrado que pase por los dos conductores tiene un flujo de campo \mathbf{H} a no ser que este contenido en un plano paralelo a la dirección de dicho campo, y esos

planos paralelos son los normales a z según nuestra geometría. Esto simplemente significa que en todo tiempo se puede definir un potencial que será función de z en caminos entre los dos conductores que estén sobre planos normales a la dirección de la línea (en la figura 2.4, el camino de línea continua C_1 entre el conductor interior y el exterior, -se supone que estamos en la sección de la línea correspondiente al plano $z = cte$ -). Entonces se cumple que se puede definir un potencial V y una intensidad de corriente I , relacionadas con los campos \mathbf{E}_T y \mathbf{H}_T mediante integrales de línea

$$V(z, t) = \int_1^2 \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{l} \quad (7.6)$$

donde como se ha dicho el camino entre los puntos 1 en el primer conductor y 2 en el segundo conductor está sobre un plano $z = cte$ (C_1 en la figura 7.2).

$$I(z, t) = \oint_{C_2} \mathbf{H}_T \cdot d\mathbf{l}' \quad (7.7)$$

tomando el camino cerrado de integración C_2 que rodea a uno de los conductores y está situado sobre un plano de z constante, (ver figura 7.4). De la misma forma se pueden calcular *las cargas por unidad de longitud y el flujo del campo \mathbf{H}_T a través de una superficie (por unidad de longitud)*

$$Q(z, t) = \varepsilon \oint_{C_2} \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{l}' \quad (7.8)$$

$$\Lambda(z, t) = \mu \int_1^2 \mathbf{H}_T \cdot (\mathbf{a}_z \times d\mathbf{l}) \quad (7.9)$$

donde como más arriba, las integrales están determinadas para $z = cte$ (insistiendo en que son cantidades por unidad de longitud). Los parámetros macroscópicos, *capacidad por unidad de longitud C y inductancia por unidad de longitud L* , se pueden determinar como simples cocientes de las anteriores cantidades

$$C = \frac{Q(z, t)}{V(z, t)} = \frac{\varepsilon \oint_{C_2} \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{l}'}{\int_1^2 \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{l}} \quad (7.10)$$

$$L = \frac{\Lambda(z, t)}{I(z, t)} = \frac{\mu \int_1^2 \mathbf{H}_T \cdot (\mathbf{a}_z \times d\mathbf{l})}{\oint_{C_2} \mathbf{H}_T \cdot d\mathbf{l}'} \quad (7.11)$$

las integrales de las expresiones (7.10) y (7.11) se calculan en un plano $z = \text{cte}$. Sin embargo los parámetros macroscópicos C y L no dependen de la coordenada z como se puede ver en el siguiente ejemplo C. R. Paul *et al* (figura 7.5)

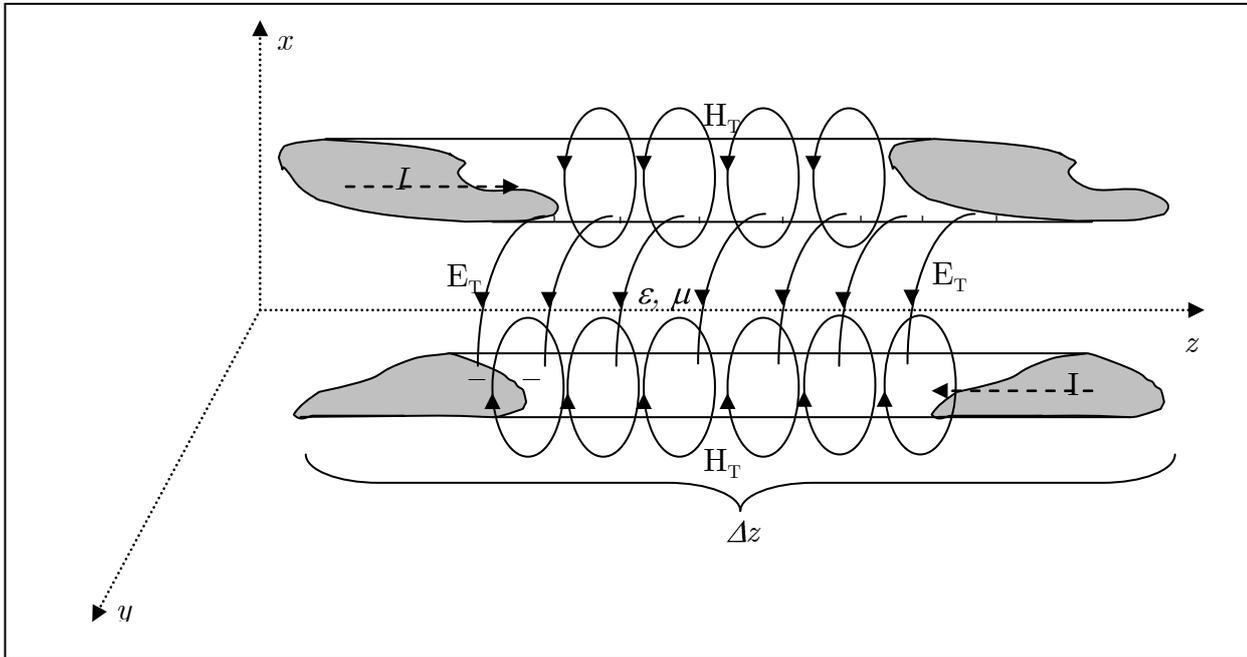


Figura 7.5

Campos eléctrico y magnético en un elemento de
línea de transmisión de hilos paralelos

Si se consideran los conductores como una espira, el campo magnético \mathbf{H}_T se puede considerar ligado a la corriente I a través de una inductancia l que nos define una inductancia por unidad de longitud $L = l / \Delta z \text{ Hm}^{-1}$, dado que la línea es uniforme en toda su longitud esta inductancia por unidad de longitud no depende de la posición en la línea. De la misma forma el campo \mathbf{E}_T se puede considerar como creado por las armaduras de un condensador cuyas placas son los dos conductores en la longitud Δz que da lugar a una capacitancia c independiente de la posición debido a la uniformidad de la línea que a su vez da lugar a una capacidad por unidad de longitud de $C = c / \Delta z \text{ Fm}^{-1}$.

7.3 Ecuaciones de la línea en función de magnitudes macroscópicas

Multiplicando escalarmente los dos miembros de (7.5) por $d\mathbf{l}$, e integrando a lo largo del camino que va de 1 a 2 (C_1), se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\int_1^2 \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{l} \right) = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \int_1^2 \mathbf{H}_T \cdot \mathbf{a}_z \times d\mathbf{l} \right) \quad (7.12)$$

donde se ha empleado la expresión del triple producto mixto, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, y que $d\mathbf{l}$ no depende ni de z ni de t . Substituyendo en (7.12) las expresiones (7.6) y (7.9) se obtiene la expresión

$$\frac{\partial V}{\partial z} = - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (7.13)$$

Tras utilizar (7.11) se obtiene la primera ecuación de la línea en función de las magnitudes macroscópicas V , I y L

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial z} = -L \frac{\partial I}{\partial t}} \quad (7.14)$$

Multiplicando escalarmente la ecuación (7.4)b por $d\mathbf{l}$, e integrando el resultado entre 1 y 2 se tiene la expresión integral

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon \int_1^2 \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{l} \right) = - \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_1^2 \mathbf{H}_T \cdot \mathbf{a}_z \times d\mathbf{l} \right) \quad (7.15)$$

que tras utilizar, como en el caso previo, las expresiones (7.6), (7.9) y (7.11), da lugar a la ecuación

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{L}{\mu} \frac{\partial I}{\partial z} \quad (7.16)$$

que se puede volver a escribir como

$$\frac{\partial I}{\partial z} = - \frac{\varepsilon \mu}{L} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (7.17)$$

Si se multiplica escalarmente por $d\mathbf{l}'$ la ecuación (7.4)a, se integra a lo largo de C_2 y se emplea el triple producto mixto, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\oint_{C_2} \mathbf{E}_T \cdot d\mathbf{l}' \right) = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \oint_{C_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}' \right) \quad (7.18)$$

Utilizando las expresiones (7.7), (7.8) y (7.10) se tiene que

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\varepsilon\mu}{C} \frac{\partial I}{\partial t} \quad (7.19)$$

de (7.14) y (7.19), se obtiene:

$$LC = \mu\varepsilon \quad (7.20)$$

sustituyendo (7.20) en (7.17) se obtiene finalmente la segunda ecuación de la línea en función de las variables macroscópicas V , I y C :

$$\boxed{\frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial V}{\partial t}} \quad (7.21)$$

Si se deriva (7.14) respecto a z y respecto a t se obtienen las nuevas ecuaciones

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -L \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial z} \quad (7.22)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial t} = -L \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad (7.23)$$

y derivando (7.21) respecto a z y respecto a t se obtienen las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = -C \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial z} \quad (7.24)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z \partial t} = -C \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (7.25)$$

substituyendo (7.25) en (7.22) y (7.23) en (7.24) y teniendo en cuenta que la velocidad del campo en el medio dieléctrico es $u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, se obtienen las ecuaciones para el

potencial y la corriente

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}} \quad (7.26)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}} \quad (7.27)$$

que tienen la forma de la ecuación de onda. Por lo tanto se puede afirmar que para una línea de transmisión en la que se ha establecido una corriente mediante un generador, se

crean ondas de potencial y corriente. Las ecuaciones (7.14) y (7.21) son ecuaciones de carácter general cualesquiera que sean las líneas de transmisión (sin pérdidas) con la única salvedad de que mantengan su sección constante. Para su resolución habrá que conocer los valores particulares de los parámetros de la línea L y C . Estos valores se determinarán más adelante para las líneas más usuales.

7.4 Ecuaciones de las líneas de transmisión a partir de parámetros distribuidos

Supongamos en general, que nuestra línea de transmisión tienen pérdidas, esto significa que los conductores no son perfectos (admiten corrientes en su interior o transversales) y el medio dieléctrico que rodea o está entre los conductores también tiene pérdidas (polarización y conductividad no nula). Ambos efectos se pueden representar por dos parámetros distribuidos en la línea (D. K. Cheng; M Zahn; F. T. Ulaby), una *resistencia* R que representará la pérdida en los conductores y una *conductancia* G que caracterizará conductividad de la línea. Los parámetros que aparecen en las líneas sin pérdidas, esto es la *inductancia* L y la *capacitancia* C aparecen igualmente en las líneas con pérdidas. Todos los parámetros se suponen distribuidos a lo largo de la línea y por lo tanto vienen definidos por unidad de longitud. Si nos fijamos en un elemento diferencial de la línea de longitud Δz , se puede sustituir la línea por una representación aproximada de la misma, en función de los parámetros como si fuese un circuito convencional.

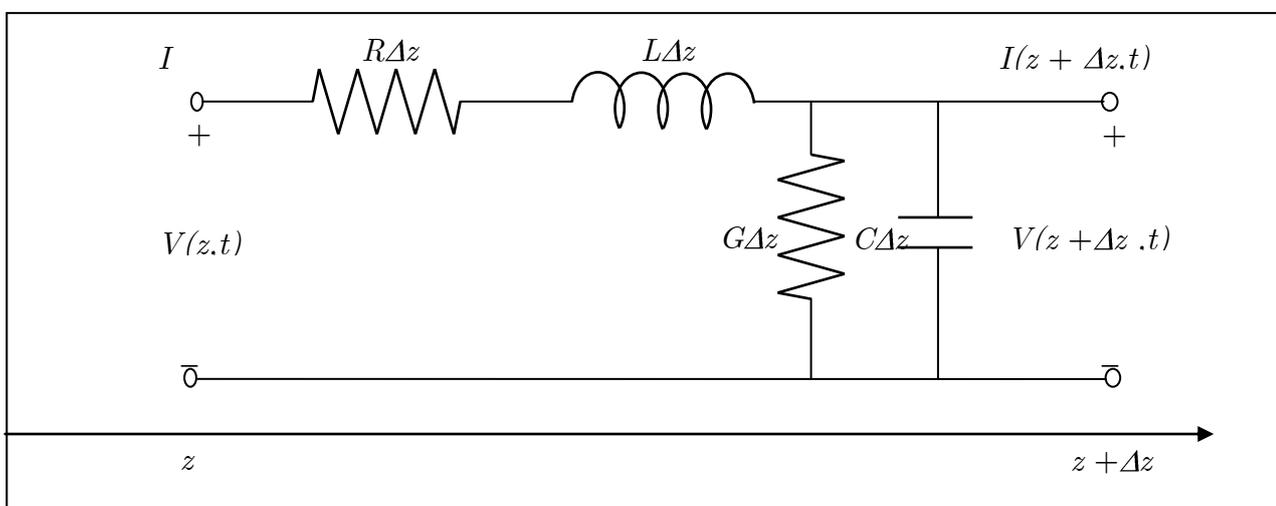


Figura 7.6

Circuito equivalente a un elemento infinitesimal de línea de longitud Δz , con parámetros por unidad de longitud R , L , C y G .

La resistencia va en serie y se opone al movimiento de corriente, lo mismo que la inductancia creada por el campo magnético externo o el que se crea dentro del conductor debido a la corriente en pérdida en su interior. La capacitancia es una impedancia en paralelo y está relacionada con la corriente de desplazamiento entre los conductores considerados como un capacitor, por lo mismo la conductancia está relacionada con la corriente en el medio dieléctrico con pérdidas situado entre o alrededor de los conductores, por eso también va en paralelo. Por supuesto en medios sin pérdidas se cumple que $R = G = 0$. Se van a establecer las ecuaciones de la línea a partir de la variación del potencial y la corriente en una distancia Δz aplicando razonamientos con los elementos de circuito indicados. La pérdida de corriente entre z y $z + \Delta z$ viene dado por la pérdida debida a la corriente que fluye en la capacidad en paralelo (de desplazamiento) y por la corriente que se va por el dieléctrico debido a su conductancia no nula, en estas condiciones se tiene que

$$I(z, t) - I(z + \Delta z) = C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} + G \Delta z V(z, t) \quad (7.28)$$

en donde se ha utilizado que: $Q = CV$; $I = \frac{\partial Q}{\partial t}$; $IR' = V$; $G = \frac{1}{R'}$. Por otra parte la caída de potencial en el tramo $z, z + \Delta z$ se produce por la resistencia R y por la fem inducida que se opone al movimiento de corriente, en esas condiciones se tiene que:

$$V(z, t) - V(z + \Delta z) = L \Delta z \frac{\partial I(z + \Delta z)}{\partial t} + I(z + \Delta z) R \Delta z \quad (7.29)$$

donde se ha usado el hecho de que $fem = -\frac{\partial \Lambda}{\partial t}$; $\Lambda = LI$.

Si se dividen las expresiones (7.28) y (7.29) entre Δz y se toma el límite cuando Δz tiende a cero, se obtienen finalmente las ecuaciones

$$\boxed{\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = -C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} - GV(z, t)} \quad (7.30)$$

$$\boxed{\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} - RI(z, t)} \quad (7.31)$$

ecuaciones que se reducen a (7.21) y (7.14) cuando no hay pérdidas (una aproximación más exacta, a partir de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} , se encuentra en C. R. Paul *et al*). Para el

caso del medio dieléctrico, si es lineal, las pérdidas no hacen perder el carácter transversal a las ondas electromagnéticas que se propagan por la línea.

Las dos ecuaciones (7.30) y (7.31) son dos ecuaciones diferenciales acopladas. Para conseguir dos ecuaciones diferenciales en una única variable, se debe derivar cada una de ellas respecto a z y respecto a t resultando después de las oportunas sustituciones las dos siguientes ecuaciones

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + RC + GL \frac{\partial V}{\partial t} + GRV \quad (7.32)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + RC + GL \frac{\partial I}{\partial t} + GRI \quad (7.33)$$

Las ecuaciones (7.32) y (7.33) son conocidas como las *ecuaciones del telegrafista*. Sus soluciones son ondas que se propagan en el tiempo con cierta amortiguación. Si no hay pérdidas se reducen a las ecuaciones de onda (7.26) y (7.27). Si L o C son cero (C. A. Holt; S. V. Marshall *et al*), las derivadas segundas se anulan y las ecuaciones resultantes son del tipo ecuaciones de difusión cuyas soluciones decrecen rápidamente, por ello es básico que en el transporte de energía electromagnética aparezcan dichos parámetros. Como ya se ha visto, el parámetro L está relacionado con la derivada temporal del campo \mathbf{B} , mientras que la variación temporal del campo de desplazamiento \mathbf{D} se relaciona con la capacitancia de la línea C . En definitiva es necesaria la existencia de dichos parámetros pues en las inductancias y capacitancias es donde se almacena la energía electromagnética, energía que los campos \mathbf{H} y \mathbf{E} se van intercambiando según avanza la onda en la línea. Estas ecuaciones diferenciales son en general difíciles de resolver, pero si se tiene en cuenta el teorema de la integral de Fourier que afirma que toda función puede ponerse en función de determinadas integrales de funciones con determinados coeficientes en senos y cosenos (si la función de partida es periódica las integrales se convierten en la serie de Fourier). Como las ecuaciones (7.32) y (7.33) son lineales, basta conocer su comportamiento con funciones armónicas para tener una solución en el caso general.

Sea entonces un campo electromagnético armónico que da lugar a potenciales y corrientes de tipo seno o coseno, sabemos ya que entonces V e I , se pueden definir como

$$V = \hat{V}e^{j\omega t}; \quad I = \hat{I}e^{j\omega t} \quad (7.34)$$

Si se substituyen las expresiones dadas en (7.34) en (7.32) y (7.33), se obtienen, tras eliminar la parte temporal $e^{j\omega t}$, las ecuaciones fasoriales siguientes:

$$\frac{d^2\hat{V}}{dz^2} = GR\hat{V} + jRC + GL\omega\hat{V} - LC\omega^2\hat{V} \quad (7.35)$$

$$\frac{d^2\hat{I}}{dz^2} = GR\hat{I} + jRC + GL\omega\hat{I} - LC\omega^2\hat{I} \quad (7.36)$$

donde se ha tenido en cuenta que $LC = 1/u^2$. Las derivadas dejan de ser parciales al haber eliminado la parte temporal, la única variable es z . Las ecuaciones (7.35) y (7.36) se pueden escribir de forma más compacta

$$\frac{d^2\hat{V}}{dz^2} = R + j\omega L \quad G + j\omega C \quad \hat{V} \quad (7.37)$$

$$\frac{d^2\hat{I}}{dz^2} = R + j\omega L \quad G + j\omega C \quad \hat{I} \quad (7.38)$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable z , que podemos rescribir como

$$\frac{d^2\hat{V}}{dz^2} = \gamma^2\hat{V} \quad (7.39)$$

$$\frac{d^2\hat{I}}{dz^2} = \gamma^2\hat{I} \quad (7.40)$$

donde γ es una cantidad compleja con dimensión m^{-1} que es conocida como *constante de propagación*

$$\gamma = \sqrt{R + j\omega L \quad G + j\omega C} = \alpha + j\beta \quad (7.41)$$

La constante α es la *constante de atenuación* con dimensiones de m^{-1} y su unidad es el *neper m^{-1}* . El neper es una cantidad adimensional. La constante β recibe el nombre de *constante de fase* y su dimensión es m^{-1} y con unidades de *rad m^{-1}* . De las ecuaciones (7.39) y (7.40) se pueden deducir más directamente las ecuaciones (7.30) y (7.31), pues tras substituir en ellas (7.34) y derivar respecto de z la ecuación (7.31) se obtiene la ecuación

$$\frac{d^2\hat{V}}{dz^2} = - R + j\omega L \quad \frac{d\hat{I}}{dz} \quad (7.42)$$

y como

$$\frac{d\hat{I}}{dz} = -G + j\omega C \hat{V} \quad (7.43)$$

tras sustituir (7.43) en (7.42) se obtiene (7.37). Siguiendo un proceso similar se deduciría (7.38). La expresión $Z = (R + j\omega L)$ ohm m^{-1} es la impedancia por unidad de longitud y la expresión $Y = (G + j\omega C)$ mho m^{-1} es la admitancia por unidad de longitud. Con estos parámetros, las ecuaciones quedan de la siguiente forma

$$\frac{d^2\hat{V}}{dz^2} = ZY\hat{V} \quad (7.44)$$

$$\frac{d^2\hat{I}}{dz^2} = ZY\hat{I} \quad (7.45)$$

donde por supuesto $ZY = \gamma^2$.

7.5 Solución general de la ecuación de ondas para funciones armónicas

Las ecuaciones (7.39) y (7.40) son ecuaciones diferenciales ordinarias con una constante de separación γ compleja. Sus soluciones son del tipo suma de dos soluciones

$$\hat{V}(z) = \hat{V}^+(z) + \hat{V}^-(z) = \hat{V}_0^+ e^{-\gamma z} + \hat{V}_0^- e^{\gamma z} \quad (7.46)$$

$$\hat{I}(z) = \hat{I}^+(z) + \hat{I}^-(z) = \hat{I}_0^+ e^{-\gamma z} + \hat{I}_0^- e^{\gamma z} \quad (7.47)$$

donde por supuesto $\pm\gamma$ es la solución de la ecuación característica de las ecuaciones, y

$$\hat{V}_0^+, \hat{V}_0^-, \hat{I}_0^+ \text{ e } \hat{I}_0^- \quad (7.48)$$

son constantes complejas, la unidad de \hat{V}_0^+ y \hat{V}_0^- es el voltio y la de \hat{I}_0^+ e \hat{I}_0^- es el amperio. Los exponentes de (7.46) y (7.47) son adimensionales. Si nos fijamos en la solución \hat{V}^+ y explicitamos la amplitud y la fase de la constante $\hat{V}_0^+ = V_0^+ e^{j\theta_{V^+}}$, la solución se puede poner como

$$\hat{V}^+(z) = V_0^+ e^{j\theta_{V^+}} e^{-\gamma z} = V_0^+ e^{j\theta_{V^+}} e^{-\alpha + j\beta} z = V_0^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z - \theta_{V^+}} \quad (7.49)$$

la solución tiene una amplitud exponencialmente decreciente y un cierto desfase, si se convierte al dominio temporal, se tiene que

$$V_c^+(z, t) = \hat{V}^+(z) e^{j\omega t} = V_0^+ e^{-\alpha z} e^{j\omega t - \beta z + \theta_{V^+}} \quad (7.50)$$

El potencial se obtiene tomando la parte Real de $V_c(z, t)$,

$$V^+(z, t) = V_0^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_{V^+}) \quad (7.51)$$

El argumento del coseno es la fase de la onda y por lo tanto, los puntos de fase constante para distintos tiempos y localizaciones son los que verifican que

$$cte = \Psi = \omega t - \beta z + \theta_{V^+} \quad (7.52)$$

despejando z , se tienen los puntos en los que la fase es la misma al variar el tiempo:

$$z = \frac{\omega}{\beta} t + \frac{\theta_{V^+}}{\beta} + \frac{\Psi}{\beta} \quad (7.53)$$

cuando t aumenta, z crece, esto significa que la posición de fase constante se va moviendo hacia las z crecientes, es decir la onda progresa según aumenta el tiempo. La velocidad de esta progresión se obtiene fácilmente derivando respecto a t . El resultado es que la velocidad de avance de un frente de la onda (en una posición fija) vale

$$u_\varphi = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \text{ m s}^{-1} \quad (7.54)$$

Por otro lado en un tiempo fijo, la amplitud de la onda V^+ va disminuyendo con z , pues está afectada por la cantidad $e^{-\alpha z}$, figura 7.7.

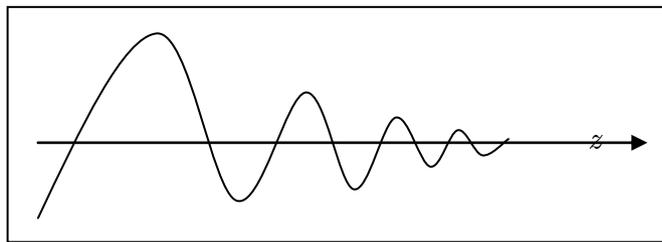


Figura 7.7

Forma de la onda $V^+(z, t = cte)$

Para z fijo la onda se comporta de forma cosenoidal al variar t , figura 7.8.

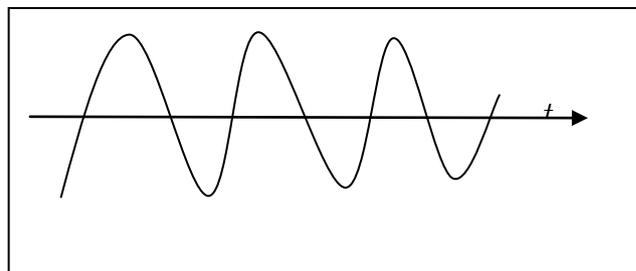


Figura 7.8

Forma de la onda $V^+(z = cte, t)$

Para t variable la onda se va moviendo hacia la derecha, figura 7.9

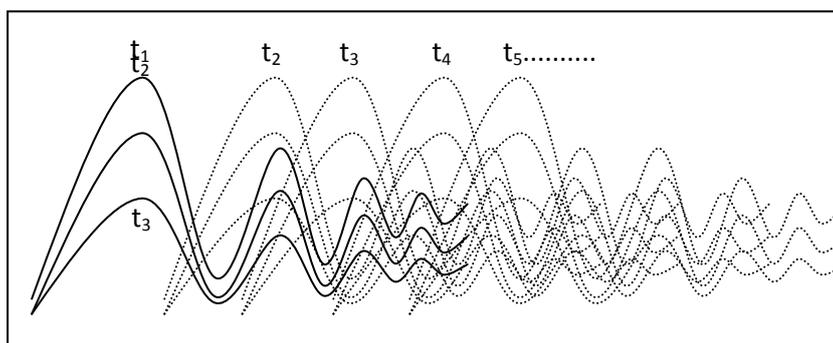


Figura 7.9
Forma general de la onda

Lo que se ha dicho para la onda $\hat{V}^+(z)$ (onda incidente) se puede repetir para la onda $\hat{V}^-(z)$ (onda reflejada), en la fase Ψ el término βz es positivo, pero como los valores de z se mueven en sentido contrario al de la dirección de la onda incidente resulta una situación simétrica a la estudiada. Se tiene una onda progresiva, que se acerca hacia el *generador de las ondas*, esta onda es además de amplitud decreciente ($z < 0$). Por supuesto para que exista tal onda ha tenido que tener un origen, y su origen será cualquier *carga* (veremos que no adaptada) colocada al final de la línea, cuyo efecto es el de hacer las veces de “espejo” sobre la onda incidente produciendo la onda reflejada que se moverá hacia la carga con la misma velocidad u_φ que la onda incidente. La onda reflejada, a su vez llegará a la carga origen (y si no está adaptada) a su vez creará una nueva onda reflejada (incidente). Se verá que en las sucesivas reflexiones la forma de la onda se mantiene pero su amplitud puede variar. Por supuesto si la línea de transmisión es infinita la onda reflejada no puede existir (téngase en cuenta que la solución $V^-(z, t)$ solo tiene sentido si $z < 0$, pues en caso contrario la amplitud de tal onda crecería indefinidamente y con ella la energía transportada por la onda – hasta ser infinita-, cosa que evidentemente está en contra de la experiencia).

Todo lo expuesto, hasta ahora, para la onda de potencial en la línea de transmisión, puede asimismo aplicarse para las ondas de corriente (incidente y reflejada). Tanto el potencial, V , medido en un punto (z, t) como la intensidad de corriente, I , es la suma de todas las ondas incidentes y reflejadas en ese lugar e instante. También queda claro

estudiando la solución, que el potencial entre los dos conductores no es constante como se ha indicado más arriba. De las cuatro constantes \hat{V}_0^+ , \hat{V}_0^- , \hat{I}_0^+ e \hat{I}_0^- , que aparecen en las soluciones de las ecuaciones (7.39) y (7.40), solo dos son realmente independientes, como se puede comprobar directamente de las ecuaciones

$$\frac{d\hat{V}}{dz} = -R + j\omega L \hat{I} \Rightarrow \hat{I} = -\frac{1}{Z} \frac{d\hat{V}}{dz}; \quad \frac{d\hat{I}}{dz} = -G + j\omega C \hat{V} \Rightarrow \hat{V} = -\frac{1}{Y} \frac{d\hat{I}}{dz} \quad (7.55)$$

Si en la ecuación (7.55) se sustituyen los valores de \hat{V} e \hat{I} de las ecuaciones (7.46) y (7.47), se tiene que (se ha eliminado el subíndice cero por comodidad)

$$\hat{V}^+ e^{-\gamma z} + \hat{V}^- e^{\gamma z} = \frac{\gamma}{Y} \hat{I}^+ e^{-\gamma z} - \frac{\gamma}{Y} \hat{I}^- e^{\gamma z} \quad (7.56)$$

esta expresión solo es posible si los coeficientes de las exponenciales son iguales entre sí (los exponentes nunca son cero), esto es si se cumple que:

$$\hat{V}^+ = \frac{\gamma}{Y} \hat{I}^+; \quad \hat{V}^- = -\frac{\gamma}{Y} \hat{I}^- \quad (7.57)$$

por otro lado como $\gamma = \sqrt{ZY}$ se tiene finalmente que

$$\hat{V}^+ = Z_0 \hat{I}^+; \quad \hat{V}^- = -Z_0 \hat{I}^- \quad (7.58)$$

donde la cantidad

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R + jL\omega}{G + jC\omega}} \Omega \quad (7.59)$$

es la impedancia característica del medio, y depende de los parámetros macroscópicos de la línea (por unidad de longitud). Nótese que la impedancia característica NO es el cociente de $\hat{V}(z)$ entre $\hat{I}(z)$, voltaje y corriente total en un punto z , sino entre los voltajes y corrientes de la onda incidente o reflejada, además no depende de la longitud de la línea, luego es válida tanto para líneas infinitas como finitas

7.6 Líneas infinitas

Si la línea es infinitamente larga, no puede existir onda reflejada ya que en tal línea, la onda incidente acabaría por desaparecer, en ella se cumple entonces que

$$\hat{V} = \hat{V}^+ e^{\gamma z} = \hat{V}_e e^{\gamma z}; \quad \hat{I} = \hat{I}^+ e^{\gamma z} = \hat{I}_e e^{\gamma z} \quad (7.60)$$

donde \hat{V}_e e \hat{I}_e son el voltaje y la corriente en la entrada de la línea. Las ecuaciones (7.60) nos dicen que en las líneas infinitas la impedancia de la línea es la impedancia característica y esta coincide con el cociente del voltaje y la corriente medidos en la entrada de la línea.

7.6.1 Línea sin pérdidas

Una línea sin pérdidas es aquella en la que R y G son ambas nulas por lo tanto los valores de los parámetros de la línea quedan de la siguiente forma:

La constante de propagación,

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega\sqrt{LC} \quad (7.61)$$

Las constantes de atenuación y fase,

$$\alpha = 0; \quad \beta = \omega\sqrt{LC} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \quad (7.62)$$

La impedancia intrínseca,

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (7.63)$$

que es constante. La longitud de onda y la velocidad de fase son,

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}; \quad u_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (7.64)$$

Donde se ha usado la expresión (7.20) y μ y ε son los parámetros del medio dieléctrico que separa los conductores.

7.6.2 Línea sin distorsión

En la línea sin distorsión se cumple que

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad (7.65)$$

La constante de propagación,

$$\gamma = \alpha + j\beta = R\sqrt{\frac{C}{L}} + j\omega\sqrt{LC} \quad (7.66)$$

La constante de fase la longitud de onda, la velocidad de fase y la impedancia característica son iguales que en el medio sin pérdidas, mientras que la constante de atenuación no es cero, sino que vale

$$\alpha = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad (7.67)$$

La importancia de una línea sin distorsión es que al propagar un paquete de ondas, todas las componentes del paquete (ondas de distintas frecuencias) se mueven a la misma velocidad (al ser β lineal con la frecuencia) y por lo tanto se atenúan con la misma constante, y el paquete no se distorsiona. En el caso general la velocidad de fase y la constante pueden depender de la frecuencia de una forma complicada y los paquetes de onda llegan distorsionados al final de la línea.

En medios no ferro o ferri-magnéticos, $\mu = \mu_0$ y $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$, y, suponiendo línea sin distorsión (en particular línea adaptada), la velocidad de fase vale $u_f = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$, en donde c es la velocidad de la luz en el vacío. La impedancia intrínseca en las líneas típicas, sin distorsión valen en función de los parámetros de la línea:

Línea coaxial $a < b$ radios de los conductores.	$Z_0 = 60 / \sqrt{\varepsilon_r} \ln(b/a)$
Línea de dos conductores paralelos a es el radio de los conductores, h es la distancia entre los conductores.	$Z_0 = (120 / \sqrt{\varepsilon_r}) \ln \left[(h/2a) + \sqrt{(h/2a)^2 - 1} \right]$ $\simeq (120 / \sqrt{\varepsilon_r}) \ln(h/a)$ si $d \gg a$
Línea de placas paralelas a anchura de las placas, h distancia entre las placas.	$Z_0 = (120\pi / \sqrt{\varepsilon_r})(h/a)$

7.6.3 Líneas finitas

En lo sucesivo se va a estudiar el comportamiento de una línea finita de longitud l (figura 7.10), la onda en línea se genera mediante una fuente de tensión \hat{V}_g que tiene una resistencia interna Z_g . Suponemos que la línea se conecta a una carga que se representa por una impedancia de carga Z_L la impedancia de la línea en cualquier punto de la línea se obtiene por aplicación directa de la Ley de Ohm:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} \quad (7.68)$$

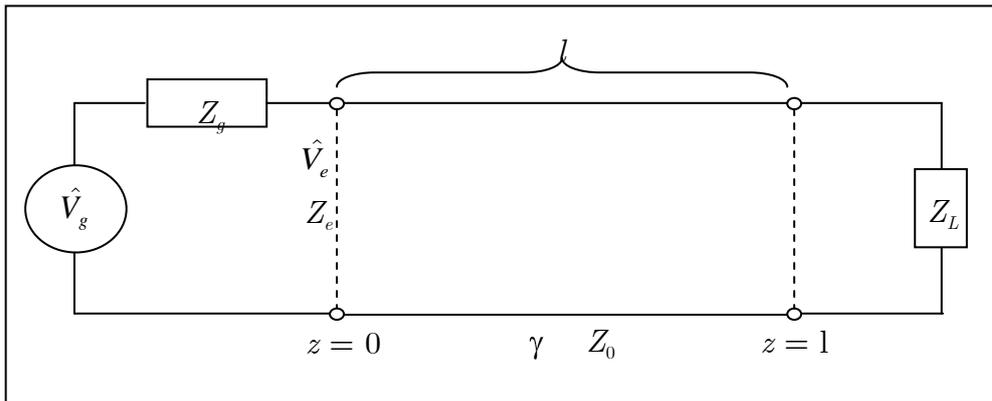


Figura 7.10

Esquema de una línea de transmisión

En la línea de la figura se ha supuesto que tiene unos parámetros propios Z_0 y γ , y que medidos el potencial y la impedancia en la entrada de la línea resultan ser \hat{V}_e y Z_e . En función del voltaje y la corriente de entrada ($z = 0$) las ecuaciones (7.46) y (7.47) convierten en:

$$\hat{V}_e = \hat{V}_0^+ + \hat{V}_0^-; \quad \hat{I}_e = \frac{\hat{V}_0^+}{Z_0} - \frac{\hat{V}_0^-}{Z_0} \quad (7.69)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones en \hat{V}_0^+ y \hat{V}_0^- , resulta

$$\hat{V}_0^+ = \frac{1}{2} \hat{V}_e + \hat{I}_e Z_0; \quad \hat{V}_0^- = \frac{1}{2} \hat{V}_e - \hat{I}_e Z_0 \quad (7.70)$$

de la misma forma el potencial y la corriente medidos en la carga ($z = l$)

$$\hat{V}_L = \hat{V}_0^+ e^{-\gamma l} + \hat{V}_0^- e^{\gamma l}; \quad \hat{I}_L = \frac{\hat{V}_0^+}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{\hat{V}_0^-}{Z_0} e^{\gamma l} \quad (7.71)$$

tras despejar \hat{V}_0^+ y \hat{V}_0^- se obtiene,

$$\hat{V}_0^+ = \frac{1}{2} \hat{V}_L + \hat{I}_L Z_0 e^{\gamma l}; \quad \hat{V}_0^- = \frac{1}{2} \hat{V}_L - \hat{I}_L Z_0 e^{-\gamma l} \quad (7.72)$$

La impedancia que se ve desde la entrada mirando hacia el final de la línea es

$$Z_e = \frac{\hat{V}_e}{\hat{I}_e} = Z_0 \frac{\hat{V}_0^+ + \hat{V}_0^-}{\hat{V}_0^+ - \hat{V}_0^-} \quad (7.73)$$

teniendo en cuenta (7.72), se tiene que

$$Z_e = Z_0 \frac{\hat{V}_L + \hat{I}_L Z_0 e^{\gamma l} + \hat{V}_L - \hat{I}_L Z_0 e^{-\gamma l}}{\hat{V}_L + \hat{I}_L Z_0 e^{\gamma l} - \hat{V}_L - \hat{I}_L Z_0 e^{-\gamma l}} \quad (7.74)$$

si se divide numerador y denominador por \hat{I}_L y teniendo en cuenta que la impedancia de carga es

$$Z_L = \frac{\hat{V}_L}{\hat{I}_L} \quad (7.75)$$

queda

$$Z_e = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 e^{\gamma l} + Z_L - Z_0 e^{-\gamma l}}{Z_L + Z_0 e^{\gamma l} - Z_L - Z_0 e^{-\gamma l}} \quad (7.76)$$

Teniendo en cuenta las formas del seno y coseno hiperbólico,

$$Z_e = Z_0 \frac{Z_L \cosh \gamma l + Z_0 \sinh \gamma l}{Z_0 \cosh \gamma l + Z_L \sinh \gamma l} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma l}{Z_0 + Z_L \tanh \gamma l} \Omega \quad (7.77)$$

expresión que permite determinar la impedancia de entrada conocida la impedancia de carga y los parámetros de la línea (C. A. Holt; D. K. Cheng; S. V. Marshall *et al*). Se puede definir el coeficiente de reflexión en voltaje, como la razón entre la onda incidente y la onda reflejada en la carga

$$\Gamma = \frac{\hat{V}_L^-}{\hat{V}_L^+} \quad (7.78)$$

esto es

$$\Gamma = \frac{\hat{V}_0^- e^{\gamma l}}{\hat{V}_0^+ e^{-\gamma l}} \quad (7.79)$$

que teniendo en cuenta (7.72) queda

$$\Gamma = \frac{e^{\gamma l} \hat{V}_L - \hat{I}_L Z_0 e^{-\gamma l}}{e^{-\gamma l} \hat{V}_L + \hat{I}_L Z_0 e^{\gamma l}} = \frac{\hat{V}_L - \hat{I}_L Z_0}{\hat{V}_L + \hat{I}_L Z_0} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (7.80)$$

utilizando el coeficiente de reflexión en voltaje, la ecuación (7.76), se puede escribir como

$$Z_e = Z_0 \frac{e^{\gamma l} + \Gamma e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} - \Gamma e^{-\gamma l}} = Z_0 \frac{1 + \Gamma e^{-2\gamma l}}{1 - \Gamma e^{-2\gamma l}} \quad (7.81)$$

Por otro lado de (7.80) se obtiene la impedancia de carga conocido el coeficiente de reflexión Γ :

$$Z_L = Z_0 \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \quad (7.82)$$

Se puede definir igualmente un coeficiente de reflexión para la corriente

$$\Gamma_I = \frac{\hat{I}_L^-}{\hat{I}_L^+} = -\Gamma \quad (7.83)$$

esto es, el opuesto al coeficiente de reflexión en voltaje. Algunos autores (C. R. Paul *et al.*; M. Zahn; L. C. Shen *et al.*) utilizan un coeficiente de reflexión más general, pues lo definen para cualquier punto de la línea de transmisión como

$$\Gamma(z) = \frac{\hat{V}_0^- e^{\gamma z}}{\hat{V}_0^+ e^{-\gamma z}} \quad (7.84)$$

y su relación con el coeficiente definido aquí (y mayoritariamente utilizado en la literatura) es simplemente

$$\Gamma(z) = \Gamma e^{-j\beta(z-l)} \quad (7.85)$$

Hasta ahora no se ha utilizado el voltaje generador, ni su resistencia interna (ver figura 7.10), de hecho si la resistencia interna es cero el voltaje $V_g = V_e$, en caso contrario aplicando la ley de Ohm al principio de la línea (infinita o bien en un $t < (2l)/u_\phi$), se tiene que

$$V_e(0,t) = V_g(t) - Z_g I_e(0,t) \quad (7.86)$$

como además se tiene que:

$$I_e(0,t) = Z_0 V_e(0,t) \quad (7.87)$$

se obtiene la siguiente interesante relación (divisor de tensiones)

$$\hat{V}_e = \frac{Z_0}{Z_0 + Z_g} \hat{V}_g \quad (7.88)$$

y por lo tanto

$$\hat{I}_e = \frac{\hat{V}_e}{Z_e} \quad (7.89)$$

donde todas las magnitudes pueden ser complejas. Si la línea es finita y el tiempo es tal que esta ya se ha estabilizado en las sucesivas reflexiones en (7.88) hay que cambiar Z_0 por Z_e . Con lo visto hasta ahora, y conocidos C , L , G , R , \hat{V}_g y Z_g , se puede determinar la impedancia intrínseca, Z_0 , el coeficiente de fase, γ , el coeficiente de reflexión, Γ , la impedancia de entrada, Z_e , el voltaje y la corriente en la entrada, \hat{V}_e e \hat{I}_e , los voltajes, \hat{V}_0^+ y \hat{V}_0^- , y por supuesto $\hat{V}(z,t)$ e $\hat{I}(z,t)$.

7.6.4 Voltajes, intensidades e impedancias en cualquier punto de la línea

De las expresiones de las amplitudes incidente y reflejada (7.70) en el origen ($z = 0$) se pueden expresar el voltaje y la corriente en z en función de los voltajes y corrientes en la entrada de la línea

$$\hat{V}(z) = \frac{1}{2} \hat{V}_e + \hat{I}_e Z_0 e^{-\gamma z} + \frac{1}{2} \hat{V}_e - \hat{I}_e Z_0 e^{+\gamma z} = \hat{V}_e \cosh \gamma z - \hat{I}_e Z_0 \sinh \gamma z \quad (7.90)$$

$$\hat{I}(z) = \frac{1}{2Z_0} \hat{V}_e + \hat{I}_e e^{-\gamma z} - \frac{1}{2Z_0} \hat{V}_e - \hat{I}_e e^{+\gamma z} = \hat{I}_e \cosh \gamma z - \frac{\hat{V}_e}{Z_0} \sinh \gamma z \quad (7.91)$$

teniendo en cuenta (7.89) y (7.81) se puede despejar \hat{I}_e como función de \hat{V}_e y sustituir la expresión obtenida en las igualdades (7.90) y (7.91) para obtener

$$\hat{V}(z) = \hat{V}_e \frac{e^{\gamma l-z} + \Gamma e^{-\gamma l-z}}{e^{\gamma l} + \Gamma e^{-\gamma l}} \quad (7.92)$$

$$\hat{I}(z) = \frac{\hat{V}_e e^{\gamma l-z} - \Gamma e^{-\gamma l-z}}{Z_0 e^{\gamma l} + \Gamma e^{-\gamma l}} \quad (7.93)$$

por supuesto $l - z = z'$ es la distancia desde la carga al punto de observación (C. A. Holt; D. K. Cheng). Lo expuesto se puede repetir para determinar el potencial y a corriente en función de la corriente de entrada en la línea o para determinar el potencial y la corriente en función de sus valores al final de la línea, siguiendo el esquema descrito y utilizando las expresiones (7.72), se tiene que

$$\hat{V}(z') = \frac{1}{2} \hat{V}_L + \hat{I}_L Z_0 e^{\gamma z'} + \frac{1}{2} \hat{V}_L - \hat{I}_L Z_0 e^{-\gamma z'} = \hat{V}_L \cosh \gamma z' + \hat{I}_L Z_0 \sinh \gamma z' \quad (7.94)$$

$$\hat{I}(z') = \frac{1}{2Z_0} \hat{V}_L + \hat{I}_L e^{\gamma z'} - \frac{1}{2Z_0} \hat{V}_L - \hat{I}_L e^{-\gamma z'} = \hat{I}_L \cosh \gamma z' + \frac{\hat{V}_L}{Z_0} \sinh \gamma z' \quad (7.95)$$

aquí, si queremos usar solamente la corriente o el potencial en la carga como parámetro basta usar la relación $\hat{V}_L = \hat{I}_L \hat{Z}_L$ en las ecuaciones (7.94) y (7.95), donde se ha de tener en cuenta además la expresión de la impedancia en la carga (7.82). Con estas transformaciones se tienen las igualdades, en función de \hat{V}_L

$$\hat{V}(z') = \hat{V}_L Z_0 \left(\frac{\cosh \gamma z'}{Z_0} + \frac{\sinh \gamma z'}{Z_L} \right); \quad \hat{I}(z') = \hat{V}_L \left(\frac{\cosh \gamma z'}{Z_L} + \frac{\sinh \gamma z'}{Z_0} \right) \quad (7.96)$$

En función de \hat{I}_L :

$$\hat{V}(z') = \hat{I}_L Z_L \cosh \gamma z' + Z_0 \sinh \gamma z'; \quad \hat{I}(z') = \frac{\hat{I}_L}{Z_0} Z_0 \cosh \gamma z' + Z_L \sinh \gamma z' \quad (7.97)$$

De cualquiera de los pares de expresiones (7.96) y (7.97), se puede deducir el valor de la impedancia en un punto de la línea, que dista z' de la carga, simplemente dividiendo la tensión entre la corriente. Al efectuar la operación, se obtiene

$$Z(z') = \frac{\hat{V}(z')}{\hat{I}(z')} = Z_0 \frac{Z_L \cosh \gamma z' + Z_0 \sinh \gamma z'}{Z_0 \cosh \gamma z' + Z_L \sinh \gamma z'} = Z_0 \frac{Z_L + Z_0 \tanh \gamma z'}{Z_0 + Z_L \tanh \gamma z'} \quad (7.98)$$

Por supuesto, cuando se toma z' igual a cero se obtiene la impedancia de carga Z_L , y cuando z' es igual a la longitud de la línea se obtiene la expresión (7.77) para la impedancia de entrada. La impedancia en un punto que diste z de la entrada de la línea (conocida la tensión en la entrada de la línea) se pueden obtener de (7.92) y (7.93)

$$\hat{V}(z) = \hat{V}_e e^{-\gamma z} \frac{1 + \Gamma e^{-2\gamma(l-z)}}{1 + \Gamma e^{-2\gamma l}} \quad (7.99)$$

$$\hat{I}(z) = \frac{\hat{V}_e}{Z_0} e^{-\gamma z} \frac{1 - \Gamma e^{-2\gamma(l-z)}}{1 + \Gamma e^{-2\gamma l}} \quad (7.100)$$

que divididas entre sí, dan la impedancia a una distancia z del principio de la línea

$$Z(z) = Z_0 \frac{1 + \Gamma e^{-2\gamma(l-z)}}{1 - \Gamma e^{-2\gamma(l-z)}} \quad (7.101)$$

(en todo lo expuesto se ha utilizado el coeficiente de reflexión en voltaje, se recuerda que el coeficiente de reflexión en corriente es el opuesto de éste). Se puede determinar el voltaje y la corriente, en un punto de la línea, en función del voltaje del generador y su resistencia substituyendo en (7.99) y (7.100) el valor de \hat{V}_e dado por (7.88).

7.6.5 Ondas estacionarias en una línea finita. Razón de Onda Estacionaria S

Se define la *razón de onda estacionaria S* como el cociente entre la razón de los valores máximos y mínimos de la magnitud del voltaje o de la corriente en la línea. Para determinar dichos valores nos fijamos en la expresión (7.99) en la que si se multiplica y divide por $e^{\gamma l}$, queda escrita de la forma

$$\hat{V}(z) = \frac{\hat{V}_e e^{\gamma(l-z)}}{e^{\gamma l} (1 + \Gamma e^{-2\gamma l})} \quad (7.102)$$

y para la corriente,

$$\hat{I}(z) = \frac{\hat{I}_e e^{\gamma(l-z)}}{e^{\gamma l} (1 - \Gamma e^{-2\gamma l})} \quad (7.103)$$

fijándonos solo en el potencial, si introducimos la variable z' (distancia desde la carga) la ecuación se transforma en

$$\hat{V}(z') = \frac{\hat{V}_e e^{\gamma z'}}{e^{\gamma l} (1 + \Gamma e^{-2\gamma l})} \quad (7.104)$$

si se halla la magnitud de esta cantidad se tienen que

$$|\hat{V}(z')| = \left| \frac{1}{e^{\gamma l}} \right| \left| \frac{\hat{V}_e e^{\gamma z'}}{1 + \Gamma e^{-2\gamma l}} \right| |1 + \Gamma e^{-2\gamma z'}| \quad (7.105)$$

estudiando el segundo factor del segundo miembro,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\hat{V}_e e^{\gamma z'}}{1 + \Gamma e^{-2\gamma l}} \right| &= \frac{|\hat{V}_e| |e^{\gamma z'}|}{|1 + \Gamma e^{-2\gamma l}|} = \frac{|\hat{V}_e| |e^{\alpha + j\beta z'}|}{|1 + |\Gamma| e^{j\theta_\Gamma} e^{-2\alpha + j\beta l}|} \\ &= \frac{|\hat{V}_e| |e^{\alpha z'}| |e^{-j\beta z'}|}{|1 + |\Gamma| e^{-2\alpha l} e^{j\theta_\Gamma - 2\beta l}|} = \frac{|\hat{V}_e| |e^{\alpha z'}|}{|1 + D|} \end{aligned} \quad (7.106)$$

en esta expresión todas las cantidades son constantes, salvo la que depende de z' , pues el potencial en la entrada tiene una magnitud determinada y el número D es un número complejo de amplitud constante e igual a $|\Gamma| e^{al}$ y fase $\varphi = \theta_\Gamma + \beta l$ constante. Para un z' fijo, la expresión (7.106) es entonces un valor definido y constante. Esto significa que el valor máximo o mínimo dependerá del segundo factor del segundo miembro de (7.105). Para estudiar dicho término lo representaremos como suma de dos números complejos

$$\begin{aligned} |1 + \Gamma e^{-2\gamma z'}| &= |1 + |\Gamma| e^{-2\alpha z'} e^{j(\theta_\Gamma - 2\beta z')}| \\ &= |1 \angle 0^\circ + |\Gamma| e^{-2\alpha z'} \angle \theta_\Gamma - 2\beta z'}| \end{aligned} \quad (7.107)$$

para el estudio del comportamiento de estos dos números complejos acudimos al denominado *diagrama de Crank* en el que representamos los dos números complejos como vectores con componentes sus componentes reales e imaginarias en un plano complejo (x, y) , ver figura 7.11

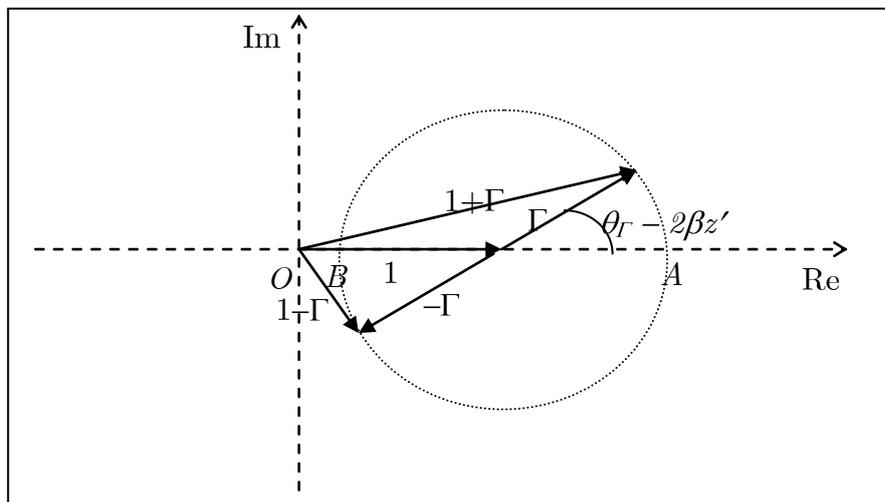


Figura 7.11

En el diagrama de Crank se dibuja uno de los vectores mientras que el otro se deja pivotar sobre el extremo del fijo (describiendo una circunferencia de radio $|\Gamma|$). Gráficamente se ve lo que vale la suma y diferencia de ambos vectores; el valor máximo del módulo del vector (o número complejo) suma se da cuando ambos están alineados sobre el eje real, \overrightarrow{OA} , y el valor mínimo se produce cuando están en oposición sobre dicho eje, \overrightarrow{OB} . Según esto la razón de onda estacionaria es,

$$S = \frac{|\hat{V}(z')|_{max}}{|\hat{V}(z')|_{min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (7.108)$$

en donde se ha simplificado la parte común. Por otro lado despejando el módulo del coeficiente de reflexión en (7.108) se obtiene la interesante relación

$$|\Gamma| = \frac{S - 1}{S + 1} \quad (7.109)$$

Los valores máximos del potencial se obtienen para los valores de z' dados por

$$z' = \frac{\theta_\Gamma \pm 2\pi n}{2\beta} \quad \text{con } n = 0, 1, \dots \quad (7.110)$$

y los valores mínimos en

$$z' = \frac{\theta_\Gamma \pm \pi(2n + 1)}{2\beta} \quad \text{con } n = 0, 1, \dots \quad (7.111)$$

7.6.6 Línea sin pérdidas

Se ha indicado que una línea no tiene pérdidas si $R = G = 0$, en ese caso la constante de onda γ es puramente imaginaria y se puede escribir como $j\beta$, con $\beta = \omega\sqrt{LC}$ en estas condiciones, la impedancia de entrada se escribe como

$$Z_e = R_0 \frac{Z_L + jR_0 \tan \beta l}{R_0 + jZ_L \tan \beta l} \quad (7.112)$$

en donde se ha utilizado el hecho de que en las líneas sin pérdidas la impedancia característica es puramente resistiva, y por lo tanto real, y que $\tanh j\beta l = j \tan \beta l$. En las líneas sin pérdidas la ecuación (7.104) se transforma en

$$\hat{V}(z') = \frac{\hat{V}_e e^{j\beta z'}}{e^{j\beta l} 1 + \Gamma e^{-j2\beta l}} 1 + \Gamma e^{-j2\beta z'} \quad (7.113)$$

y de manera similar se puede comprobar que para la corriente, la expresión es

$$\hat{I}(z') = \frac{\hat{I}_e e^{j\beta z'}}{e^{-j\beta l} 1 - \Gamma e^{-j2\beta l}} 1 - \Gamma e^{-j2\beta z'} \quad (7.114)$$

pues α es en este caso cero, por lo tanto el desarrollo hecho en el epígrafe anterior es totalmente válido independientemente del valor de z' (la parte común a los valores máximos y mínimos del potencial ya no es función de z') y se tiene el mismo valor de S . Lo que se aparece es una onda estacionaria con máximos y mínimos en puntos fijos. Como se sabe que $\beta = (2\pi) / \lambda$, las relaciones (7.110) y (7.111), se convierten en

$$z'_{max} = \theta_{\Gamma} \frac{\lambda}{4} \pm n \frac{\lambda}{2} \text{ con } n = 0, 1, \dots \quad (7.115)$$

$$z'_{min} = \theta_{\Gamma} \frac{\lambda}{4} \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2} \text{ con } n = 0, 1, \dots \quad (7.116)$$

por simple diferencia se ve que la distancia entre dos máximos o mínimos consecutivos es de media longitud de onda y que la diferencia entre un máximo y el siguiente mínimo es de un cuarto de longitud de onda

7.6.7 Casos especiales

En esta sección se van a estudiar algunos casos especiales de las cuestiones abordadas en los apartados previos, como por ejemplo, es el estudio de una línea acabada en cortocircuito; en circuito abierto o con una resistencia puramente resistiva en la carga entre otros. En todos los casos supondremos líneas sin pérdidas, si no se indica lo contrario.

7.6.8 Línea de transmisión terminada en una carga resistiva

Se va a estudiar en primer lugar, el comportamiento de una línea de transmisión finita sin pérdidas cuya carga es una resistencia pura, esto es $Z_L = R_L$. En estas condiciones, y dado que $Z_0 = R_0$ es real en las líneas sin pérdidas, el coeficiente de reflexión Γ es real y

por lo tanto no aparece ningún corrimiento de fase en el potencial o la corriente debido a la reflexión, del diagrama de Crank se deduce que los máximos del potencial (mínimos de la corriente), se producen en $z' = 0$. Es fácil ver, de las expresiones (7.113) y (7.114), que el máximo del potencial se produce en el mismo punto z' que el mínimo de la corriente, tomando módulos,

$$|\hat{V}(z')| = \frac{|\hat{V}_e|}{|1+D|} |1 + \Gamma e^{-j2\beta z'}| = a |1 + \Gamma e^{-j2\beta z'}|; \quad |\hat{I}(z')| = \frac{|\hat{I}_e|}{|1-D|} |1 - \Gamma e^{-j2\beta z'}| = b |1 - \Gamma e^{-j2\beta z'}| \quad (7.117)$$

y con el diagrama de Crank se puede ver que a un valor máximo de V le corresponde un valor mínimo de I y viceversa (no olviden que Γ es real y ambos vectores estarán sobre el eje x) a y b son constantes reales y $D = \Gamma e^{-j2\beta l}$. Si $R_L > R_0$, Γ es positivo y el primer máximo del potencial y el mínimo de la corriente se dan en la carga figura 7.12-a. Para $R_L < R_0$, Γ es negativo, el potencial tiene el primer mínimo y la corriente el primer máximo en la carga 7.12-b. Por último si $R_L = R_0$, la línea está *adaptada*, Γ es cero, no hay reflexiones y los voltajes y corrientes son idénticos a sus valores en la entrada de la línea (ver figura 7.12).

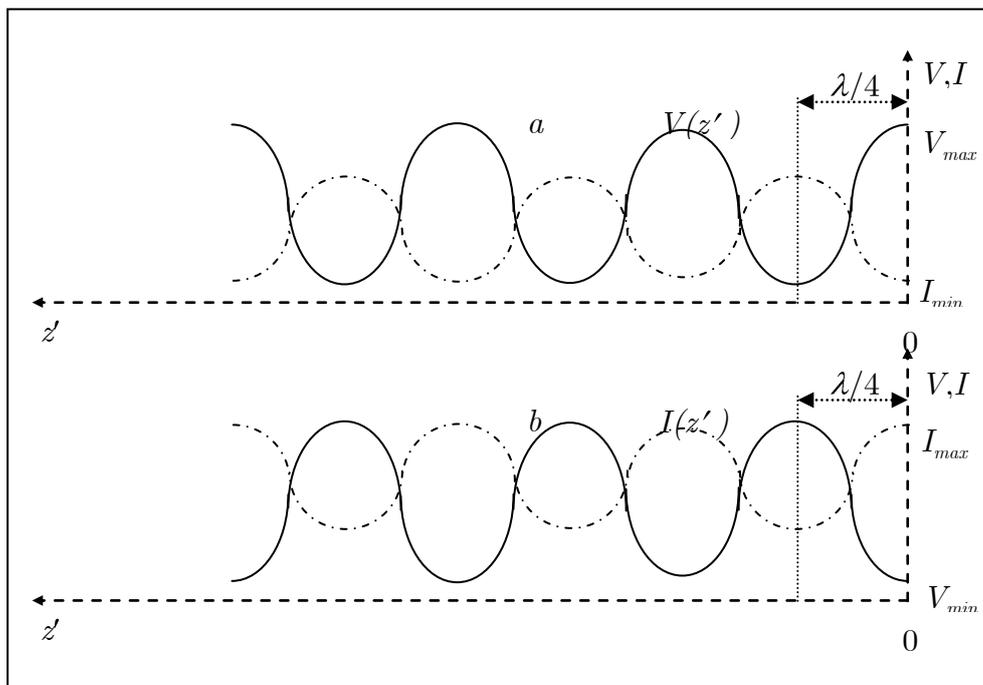


Figura 7.12

Línea de transmisión con carga real

7.6.9 Línea de transmisión en circuito-abierto

En un circuito abierto Z_L es igual a infinito, entonces la impedancia de entrada, (7.112), tras tomar el límite, es igual a

$$Z_e = -j \frac{R_0}{\tan \beta l} \quad (7.118)$$

la impedancia, cuya parte real es cero y la imaginaria no lo es, es de tipo reactivo, y será una reactancia inductiva o capacitiva según el signo de β (+ o - respectivamente). En el circuito en abierto, el coeficiente de reflexión es uno pues la impedancia de carga es infinita y por lo tanto la corriente en la carga es cero; existen ondas reflejadas (de hecho la reflexión es total al ser $\Gamma = 1$). Para ver la forma de la onda recurrimos a la solución en su forma más general, supuesto ya conocidos los coeficientes (en este caso en función de los valores en la carga, (7.72) para usar el sistema de referencia con origen en ella) y utilizando en la solución general el coeficiente de reflexión

$$V(z') = \hat{V}_0^+ e^{-j\beta z'} + \Gamma e^{+j\beta z'} ; \quad I(z') = \frac{\hat{V}_0^+}{Z_0} e^{-j\beta z'} - \Gamma e^{+j\beta z'} \quad (7.119)$$

en este caso como el coeficiente de reflexión vale uno, tomando valores absolutos resulta

$$|\hat{V}(z')| = |\hat{V}_0^+| |e^{-j\beta z'} + e^{+j\beta z'}| = 2|\hat{V}_0^+| |\cos \beta z'| ; \quad |\hat{I}(z')| = \left| \frac{\hat{V}_0^+}{Z_0} \right| |e^{-j\beta z'} - e^{+j\beta z'}| = 2 \left| \frac{\hat{V}_0^+}{Z_0} \right| |\sin \beta z'| \quad (7.120)$$

Si se representan estos valores, se ve que en la carga el potencial es máximo y la corriente mínima, figura 7.13 en donde $a = |\hat{V}(z')|$ y $b = |\hat{I}(z')|$

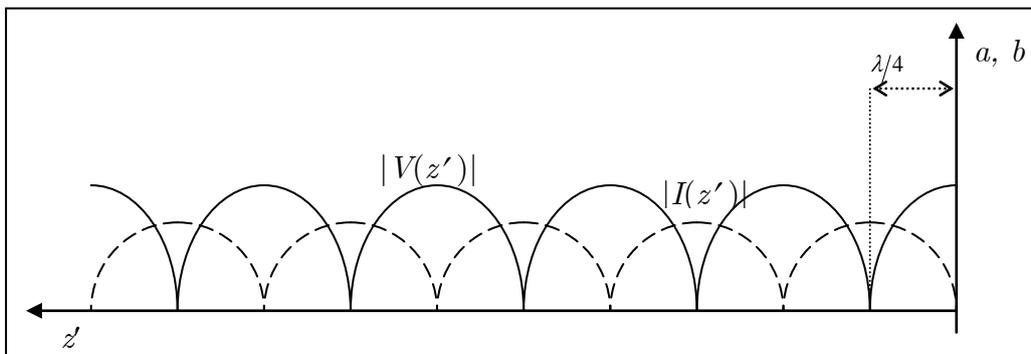


Figura 7.13

Forma de onda para los módulos de la corriente y el potencial en circuito abierto

Sustituyendo $\beta = 2\pi/\lambda$ se puede comprobar que la distancia entre un máximo y un mínimo adyacente es de $\lambda/4$ tanto en voltaje como en corriente. Un caso interesante es el de un circuito en abierto de longitud $l = \lambda/4$ (un cuarto de onda), pues en con dicha longitud de la ecuación(7.118) se obtiene que $Z_e = 0$. Esto es, un circuito abierto de un cuarto de onda hace que la impedancia de entrada actúe como en cortocircuito, si nos fijamos en la gráfica, figura 7.14, de la impedancia de entrada, (puramente reactiva) en circuito abierto *vs* la longitud, , se ve que los mismos valores se repiten cada media longitud de onda y, que en dicho intervalo la reactancia pasa de capacitiva a inductiva yendo de menos infinito a más infinito.

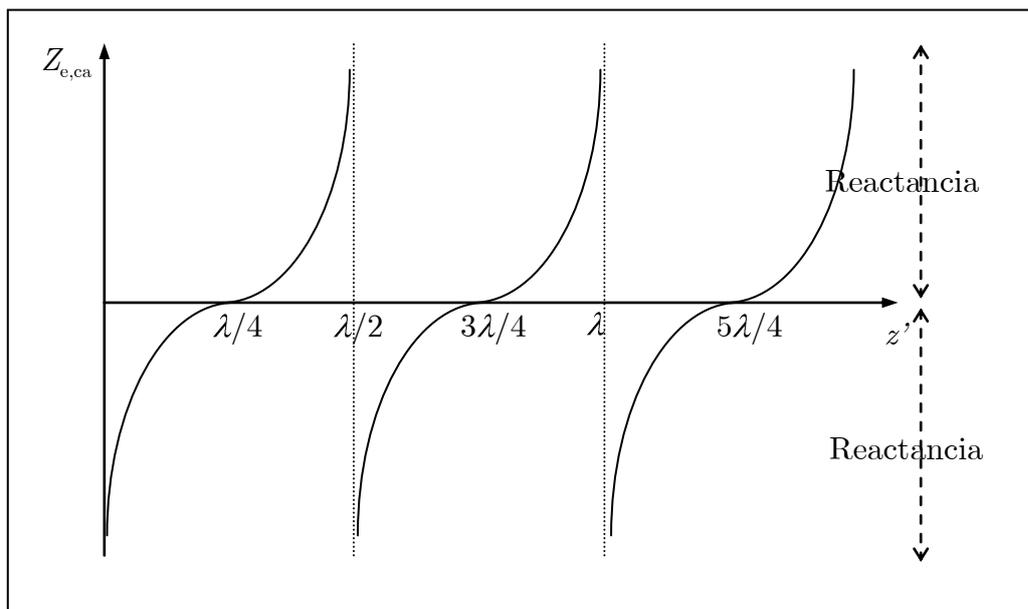


Figura 7.14

Impedancia de entrada en un circuito abierto, $Z_{e,ca}$, en función de la distancia dentro de la línea

7.6.10 Línea de transmisión en corto-circuito

En un circuito en corto-circuito Z_L es igual a cero, entonces la impedancia de entrada (7.112) tras tomar el límite, es igual a

$$Z_e = jR_0 \tan \beta l \quad (7.121)$$

y es una impedancia reactiva, y será inductiva o capacitiva según el valor de β . En el circuito en corto, el coeficiente de reflexión es menos uno, y voltaje en la carga es cero, por supuesto existen ondas reflejadas que dan lugar a una onda estacionaria como en

toda línea finita. Para ver la forma de la onda recurrimos a la solución en su forma más general, (7.119), en este caso como el coeficiente de reflexión vale menos uno, tomando valores absolutos resulta

$$|\hat{V}(z')| = |\hat{V}_0^+| |e^{-j\beta z'} - e^{+j\beta z'}| = 2|\hat{V}_0^+| |\text{sen } \beta z'|; \quad |\hat{I}(z')| = \left| \frac{\hat{V}_0^+}{Z_0} \right| |e^{-j\beta z'} + e^{+j\beta z'}| = 2 \left| \frac{\hat{V}_0^+}{Z_0} \right| |\cos \beta z'| \quad (7.122)$$

Si se representan estos valores, se ve que en la carga el potencial es máximo y la corriente mínima, figura 7.15 en donde $a = |\hat{V}(z')|$ y $b = |\hat{I}(z')|$

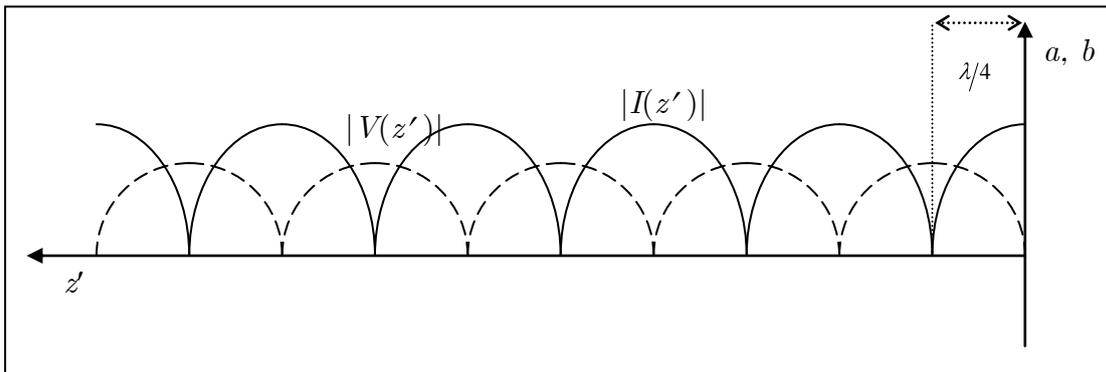


Figura 7.15

Forma de onda para los módulos de la corriente y el potencial en corto-circuito

Cambiando $\beta = 2\pi/\lambda$ se puede comprobar que la distancia entre un máximo y un mínimo adyacente es de $\lambda/4$ tanto en voltaje como en corriente. Un caso interesante es el de la denominada línea de longitud $l = \lambda/4$, pues en un circuito abierto de longitud l , por (7.121), se tiene que $Z_e = \infty$, esto es un circuito abierto de un cuarto de onda hace que la impedancia de entrada actúe como un circuito en abierto, de hecho si nos fijamos en la gráfica de la impedancia de entrada, (puramente reactiva) en corto-circuito frente a la longitud, figura 7.16, se ve, al igual que veíamos en el circuito en abierto, que los mismos valores se repiten cada media longitud de onda y, que en dicho intervalo la reactancia pasa de capacitiva a inductiva yendo de menos infinito a más infinito.

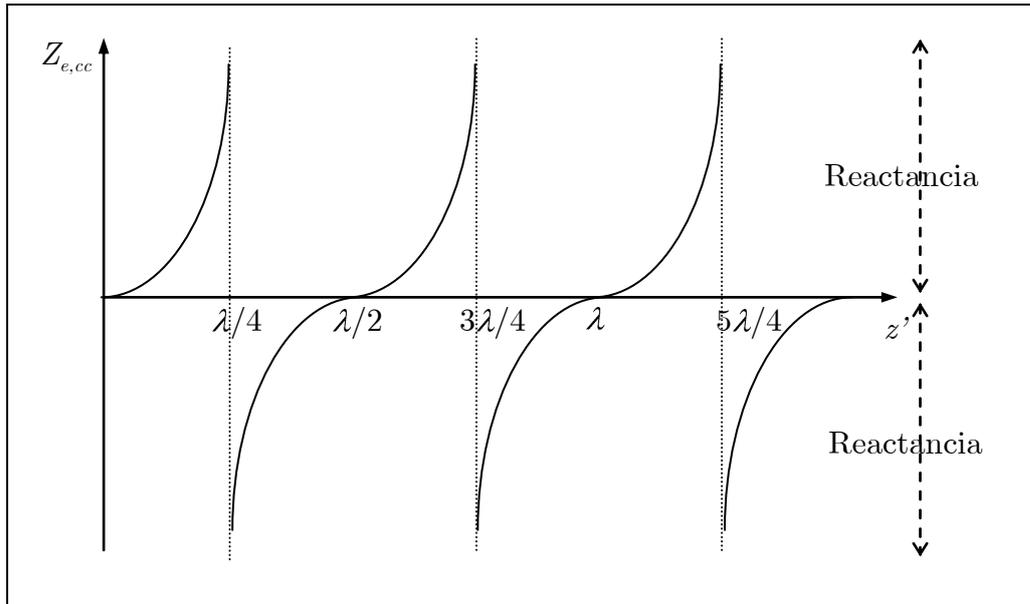


Figura 7.16

 $Z_{e,cc}$ vs z'

Si la fase es tal que la tangente es positiva, la línea aparece como inductiva con una impedancia de entrada $Z_{e,cc}$, que se puede sustituir por un inductor L' cuya impedancia equivalga a la de entrada, esto es:

$$j\omega L' = jZ_0 \tan \beta l, \text{ si } \tan \beta l \geq 0 \quad (7.123)$$

de donde se puede deducir tanto el valor de L' , como longitud que debe tener la línea en corto para simular tal inductancia en la entrada

$$l = \frac{1}{\beta} \tan^{-1} \left(\frac{\omega L'}{Z_0} \right) \quad (7.124)$$

Si la fase βl es tal que la tangente es negativa la reactancia será capacitiva,

$$\frac{-j}{\omega C'} = jZ_0 \tan \beta l, \text{ si } \tan \beta l \leq 0 \quad (7.125)$$

y se puede hacer que el circuito en corto funcione como un condensador de capacidad C' para determinada longitud l (F. T. Ulaby; S. V. Marshall *et al*; C. R. Paul *et al*; D. K. Cheng).

7.6.11 Línea de transmisión con cualquier carga Z_L

Para una impedancia de carga cualquiera, se verifica la expresión (7.112), y, es la expresión que se debe emplear para determinar la impedancia de entrada. La única diferencia con los casos estudiados es que el coeficiente de reflexión (en voltaje o su opuesto, en corriente) no es real y por lo tanto aparece una fase θ_r en la onda que se refleja en la carga. Por lo demás los hechos fundamentales estudiados en los casos particulares (resistencia real, circuito abierto o corto-circuito) se verifican con una impedancia compleja, es decir: la distancia entre un mínimo y un máximo adyacentes para las ondas de tensión o de corriente es de $\lambda/4$; el módulo (magnitud) de las ondas de voltaje o corriente es periódico con periodo de $\lambda/2$; las ondas (magnitud y fase) son periódicas con periodo λ y son estacionarias.

7.6.12 Línea de un cuarto de onda

Si se trabaja con una línea de un cuarto de longitud de onda, $l = \lambda/4$, la $\tan(\beta l)$ que aparece en la expresión (7.112) tiende a infinito pues el ángulo βl vale $\pi/2$. Entonces si se toma el límite para la tangente tendiendo a infinito la impedancia de entrada es

$$Z_e = \frac{R_0^2}{Z_L} \quad (7.126)$$

Por ejemplo si la carga es una reactancia pura de tipo inductivo, es decir si $Z_L = j\omega L$, resulta al sustituir en (7.126) que $Z_e = -j \frac{R_0^2}{\omega L}$ y, teniendo en cuenta que en las líneas sin pérdidas $R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$, la impedancia de entrada en la línea valdrá $Z_e = -j \frac{1}{\omega C}$, expresión que indica su carácter puramente capacitivo. Es igualmente sencillo comprobar que si la impedancia de carga es puramente capacitiva, la impedancia de entrada resulta ser inductiva. Es importante remarcar que la impedancia de entrada es periódica con la distancia, esto se debe a la periodicidad de la tangente con periodo $n\pi$, teniendo en cuenta que se cumple que $\beta = (2\pi)/\lambda$, el periodo de la impedancia a lo largo de la línea será de media longitud de onda, es decir

$$Z_e(z) = Z_e(z \pm \lambda/2) \quad (7.127)$$

7.6.13 Líneas adaptadas

Se dice que una línea está adaptada si $Z_L = Z_0$, el coeficiente de reflexión Γ , (7.80) es cero y por consiguiente la impedancia de entrada Z_e , es siempre igual a la impedancia intrínseca Z_0 y esto es válido, independientemente de que la línea sea infinita o no, como se puede comprobar de la expresión (7.81) y por lo tanto tampoco existe posibilidad de reflexión en la impedancia de entrada (lo cual era ya obvio pues no existe onda incidente sobre ella). De las expresiones generales del voltaje y la corriente, teniendo en cuenta que $\Gamma = 0$, y que $Z_0 = Z_L = Z_e$, la forma del potencial y la corriente en todo punto igual a

$$\hat{V}(z) = \hat{V}_e e^{-\gamma z}; \quad \hat{I}(z) = \frac{\hat{V}_e}{Z_0} e^{-\gamma z} \quad (7.128)$$

La razón de onda estacionaria, se ha definido como la relación de las magnitudes de los voltajes máximo y mínimo en la onda estacionaria en la línea, en el caso de las líneas adaptadas el módulo del voltaje es constante e igual a

$$|\hat{V}_0^+| = |\hat{V}_0^-| = |\hat{V}_e| = cte \quad (7.129)$$

y a la magnitud de la corriente le sucede lo mismo

$$|\hat{I}| = |\hat{I}_e| = cte \quad (7.130)$$

De lo dicho se infiere directamente que la *razón de onda estacionaria* S es igual a la unidad. En el caso de medios sin pérdidas las ecuaciones (7.128) se transforman en

$$\hat{V}(z) = \hat{V}_e e^{-j\beta z}; \quad \hat{I}(z) = \frac{\hat{V}_e}{Z_0} e^{-j\beta z} \quad (7.131)$$

y en este caso se cumple que el módulo de los fasores de corriente y voltaje son en todo punto iguales a los módulos en la entrada. En la figura 7.17 se puede ver la gráfica de los módulos de la corriente y el voltaje en función de la distancia en la línea.

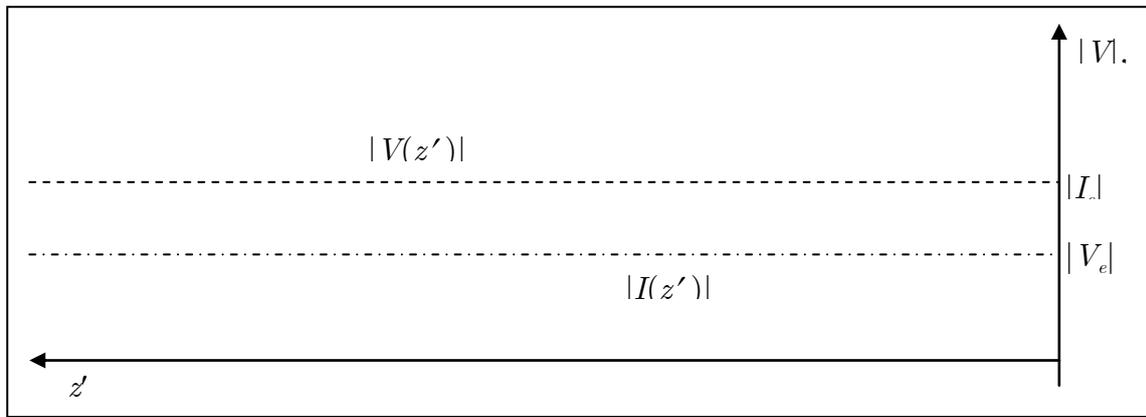


Figura 7.17

Forma de onda para los módulos de la corriente y el potencial en una línea adaptada

7.6.14 Flujo de potencia en las líneas de transmisión sin pérdidas

La potencia promedio en la línea de transmisión se determina de los valores del voltaje y de la corriente

$$P_{prom} = \frac{1}{2} \text{Re} \hat{V}(z') \hat{I}^*(z') = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\hat{V}^+ e^{-j\beta z'} + \Gamma e^{-j\beta z'} \frac{\hat{V}^+}{Z_0} e^{j\beta z'} - \Gamma^* e^{-j\beta z'} \right] \quad (7.132)$$

teniendo en cuenta que la diferencia entre un complejo y su conjugado es una magnitud imaginaria pura, la potencia queda como

$$P_{prom} = \frac{|\hat{V}^+|^2}{2Z_0} (1 - |\Gamma|^2) \quad (7.133)$$

De los dos sumandos de la ecuación (7.133), el primero representa la potencia de la onda incidente y el segundo la potencia asociada a la onda reflejada. La anterior expresión se puede deducir desde el valor instantáneo de la potencia, esto es la potencia calculada en el dominio temporal, los valores de la corriente y el voltaje instantáneos son, para la onda incidente

$$P_{inc}(t) = V_{inc}(t) I_{inc}(t) = \text{Re} \hat{V}_{inc} e^{j\omega t} \text{Re} \hat{I}_{inc} e^{j\omega t} \quad (7.134)$$

como $\hat{V}_{inc} = |\hat{V}^+| e^{j\theta_+}$ e $\hat{I}_{inc} = |\hat{V}^+|/Z_0 e^{j\theta_+}$ se tiene que

$$P_{inc} = \frac{|\hat{V}^+|^2}{Z_0} \cos^2(\omega t + \theta_+) \text{ W} \quad (7.135)$$

de la misma forma para la onda reflejada y teniendo en cuenta que el coeficiente de reflexión es una cantidad compleja, $\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta_+}$, y que la onda reflejada va en la dirección de las z negativas, se tiene que

$$P_{ref} = -|\Gamma|^2 \frac{|\hat{V}^+|^2}{Z_0} \cos^2(\omega t + \theta_+ + \theta_\Gamma) \quad (7.136)$$

siendo la potencia instantánea la suma de ambas potencias

$$P(t) = P_{inc} + P_{ref} = \frac{|\hat{V}^+|^2}{Z_0} \left(\cos^2(\omega t + \theta_+) - |\Gamma|^2 \cos^2(\omega t + \theta_+ + \theta_\Gamma) \right) \quad (7.137)$$

Si se integra la última expresión en un periodo $T = 2\pi/\omega$, teniendo en cuenta que la función \cos^2 es par y su integral en un periodo vale $\frac{1}{2}$, se tiene que

$$P_{prom} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} P(t) dt = \frac{|\hat{V}^+|^2}{2Z_0} \left(1 - |\Gamma|^2 \right) \quad (7.138)$$

expresión que, como debe de ser, coincide con (7.133).

7.7 La carta de Smith

En este apartado se va a estudiar un método gráfico que nos permitirá realizar fácilmente determinados cálculos (aproximados) en líneas de transmisión. El método se va a basar en una identificación entre el coeficiente de reflexión y la impedancia de carga en el plano complejo en el que los ejes real e imaginario se refieren a la parte real e imaginaria de Γ . Sea entonces la cantidad adimensional $z_L = Z_L/Z_0$, conocida como impedancia de carga normalizada. La impedancia normalizada es compleja y por tanto tiene parte real (resistencia normalizada) y parte imaginaria (reactancia normalizada), $z_L = r_L + js_L$. Por otro lado $\Gamma = \Gamma_r + j\Gamma_i$ y la expresión (7.82) se puede escribir de nuevo como

$$z_L = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \Leftrightarrow r_L + js_L = \frac{1 + \Gamma_r + j\Gamma_i}{1 - \Gamma_r - j\Gamma_i} \quad (7.139)$$

si se igualan las partes reales e imaginarias, se obtienen las expresiones

$$\text{a) } r_L = \frac{1 - \Gamma_r^2 - \Gamma_i^2}{1 - \Gamma_r^2 + \Gamma_i^2}; \quad \text{b) } s_L = \frac{2\Gamma_i}{1 - \Gamma_r^2 + \Gamma_i^2} \quad (7.140)$$

Ecuaciones en las que se manifiesta la identificación entre la impedancia de carga y el coeficiente de reflexión de la que se hablaba en el primer párrafo, esto es, para cada valor de Γ , se tiene los correspondientes valores real e imaginario de la impedancia de carga. El recíproco no es cierto, pues dada una impedancia de carga existen infinitos pares de valores, Γ_r, Γ_i , que cumplen las ecuaciones. Si se fija un valor de r_L , por ejemplo 3Ω (al ser una resistencia, tiene que ser cero o positiva) los infinitos pares de valores de la cantidad compleja Γ que hacen que se verifique (7.140)-a, están situados sobre una circunferencia de ecuación

$$\left(\Gamma_r - \frac{r_L}{1 + r_L} \right)^2 + \Gamma_i^2 = \left(\frac{1}{1 + r_L} \right)^2 \quad (7.141)$$

Las consecuencias que se deducen de esta ecuación son

- La circunferencia de la ecuación anterior, tiene el centro, en el punto $\left(\frac{r_L}{1 + r_L}, 0 \right)$, sobre el eje real, y radio $\frac{1}{1 + r_L}$.
- Para cada valor de r_L se tiene una circunferencia; el mínimo valor (cero) da lugar a una circunferencia de radio máximo (uno) y centro en $(0, 0)$; según aumenta r_L , disminuya el radio de la circunferencia.
- Las infinitas circunferencias generadas para los distintos valores de r_L , son tangentes en el punto $(1,0)$ del plano complejo (ver figura 7.18).
- El círculo externo corresponde a $|\Gamma| = 1$, y delimita la región de valores posibles (el coeficiente de reflexión debe estar entre uno y menos uno).

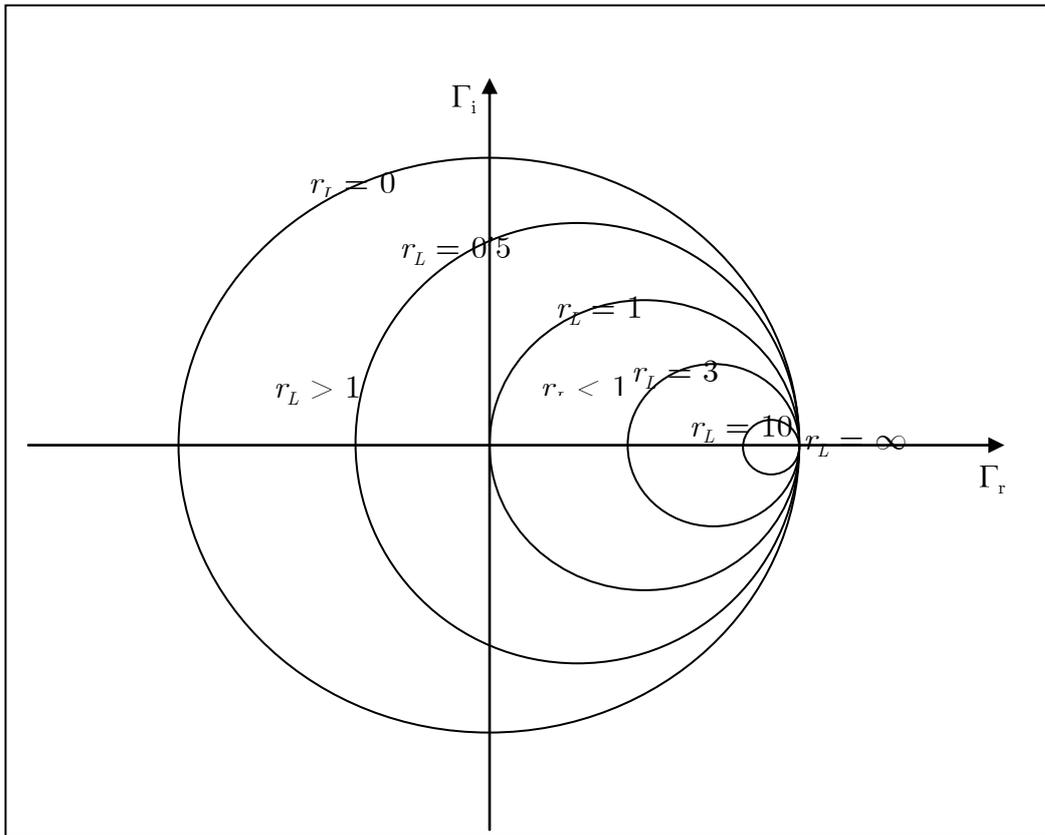


Figura 7.18

Circunferencias de resistencia constante en el plano Γ_r, Γ_i

Si nos fijamos en la ecuación (7.140)-b, tras otra manipulación algebraica, se obtienen las ecuaciones de otras circunferencias

$$\Gamma_r - 1^2 + \left(\Gamma_i - \frac{1}{s_L} \right)^2 = \left(\frac{1}{s_L} \right)^2 \quad (7.142)$$

estas circunferencias tienen las siguientes características

- Dependen del valor de la reactancia que puede ir de $-\infty$ a $+\infty$ (el signo según sea capacitiva o inductiva).
- Los centros de las circunferencias están sobre la recta $\Gamma_r = 1$ en los puntos $\left(1, \frac{1}{s_L} \right)$
- Los radios de las circunferencias son $\frac{1}{s_L}$ (figura 7.19) y decrecen al crecer la reactancia esto es, el centro de las circunferencias se acerca al eje real mientras su radio disminuye.

- Se generan dos grupos de circunferencias simétricas respecto al eje real (un par de circunferencias para s_L y $-s_L$). De las infinitas circunferencias solo interesa la parte común al círculo de radio $|\Gamma| = 1$, pues valores de s_L fuera del círculo suponen módulos del coeficiente de reflexión mayores que uno, lo cual es físicamente absurdo.

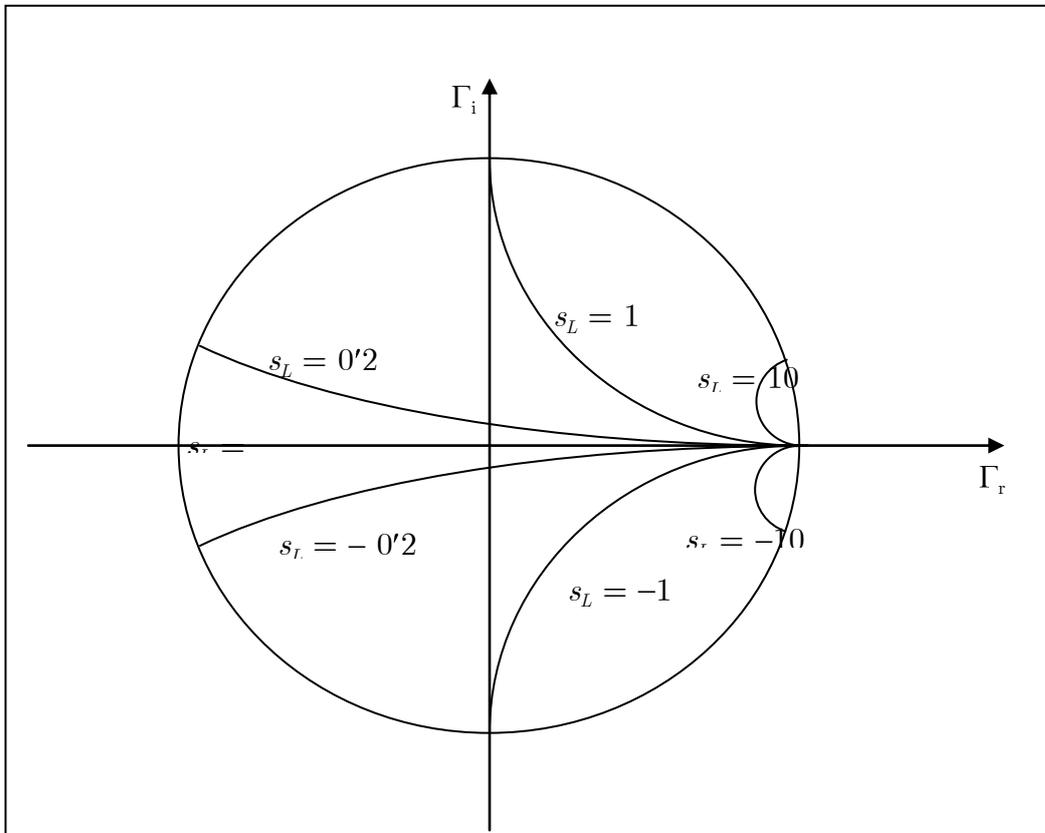


Figura 7.19

Circunferencias de reactancia constante en el plano Γ_r, Γ_i

Al dibujar ambas figuras (7.18 y 7.19) en una sola, el punto de intersección de las circunferencias, para cada par de valores r_L, s_L , indica las coordenadas de un valor del coeficiente de reflexión. De hecho se puede saber directamente el valor del coeficiente de reflexión mediante dos simples medidas geométricas, figura 7.20. El módulo de Γ , se determina al establecer una proporción entre la medida desde el origen hasta el punto de intersección de las dos circunferencias con la longitud medida desde el origen de coordenadas hasta la circunferencia externa (circunferencia de módulo uno). La fase del coeficiente Γ , es el ángulo, θ_r , medido desde eje x .

La Carta de Smith, es simplemente una representación de ambos grupos de circunferencias, en los que, como se ha dicho, unas representan a la parte real de la impedancia de carga normalizada y las otras a su parte imaginaria. En las cartas de Smith comerciales (ver la figura en el apéndice del tema) están representadas algunos de estas circunferencias con valores r_L y s_L , el resto de los valores de impedancias desconocidas se deben interpolar entre los que aparecen en la carta. En la parte externa de la carta, se presentan tres escalas diferentes, la más interna es un transportador de ángulos de 360° que permite medir directamente la fase del coeficiente de reflexión. Las otras dos escalas indican distancias, medidas en longitudes de onda λ , hacia la carga (la del medio) y hacia el generador (la más exterior), estas dos escalas van en sentidos opuestos siendo la que lleva el sentido de las manecillas del reloj la que mide distancias hacia el generador.

Cada media circunferencia, representa $\frac{1}{4}$ de longitud de onda (de 0 a $0'25$ en unidades de λ), dado que el estado físico se repite al avanzar media longitud de onda en la línea, lo que equivale a un cambio en la fase de $2\pi \text{ rad}$ (ya se ha visto que el periodo en las ondas estacionarias en una línea de transmisión es de $\lambda/2$).

Fijándonos en la figura /20, el punto de impedancia de entrada normalizada $z_L = 1 + j$, resultante de la intersección de $r_L = 1$ y $s_L = 1$, es el correspondiente a la impedancia de carga, Z , de una línea de transmisión con impedancia intrínseca Z_0 y longitud l . El coeficiente de reflexión es una cantidad compleja de valor $\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta_\Gamma}$, sabemos que el coeficiente de reflexión se relaciona con la impedancia de entrada mediante la expresión (de (7.101))

$$z_e = \frac{1 + \Gamma e^{-j\beta l}}{1 - \Gamma e^{-j\beta l}} = \frac{1 + |\Gamma| e^{j\theta_\Gamma - \beta l}}{1 - |\Gamma| e^{j\theta_\Gamma - \beta l}} = \frac{1 + \Gamma'}{1 - \Gamma'} \quad (7.143)$$

por otro lado se sabe que la razón de onda estacionaria S (SWR), está relacionada con el módulo del coeficiente de reflexión por

$$|\Gamma| = \Gamma_r = \frac{S-1}{S+1} \quad (7.145)$$

de la comparación de (7.144) y (7.145), se deduce que $S = r_L$, lo cual es solo cierto en parte pues se sabe que S tiene que ser igual o mayor que cero, luego el valor de r_L válido para S , es aquel que da lugar la circunferencia contenida en el semiplano positivo (exactamente interior y tangente en (1,0) a la circunferencia de $r_L = 1$), esto es aquella circunferencia tangente al círculo de radio $|\Gamma|$, de ahí que a esta última circunferencia se la denomine *circulo SWR*. Por otro lado los puntos de intersección de un círculo SWR con el eje real (P_{min} y P_{max} en la figura 2.20) representan respectivamente las distancias desde la carga al primer máximo y el primer mínimo. Dado que en ellos la fase $\varphi = \theta_r - \beta l$ vale $2n\pi$ (condición de voltaje máximo (7.110)) o $(2n+1)\pi$ (condición de voltaje mínimo (7.111)), en ambos casos para $n = 0, \dots$

7.8 Método operacional

En los cálculos con la carta de Smith, no se debe olvidar que el radio de la circunferencia $r_L = 0$ corresponde a $|\Gamma| = 1$, y por lo tanto se deberán hacer las correspondientes proporciones según el tamaño de la carta que se maneje esto es, las distintas circunferencias SWR deben tener en cuenta este hecho.

7.8.1 Impedancia de entrada Z_e conocidas las impedancias de carga Z_L , característica Z_0 , y la longitud de la línea L .

Es el caso más común de uso de la carta de Smith. Vamos a exponer los pasos a dar para la determinación de la impedancia de entrada, Z_e , en la línea, conocida la impedancia de carga, Z_L , la impedancia intrínseca de la línea, Z_0 y la longitud de la línea L (ver figura 7.20).

- Se divide Z_L entre Z_0 , para obtener la impedancia normalizada z_L .
- Se localiza en la carta de Smith el punto z_L , interpolando entre los dos grupos de circunferencias de resistencia r y reactancia s .

- Supuesto conocido algún dato más (frecuencia de excitación ω y velocidad de la onda en la línea u_ϕ) se puede determinar λ . Tras dividir la longitud de la línea entre la longitud de onda se tiene la longitud de la línea en unidades de longitud de onda. (en muchos casos se dará la longitud de la línea en unidades de λ).
- Se traza el círculo de radio $|\Gamma|$ (círculo *SWR*) con centro el origen de coordenadas y radio la distancia del centro al punto z_L .

Ahora se pueden tomar dos caminos según los datos de que se disponga:

- Si se conoce la longitud de la línea en longitudes de onda el procedimiento es el siguiente, se prolonga la línea que une el centro con z_L , hasta interceptar la escala rotulada *wavelengths toward generator*, y desde ese punto se avanza tanto como indique la longitud de la línea en unidades de λ . Se traza una recta que una el centro con el punto al que se ha llegado y la intersección de dicha recta con el círculo *SWR* será el punto de la impedancia de entrada z_e .
- Si se conoce el valor de λ , tras determinar β , se puede calcular el ángulo de fase $\theta_L - 2\beta l$. Trazando dicho ángulo sobre la circunferencia *SWR* partiendo de la impedancia de carga z_L , el punto al que se llega es la impedancia de entrada z_e .
- Se determinan, sobre la tabla, los valores de r_e y s_e , correspondientes a z_e . Al número complejo $z_e = r_e + js_e$ se le multiplica por Z_0 y así queda determinado el valor de la impedancia de entrada Z_e .

Finalmente se puede comprobar lo bien (o mal) que aproxima la carta de Smith, usando la expresión exacta, (7.77) , para determinar Z_e .

7.8.2 Determinación de la razón de onda estacionaria S

En la figura 7.20 los puntos de corte con el eje real de una circunferencia de radio $|\Gamma|$ representan, como se ha indicado anteriormente, las impedancias de entrada en el primer máximo de voltaje P_{max} y el primer mínimo de voltaje P_{min} (dichas impedancias son puramente resistivas), el valor correspondiente de la circunferencia r_L que pasa por P_{max} es el valor de la razón de onda estacionaria S . De la misma forma se puede demostrar que la circunferencia r_L que pasa por P_{min} representa al valor $1/S$ en el mínimo de voltaje.

7.8.3 Determinación de la admitancia de entrada

Se ha definido la impedancia de una línea como la suma de una resistencia real y una reactancia compleja, $Z = R + jX$, la *admitancia* Y es la inversa de la impedancia y se mide en siemens

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G + jB \text{ S} \quad (7.146)$$

se puede definir la admitancia normalizada en una línea, y (de entrada, de carga o en cualquier punto de la misma), como el cociente entre la admitancia de la línea y la admitancia característica de la línea, por ejemplo, para la admitancia de entrada Y_L

$$y_L = g_L + jb_L = \frac{G_L}{Y_0} + j \frac{B_L}{Y_0} = \frac{Y_L}{Y_0} = \frac{Z_0}{Z_L} \quad (7.147)$$

Es una cantidad adimensional. A la parte real de la admitancia se la conoce como *conductancia* y a la parte imaginaria se la denomina *susceptancia*. Si nos fijamos en la expresión de la impedancia normalizada mirando hacia la carga a una distancia z' de la misma (de la expresión (7.101) en una línea sin pérdidas):

$$z(z') = \frac{1 + \Gamma e^{-2\beta z'}}{1 - \Gamma e^{-2\beta z'}} \quad (7.148)$$

si determinamos la impedancia de entrada a una distancia de un cuarto de onda de la carga, se tiene que $2\beta z' \equiv 2 \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \pi$, si $z' = \frac{\lambda}{4}$, esto es:

$$z_e\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{1 + \Gamma e^{-j\pi}}{1 - \Gamma e^{-j\pi}} = \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma} = \frac{1}{z_L} = y_L \quad (7.149)$$

lo que significa que la impedancia de entrada a una distancia de un cuarto de onda de la carga es idéntica a la inversa de la impedancia en la carga o lo que es lo mismo a la admitancia en la carga (figura 7.21).

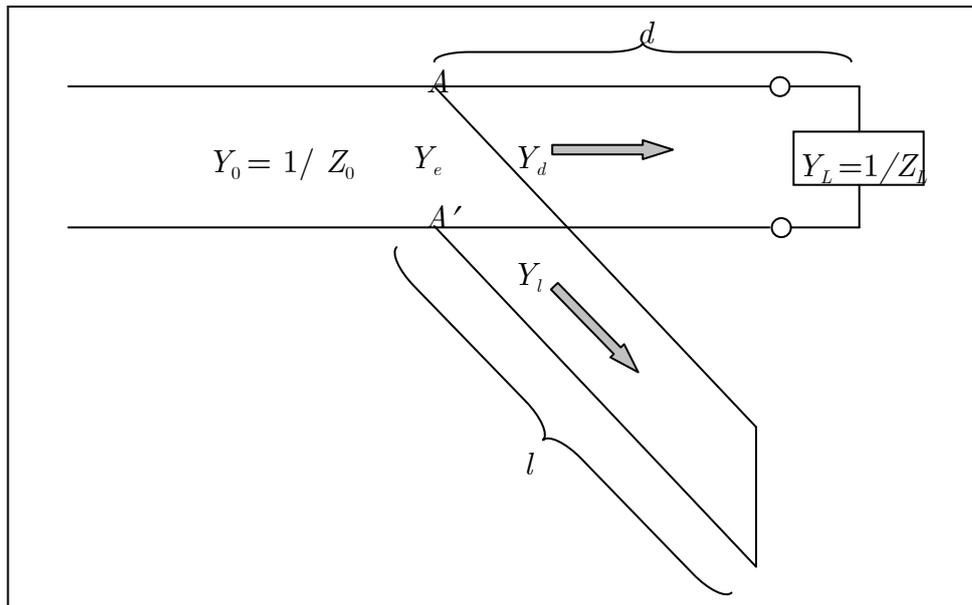


Figura 7.22

Un brazo de longitud l , a una distancia d de la carga de una línea de transmisión para adaptarla

El proceso para *adaptar impedancias con un solo brazo*, consiste en mover un brazo en cortocircuito, situado en paralelo sobre la línea, con una longitud l , hasta situarlo a una distancia d de la carga, de forma que la *admitancia* de entrada entre los puntos AA' sea $Y_e = Y_0$. Al verificarse, por otro lado, que $Y_e = Y_d + Y_l$, se trata de conseguir que los valores de las admitancias en el brazo, Y_l , y a la derecha de AA' , Y_d , sean tales que su suma sea Y_0 . Los dos parámetros con los que se juega para adaptar la impedancia, son la longitud del brazo, l , y la distancia a la carga, d . El procedimiento será entonces:

- En primer lugar se determina un valor de la distancia d de forma que la admitancia a la derecha de AA' sea $Y_d = Y_0 + jB$.
- En segundo lugar, se ajustará la longitud del brazo l para que la admitancia en el brazo sea puramente susceptiva (impedancia reactiva) de valor $Y_l = -jB$.
- Tras realizar ambas operaciones, el problema estará resuelto y la línea quedará adaptada hasta la posición marcada AA' .

7.8.6 Procedimiento práctico

El método operativo es sencillo mediante el uso de la carta de Smith, véase el esquema de la misma representado en la figura 7.23.

- Se normaliza la impedancia de carga $Z_L \rightarrow z_L$.
- Se localiza la posición de la impedancia de carga normalizada, $z_L = r_L + jx_L$, sobre la carta de Smith, punto (1).
- Se determina la posición de la admitancia de carga, $y_L = g_L + jb'_L$ (punto simétrico de z_L respecto al origen de la carta), punto (2).
- Se gira el punto (2) hasta interseccionar el círculo de conductancia de valor uno, $g_L = 1$, punto (3), este punto representa la admitancia normalizada a la derecha de AA' , $y_d = 1 + jb$. La distancia d , es la recorrida por la escala externa de la carta de Smith (en sentido de las agujas del reloj) entre los puntos (2) y (3), (medida en λ).
- Se determina la longitud del brazo, l , girando desde el punto de cortocircuito (4) hasta la intersección de la circunferencia de susceptancia de valor $-b$ con el círculo externo $g_L = 0$, punto (5). La distancia girada será la longitud del brazo (medida en λ). Este último paso se puede hacer de una forma alternativa, trazando la recta simétrica a la recta que une el origen (0) con el punto (2) (recta P_1) respecto al eje real (recta P_2). El punto intersección de la recta P_2 con el círculo externo ($g_L = 0$) será el punto (5). De esta forma la admitancia normalizada del brazo es $y_l = -jb$, y la admitancia de entrada normalizada $y_e = 1$
- Se multiplica y_e por Y_0 y se tiene la admitancia de entrada, cuya inversa es la impedancia intrínseca de la línea Z_0 , con lo cual esta queda adaptada hasta el punto AA' .
-

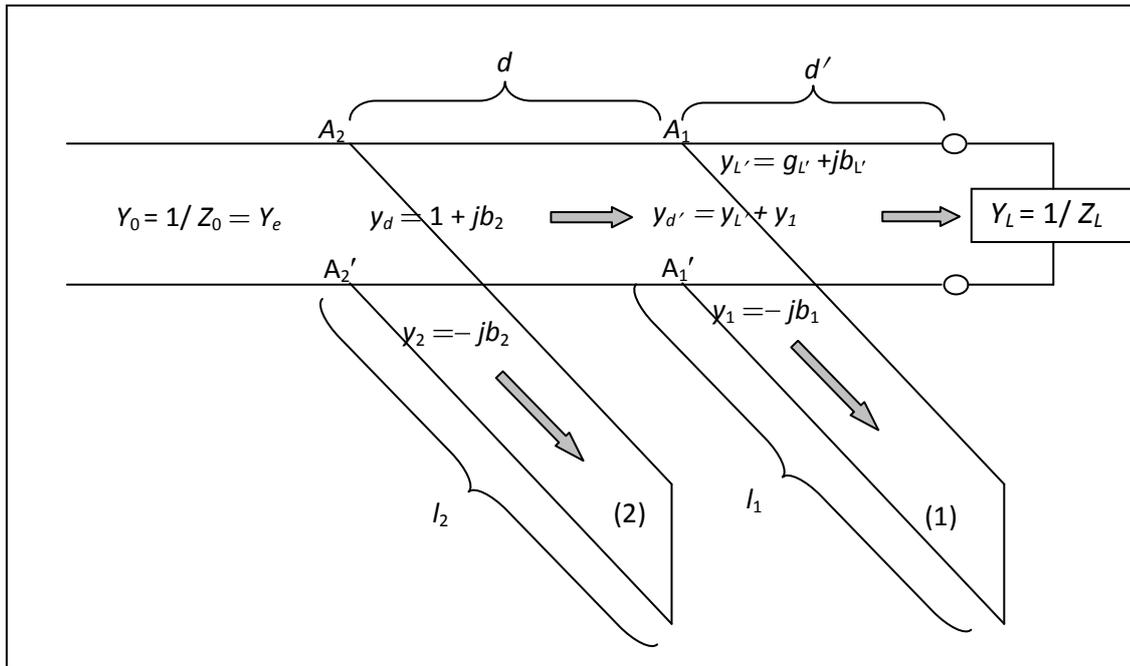


Figura 7.24

Dos brazos de longitudes variables, l_1 y l_2 , a distancias fijas d' y $d + d'$ de la carga de una línea de transmisión para su adaptación

Para estudiar los pasos necesarios sobre la carta de Smith, vamos a reconstruir el proceso como si ya estuviese realizado, por lo tanto, se parte de la hipótesis de que la línea de transmisión está adaptada con dos brazos. Si la línea se ha adaptado con un modelo de dos brazos (figura 7.24):

- A la izquierda del brazo (2) se debe tener una admitancia, Y_e igual a la admitancia característica Y_0 .
- A la derecha del brazo (2) la admitancia normalizada debe ser tal que su conductancia sea igual a uno, esto es $y_d = 1 + jb_2$, para eliminar esta susceptancia al atravesar el brazo (2) de derecha a izquierda, éste debe suministrar una inductancia normalizada puramente susceptiva de valor $-jb_2$ (este valor se conseguirá variando la longitud del brazo).
- A la izquierda del brazo (1) la admitancia normalizada, $y_{d'}$ es la suma de la admitancia a la derecha del mismo con la admitancia suministrada por el brazo (1) (admitancia que puede variar con la longitud del brazo), $y_{d'} = y_{L'} + y_1$, como el brazo es un cortocircuito su admitancia es puramente susceptiva con valor jb_1 .
- La admitancia normalizada a la derecha del brazo (1) $y_{L'} = g_{L'} + jb_{L'}$, se determina a partir de la admitancia normalizada de la carga, $y_L = g_L + jb_L$.

- La admitancia normalizada de la carga es, por supuesto, la inversa de la impedancia normalizada de la carga z_L .

7.8.8 Procedimiento práctico

El proceso descrito, por supuesto, se realiza al revés con la ayuda de la carta de Smith, esto es, se parte de la impedancia de carga (conocida) y se va recorriendo la carta de Smith hasta que la impedancia a la izquierda del brazo (2) es la impedancia característica Z_0 , también conocida. Los otros dos parámetros conocidos son, la distancia d' entre la carga y el primer brazo y la distancia d entre ambos brazos.

La elección de estos parámetros, dependerá del problema concreto que se estudie. Valores típicos, son: $d' = 0$ (C. R. Paul *et al*, D. H. Staelin *et al*); $d' = \lambda/8$ (S. V. Marshall *et al*, J. D. Kraus y D. A. Fleisch). En todos los casos al movernos entre los dos brazos la distancia d habrá que girar el círculo un ángulo $-2\beta d$ para conseguir que la conductancia a la derecha del brazo (2) valga uno, con una distancia de un octavo de longitud de onda el ángulo girado será de 90° y este valor es una separación d usual entre ambos brazos.

En estas condiciones, los pasos a seguir sobre la carta de Smith para adaptar una línea de impedancia intrínseca conocida Z_0 a la que se ha conectado una carga Z_L mediante un doble brazo son los siguientes, figura 7.25:

- Se localiza la impedancia de carga normalizada sobre la carta de Smith, z_L (punto (1)).
- Se halla la admitancia de entrada normalizada, y_L , girando $\lambda/4$ el valor de z_L alrededor del centro de la carta de Smith -radio $|\Gamma| = \text{cte}$ - (punto (2)).
- Se mueve la admitancia determinada en el apartado dos una distancia d' (un ángulo $2\beta d'$ hacia el generador por la escala externa de la carta de Smith), para tener la admitancia, $y_{L'} = g_{L'} + jb_{L'}$, a la derecha del brazo (1) (punto (3)).
- Se rota el círculo g_L de radio uno, un ángulo igual a $2\beta d$ hacia la carga, esta operación es necesaria para determinar la susceptancia del primer brazo dado que la relación entre los coeficientes de reflexión a la izquierda del primer brazo Γ_L y a la derecha del segundo es: $\Gamma_{d'} = \Gamma_d e^{j2\beta d}$ y dado que a la derecha del segundo brazo (2) la admitancia tiene parte real 1, buscamos una nueva admitancia $y_{d'}$ tal que al

gírala un radio constante $|\Gamma_{d'}|$, nos sitúe sobre el círculo g_L de radio uno para tener y_d .

- Sobre un círculo de radio $g_{L'}$, se gira la admitancia del punto (3) hasta cortar el círculo g_L de radio uno que se había girado en el paso cuarto. Se lee la admitancia de este punto intersección $y_{d'} = g_{L'} + jb_{d'} = g_{L'} + jb_{L'} + jb_1$ (punto (4)) y se deduce de ella la admitancia del primer brazo pues $jb_1 = jb_{d'} - jb_{L'}$.
- Se gira el punto (4), siguiendo el círculo de radio $|\Gamma_{d'}| = cte$, hasta llegar al círculo original g_L de radio uno (punto (5)) (una distancia d o sobre la carta de Smith un ángulo $2\beta d$). Se lee el valor de la admitancia $y_d = 1 + jb_2$ y ya se conoce la susceptancia del segundo brazo ($-jb_2$).
- Si se sigue este círculo hasta el origen de la carta de Smith con lo cual la línea queda adaptada $y = 1$ (punto (6)).
- Partiendo del punto de admitancia infinita (derecho de la carta de Smith) se trazan siguiendo el sentido de las agujas del reloj las susceptancias halladas para los brazos y se lee sobre la escala la distancia en λ de las longitudes de los brazos.

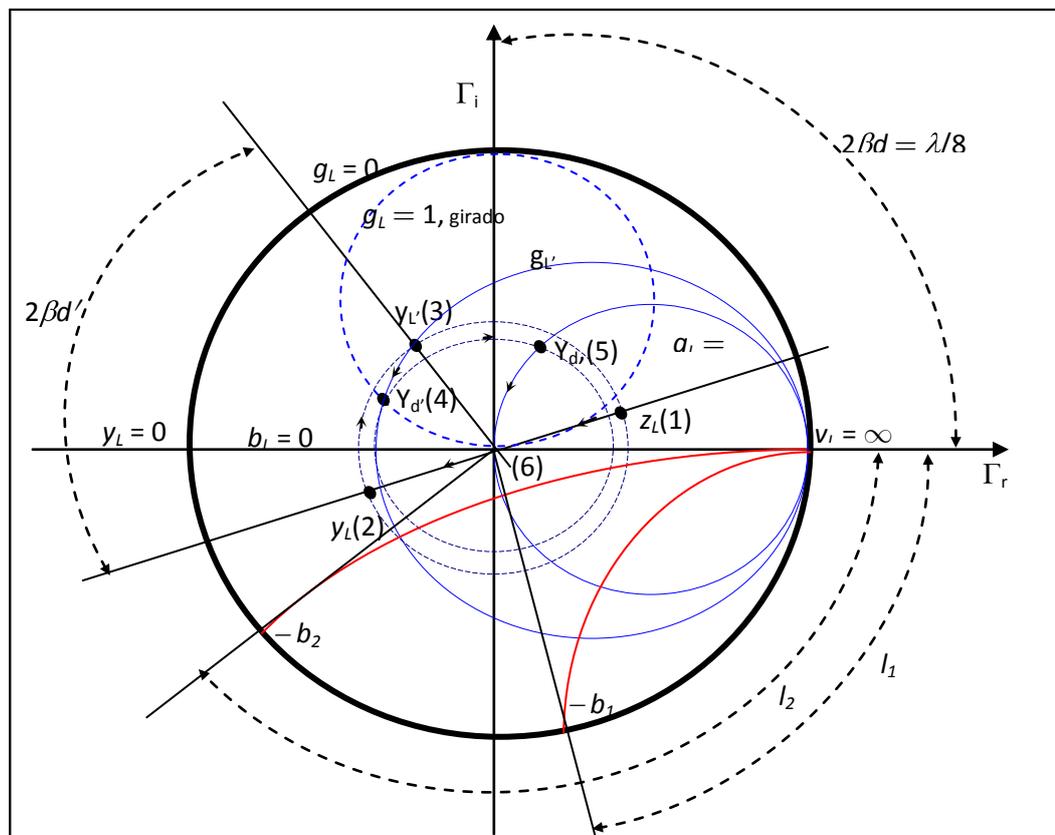


Figura 7.25

Diagrama de la Carta de Smith para adaptar impedancias con dos brazos

Como en el caso de la adaptación con un solo brazo existe una solución alternativa, se deja al lector que averigüe cual es.

7.9 Comentarios finales

Se ha estudiado en este tema, el transporte de ondas (energía electromagnética) mediante el uso de *líneas de transmisión*. Se han expuesto los *tipos* más usuales de líneas de transmisión, y se han estudiado las *ecuaciones* que en ellas rigen el comportamiento de las magnitudes de carácter macroscópico *potencial eléctrico* e *intensidad de la corriente*, Se han definido las características de las *líneas con y sin pérdidas*. Se ha estudiado la *energía* que se transmite en una línea a la carga. Se ha definido el *coeficiente de reflexión* y la *razón de onda estacionaria*. Se ha estudiado el método gráfico de la *Carta de Smith* y su uso en algunos problemas relacionados con las líneas de transmisión como es su *adaptación* a una carga.

7.10 Cuestiones teórico-prácticas

• Cuestiones

1ª) Obtenga los valores de las constantes de fase y atenuación para una línea de transmisión sin pérdidas.

2ª) Explique qué se entiende cuando se dice que una línea de longitud finita está adaptada. ¿Cuánto vale la impedancia de entrada en una línea adaptada?, ¿Y si la línea no está adaptada pero no tiene pérdidas?

3ª) Determine la admitancia de entrada en una línea de longitud $0'08\lambda$ que está en circuito abierto y cuya admitancia característica es de $0'01$.

4ª) Determine el valor del coeficiente de reflexión en una línea que tiene una impedancia característica de $50\ \Omega$ y una impedancia de carga de $Z_L = (25 + j 25)\ \Omega$. ¿Cuánto debe valer la impedancia del generador Z_g para que la onda reflejada en la carga no se refleje en el generador?.

5ª) Una línea de transmisión de impedancia intrínseca $100\ \Omega$ se conecta a una impedancia consistente en una resistencia de $50\ \Omega$ en serie con una capacitor de $10\ \text{pF}$. Si por la línea va una señal de $100\ \text{MHz}$, ¿Cuál es el coeficiente de reflexión?, ¿Y la razón de onda estacionaria?.

6ª) ¿Cuál es la impedancia de entrada en una línea de transmisión sin pérdidas terminada en circuito abierto, para líneas de longitud $\frac{\lambda}{2}$ y $\frac{\lambda}{4}$?, ¿Y si la línea está en cortocircuito?

7ª) Parámetros de una línea coaxial de radios interno a y externo b y parámetros constitutivos ϵ , μ .

8ª) Se tiene una línea de transmisión con pérdidas a $100\ \text{MHz}$ de los que se conocen los siguientes parámetros: $Z_0 = 100\ \Omega$, $\alpha = 0'02\ \text{dB/m}$, $\beta = 0'4\ \text{rad/m}$. Si la línea no tiene distorsión, determine los valores de C , L , R y G

9ª) ¿De qué clase es la impedancia de entrada de una línea de transmisión de $\lambda/8$ de longitud si termina 1º) en cortocircuito y 2º) en circuito abierto?

• Ejercicios

1º) Una línea de transmisión de impedancia característica 50Ω está conectada a una antena de impedancia de carga $Z_L = (25 - j 50) \Omega$. Determine la posición y longitud del brazo en cortocircuito necesario para adaptar la línea.

2º) De una línea de impedancia característica 50Ω , se sabe que su razón de onda estacionaria es $S = 3$ y que el primer mínimo en voltaje se da a 10 cm. de la carga siendo la distancia entre mínimo sucesivos es de 40 cm. Encuentre:

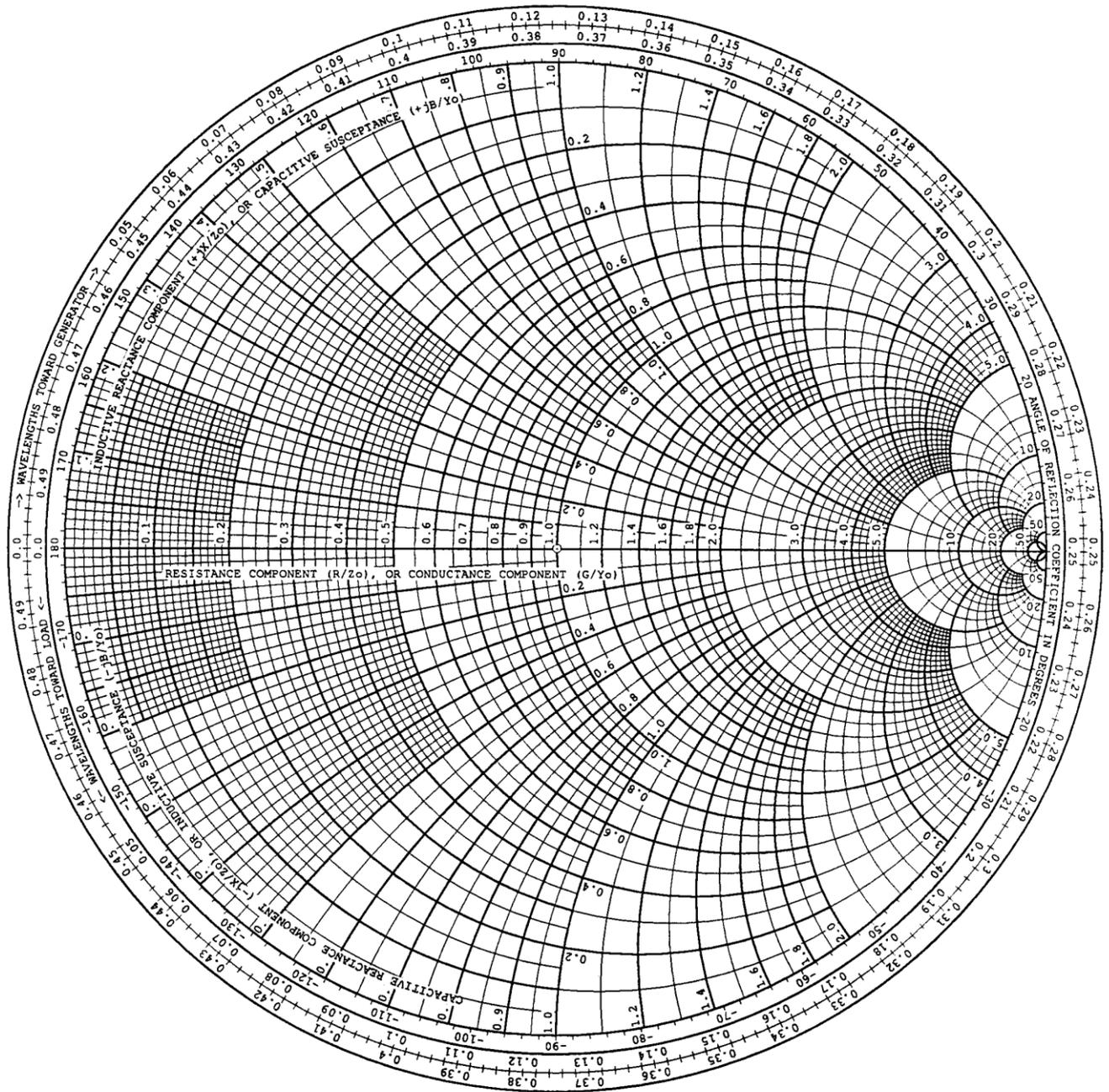
- a) El valor de la impedancia de carga.
- b) El valor del coeficiente de reflexión (módulo y fase).

3º) Mediante una sonda de prueba, se ha determinado que la distancia entre dos mínimos de voltaje en una línea de transmisión sin pérdidas es de 30 cm, estando el primer mínimo de voltaje a 12 cm de la carga. Si se sabe que la razón de onda estacionaria es 3 y que Z_0 para la línea es de 50Ω , ¿Cuál es la impedancia de carga Z_L ?

4º) Si se mide la impedancia de entrada en cortocircuito de una línea de longitud L y resistencia característica 80Ω , resulta un valor de $j100 \Omega$. Si ponemos como carga una impedancia desconocida Z , se mide una impedancia de entrada de $Z_{in} = (50 - j 200) \Omega$. Mediante el diagrama de Smith y analíticamente determine:

- a) El valor de Z .
- b) La razón de onda estacionaria.
- c) El coeficiente de reflexión en voltaje.
- d) La admitancia de entrada.

APENDICE: Carta de Smith



7.11 Bibliografía

David K. Cheng; *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*; Addison, Wesley, Longman (Adisson-Wesley Iberoamericana S. A.), Ciudad de México, México, (1997).

Clayton R. Paul *et al*; *Introduction to electromagnetic fields*; WBC/McGraw-Hill, Cambridge, Mass., USA, (1997).

John D. Kraus and Fleisch D. A.; *Electromagnetics with applications (fifth edition)*; WBC/McGraw-Hill, Cambridge, Mass., USA, (1999).

Stanley V. Marshall *et al*; *Electromagnetismo: Conceptos y Aplicaciones*; Prentice Hall Hispanoamericana S. A., Ciudad de México, México (1996).

Liang C. Shen and Kong J. A.; *Applied electromagnetism (Third edition)*; PWS Publishing Company, Boston, Mass., USA, (1995).

David H. Stealin *et al*; *Electromagnetic waves*; Prentice-Hall International Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, (1994).

Fawwaz T. Ulaby; *Fundamentals of applied electromagnetics*; Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, (1999).

Markus Zahn; *Electromagnetic field Theory: a problem solvig approach* ; John Wiley & sons, New York, USA, (1979).



CAPÍTULO VIII GUÍAS DE ONDA

En el capítulo se expone un método alternativo a las Líneas de Transmisión para el envío de señales y energía electromagnética entre un generador y una carga, este método consiste en utilizar dispositivos conductores huecos (reellenos o no de dieléctrico) y de sección constante. A estos dispositivos se les denomina Guías de Onda. Se va a empezar el capítulo, introduciendo un caso en el que una línea de transmisión de placas paralelas transporta modos **TE** o **TM** en vez de los **TEM** estudiados en el tema anterior; a continuación se introducirán las ecuaciones generales de las guías de onda y, se aplicarán al estudio de una guía de onda rectangular, tanto para transmitir modos **TE** como modos **TM**. En el siguiente esquema-resumen se exponen algunos de los conceptos desarrollados en el capítulo.

ESQUEMA-RESUMEN

- Que son las guías de ondas.
- Ecuaciones del campo E-M en una guía de ondas.
- Que se entiende por ondas transversales magnéticas y eléctricas, modos **TE** y **TM**.
- Guías de onda rectangulares.

Requisitos previos

Los desarrollados en los tres últimos capítulos.

8 Guías de Onda

8.1 Introducción

En el tema anterior se han estudiado determinados dispositivos útiles para conducir campos electromagnéticos (energía EM), a estos elementos se les ha denominado *Líneas de Transmisión* y consisten, como se ha visto, esencialmente en dos conductores paralelos separados por un dieléctrico (dos hilos conductores, dos placas paralelas o un conductor coaxial a otro). Se ha visto que en tales pares de conductores se pueden generar ondas electromagnéticas transversales, esto es, con los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} situados en planos perpendiculares a la dirección de avance de la onda (el eje del conductor.)

El problema de las líneas de transmisión reales (con pérdidas) es que la constante de atenuación de la onda transversal electromagnética, α , es función de la de la resistencia de la línea por unidad, la cual a su vez lo es de la frecuencia ω . Para una línea de parámetros distribuidos, R , G , L , C la constante de atenuación es (D. K. Cheng):

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \left(R + G |Z_0|^2 \right) \text{ Np m}^{-1} \quad (8.1)$$

que incluso en las líneas con pérdidas pequeñas, da un resultado que depende de R

$$\alpha = R \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (8.2)$$

donde $R=R(\omega)$ pues la resistencia por unidad de longitud es proporcional a la geometría del problema, según el tipo de línea, y al factor $K(\omega)$

$$K(\omega) = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\sigma}} \quad (8.3)$$

donde μ y σ son constantes de los conductores. De estas expresiones se deduce inmediatamente, que si aumenta la frecuencia aumenta la constante de atenuación y, de hecho para frecuencias por encima de unos pocos Ghz (longitudes de onda del orden de una decena de centímetros) la onda está prácticamente atenuada. En esas condiciones las líneas de transmisión no son buenos dispositivos para transmitir potencia electromagnética entre dos puntos. Para evitar estos problemas se emplean las denominadas guías de onda que son conductores huecos de sección constante, rellenos (o no) de dieléctrico. Las guías de onda más usuales son las de sección rectangular o circular, para frecuencias en el espectro visible se emplean las fibras ópticas que es un

caso especial de guía de onda. La característica fundamental de las guías de onda es que no propagan ondas transversales electromagnéticas, modos **TEM**, si no que las ondas que se propagan por ellas, tienen componente de **E** o de **B** en la dirección de propagación (solo son transversales en uno de los dos campos) dando lugar a lo que se llaman modo de transmisión **TE** (transversal eléctricos, $E_z = 0$ y $H_z \neq 0$) o **TM** (transversal magnéticos, $H_z = 0$ y $E_z \neq 0$). Otra característica de las guías de onda, es que actúan como filtro pasaalto, esto es que dependiendo de la geometría de la guía, existe un umbral en la frecuencia (longitud de onda) por debajo del cual no se propagan ondas.

8.2 Las líneas de transmisión como propagadoras de modos TE o TM

En primer lugar vamos a comentar que sucede cuando dos ondas planas polarizadas linealmente en la dirección Y , de igual frecuencia, ω , se cruzan formando cierto ángulo θ , figura 8.1. el número de onda de las ondas planas es \mathbf{k}_0 y la correspondiente longitud de onda es λ_0 . Las líneas paralelas representan los frentes de onda, estando marcados en línea continua los frentes de onda (igual fase) en los que el campo es máximo (dirigida hacia fuera del dibujo, el máximo de la figura senoidal) y en línea intermitente los frentes en los que el campo es mínimo (máximo negativo, dirigido hacia el dibujo, correspondiente al mínimo de la representación senoidal). La interferencia de ambas ondas, da lugar a una nueva onda que avanza en la dirección Z^+ , con máximo donde se cruzan dos frentes de onda de línea continua (se refuerzan los valores máximos), con mínimo de los puntos donde se cruzan dos frentes en los cuales el valor de las ondas componentes es mínimo (dos líneas discontinuas), mientras que en los puntos donde se cortan una línea continua y una discontinua el valor del campo que surge de la interferencia es nulo (en esos puntos coinciden el máximo de una onda con el mínimo de la otra) (J. D. Kraus y D. A. Fleish).

Si en dos planos (paralelos a YZ) en los que el campo es cero, se sitúan dos placas planas (infinitas en las dirección Y) perfectamente conductoras, A y A' , se cumple en ellas la condición frontera para un campo eléctrico, esto es, que la componente tangencial del mismo sea cero sobre la superficie del conductor (evidentemente el campo eléctrico es paralelo –tangencial a los conductores- por estar polarizado en dirección Y). Pues bien, en estas condiciones, es evidente que el campo externo que golpea los

conductores por fuera, se reflejara, por ejemplo C y C' , y solo quedara en el interior entre las placas los campos que entren por la izquierda, que tras múltiples reflexiones abandonarían la zona inter-placas por la derecha, R y R' , figura 8.2.

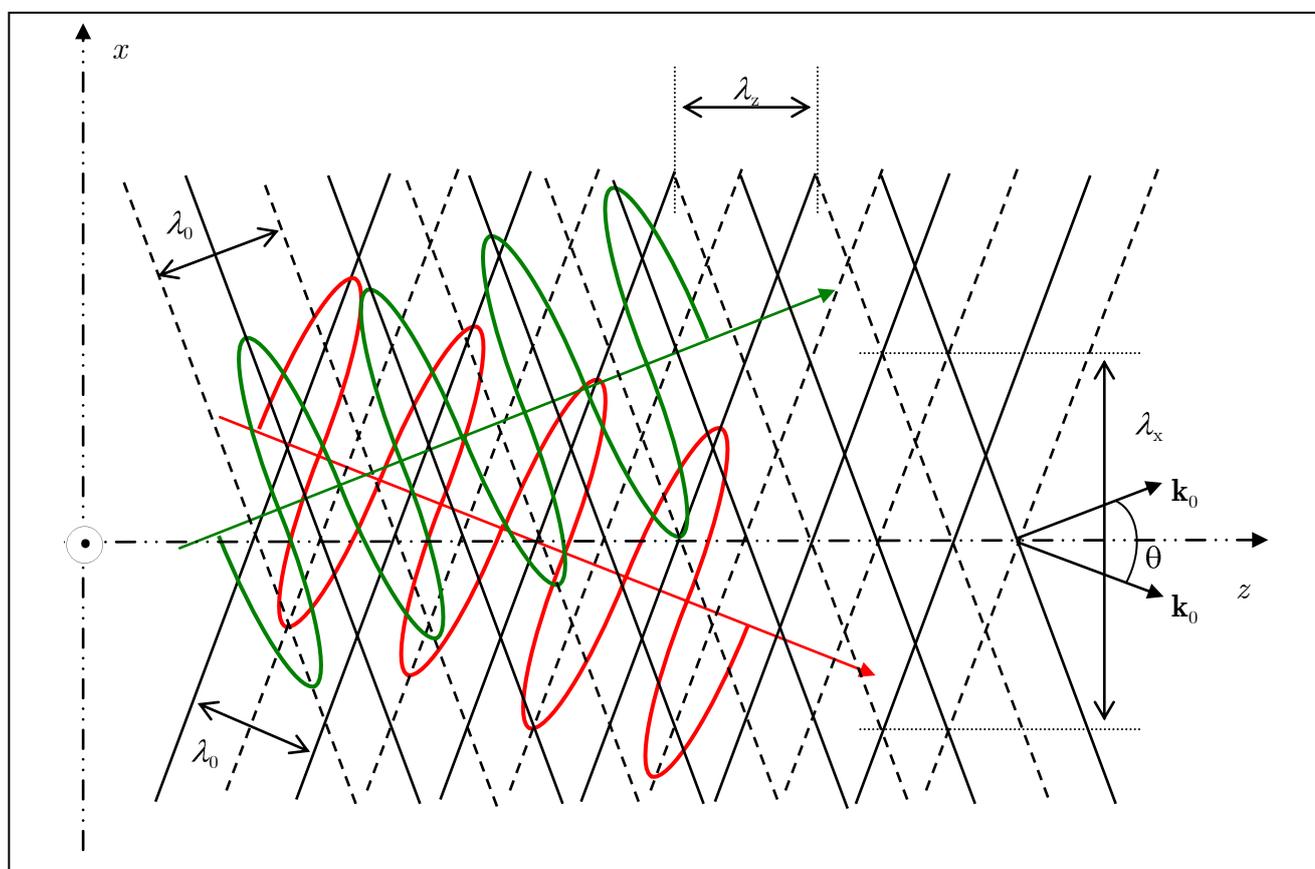


Figura 8.1

Interferencia de dos ondas de igual frecuencia angular ω que se cortan en un ángulo θ

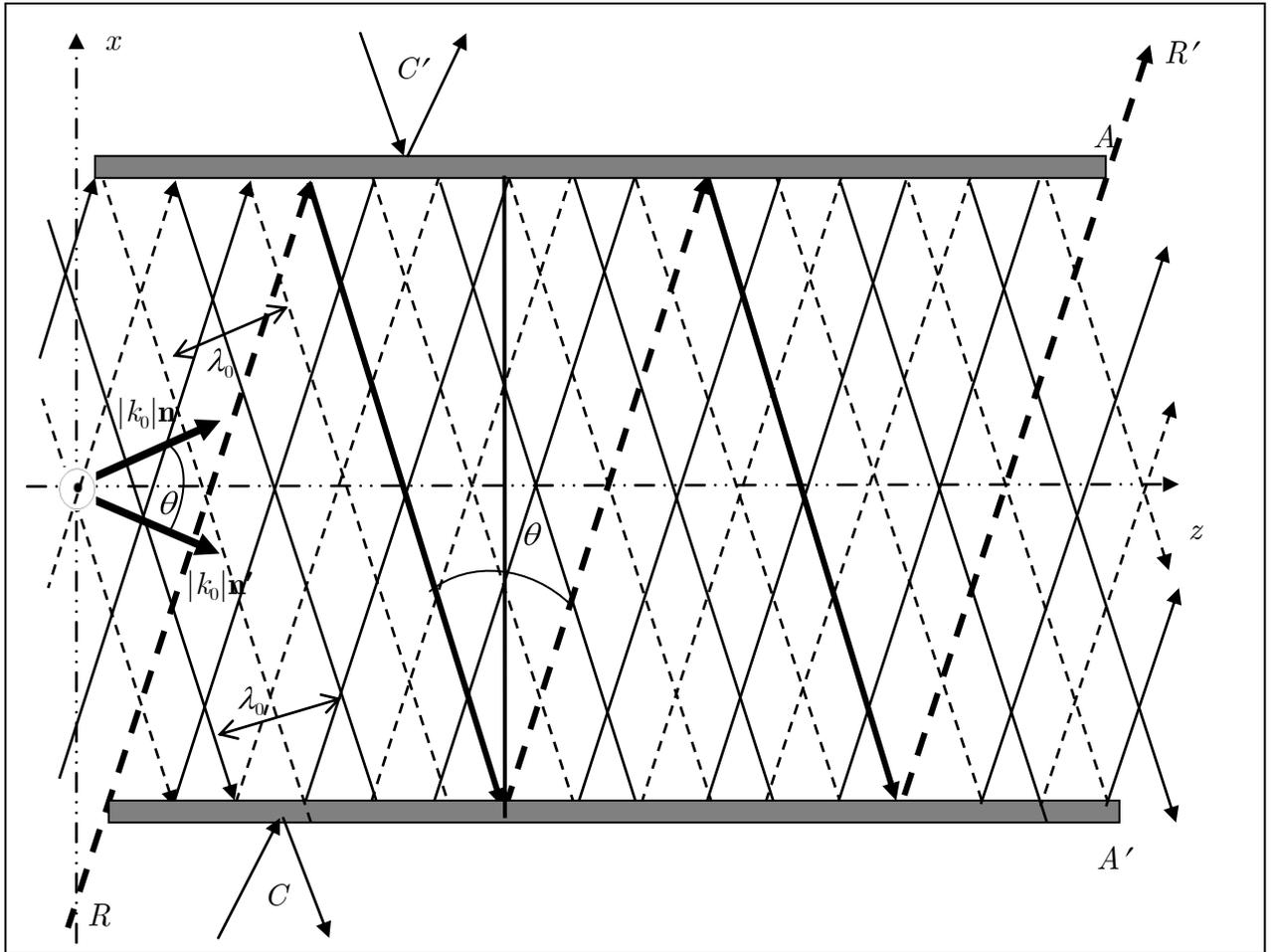


Figura 8.2

Propagación de dos ondas planas polarizadas en la dirección y , que se cortan según un ángulo θ , entre dos placas paralelas perfectamente conductoras

El ángulo θ con que se cortan los frentes de las ondas (que es el formado entre los vectores de onda de, $k_0 \mathbf{n}$ y $k_0 \mathbf{n}'$ donde k_0 es el módulo del número de onda y \mathbf{n} y \mathbf{n}' son vectores unitarios ortogonales a los frentes de las dos ondas planas) es igual al ángulo con que las ondas se reflejan sobre la superficie de los conductores, esto es, se cumple las Ley de Snell de la igualdad de ángulos incidente y reflejado, ambos iguales a $\frac{\theta}{2}$.

Vamos a estudiar, a continuación, como el simple hecho de hacer incidir un campo electromagnético polarizado linealmente (una onda plana) en una dirección no transversal al eje de una línea de dos placas conductoras, da lugar la aparición de ciertas restricciones a las frecuencias que se pueden enviar por dicha línea así como a la aparición de componentes de los campos (\mathbf{H} , o \mathbf{E}) en la dirección de avance de la onda. Este estudio se va a abordar de dos formas diferentes: a) Mediante una aproximación

geométrica basada en el concepto de interferencias de dos ondas estudiado previamente (J. D. Kraus y D. A. Fleisch; S. V. Marshal *et al*; A. M. Portis) o, b) Utilizando las ecuaciones de Maxwell para un campo que incide oblicuamente sobre una superficie conductora (D. H. Stealin *et al*; L. Chi Shen y J. Au Kong; C. R. Paul *et al*). En la figura 8.3, se han dibujado dos ondas transversales, **TEM**, planas de igual intensidad E_0 con frecuencia angular ω y que están polarizadas linealmente (en dirección perpendicular al papel). Se supone que las ondas se cortan en un ángulo 2θ en el interior de dos placas conductoras paralelas entre las cuales suponemos que hay aire (no sería problema introducir un dieléctrico distinto, pero habría que tener en cuenta –en el dibujo– la refracción, al entrar y abandonar las ondas el material dieléctrico). En la figura están dibujados los frentes de onda de las ondas incidentes (líneas paralelas puntuadas), varios rayos, $R_1 \dots R_8$, que se cortan dos a dos. Las ondas se reflejan totalmente en las superficies conductoras en las que se sabe que el campo eléctrico tangencial debe ser cero por las condiciones en la frontera entre aire y superficies totalmente conductoras. Se han dibujado frentes de onda que están separados un cuarto de onda. Se han situado las placas conductoras, AA' , en la línea que marca el valor cero para la intensidad del campo que surge de la interferencia de los dos campos (figura 8.1) para que se cumplan las condiciones frontera. Hay que hacer notar que el campo se anula en un punto, si ambos campos valen cero en ese punto o bien si ambos valen lo mismo y tiene sentidos opuestos. En el dibujo, se ha optado por partir de un punto, D en el que el campo se anula suponiendo que en el frente de onda DL' el campo tiene el valor E_0 y en el frente DL de la otra onda el valor del campo es $-E_0$, de forma que en D ambos se anulan. Los puntos separados $\lambda/4$ de D a izquierda y derecha vienen de frentes en los cuales los campos valen cero. Los dos puntos a la derecha e izquierda de D y separados $\lambda/2$ de son tales que los campos en los frentes que interfieren son iguales y de signo contrario de nuevo, pero invertidos respecto a los valores que tenían en D . Se puede determinar según esta regla (que asigna valores de E_0 a los frentes de onda dibujados) cuánto vale el campo que se genera con la composición de los dos que interfieren en cada vértice de los rombos resultantes. De esta forma se comprueba que el campo se anula de nuevo en la línea CC' y en la BB' . Si ampliáramos la imagen hacia abajo esta simetría se reproduciría. Desde luego en los vértices intermedios también aparece el campo de forma simétrica respecto a las líneas de campo cero.

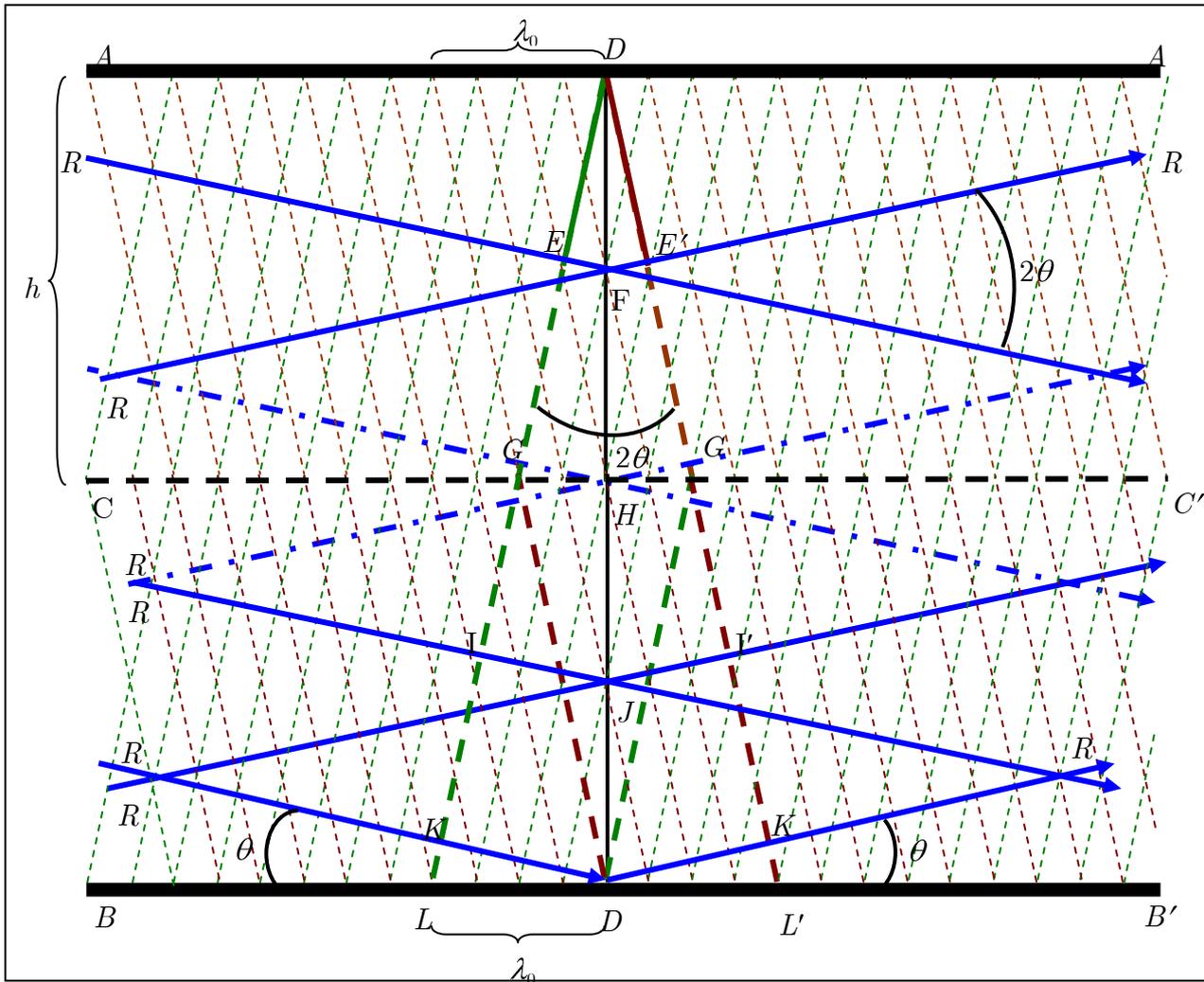


Figura 8.3

Dos ondas electromagnéticas que se interceptan en un ángulo 2θ en el interior de dos placas conductoras

Nos fijamos, ahora, en los triángulos rectángulos DEF o $DE'F'$ generados por dos frentes de onda (los que pasan por D) y dos rayos que se cortan en F . El punto se escoge de forma que la distancia FE sea exactamente de un cuarto de la longitud de onda (todo lo que se va a decir, vale para el triángulo $DE'F'$ o los triángulos equivalentes, DGH , $DG'H'$, DIJ , $DI'J'$, DKL o DKL' , teniendo en cuenta que en estos últimos la longitud de la base es de $2\lambda/4$, $3\lambda/4$ y $4\lambda/4$ –para cada dos triángulos semejantes.) En las condiciones expuestas, colocamos la segunda placa conductora (se supone que ambas tienen conductividad σ infinita) en la línea BB' , y así tenemos una línea de transmisión de placas paralelas por la que avanzan dos ondas polarizadas linealmente en la dirección perpendicular al plano del dibujo (ondas transversales electromagnéticas o modos **TEM**

–transversal electromagnético– con longitud de onda λ_0) que se suman para dar una onda polarizada en la dirección de las ondas constituyentes (vector \mathbf{E}), mientras que el vector campo magnético ya no es transversal sino que tiene una componente en la dirección del eje de la línea, este tipo de ondas se denominan como onda transversal eléctrica o modos **TE**. Vamos a determinar la relación entre el altura de la línea y la longitud de onda (frecuencia) de los modos que podrán ser efectivamente transmitidos por la línea. En efecto del triángulo DEF se sabe que

$$\frac{\lambda_0}{4} = \frac{h}{2} \text{sen } \theta \quad (8.4)$$

pues se ha construido el dibujo separando los frentes $\lambda_0/4$ y por lo tanto $EF = \lambda_0/4$. Se puede comprobar que esta relación, por supuesto, se cumple en cualquiera de los triángulos equivalentes, por ejemplo en el triángulo DIJ

$$\frac{3\lambda_0}{4} = \frac{3h}{2} \text{sen } \theta \quad (8.5)$$

En el desarrollo anterior nos hemos basado en que se han dibujado, en la figura 8.3, los frentes de onda separados un cuarto de longitud de onda, pero podríamos haber supuesto que estos frentes representan media longitud de onda, tres medios de longitud de onda, una longitud de onda, etc, por lo cual en unidades de $\frac{1}{4}$ de λ_0 la expresión real para la base del triángulo será

$$EF = n \frac{\lambda_0}{4}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.6)$$

y la ecuación (8.4) queda como

$$\lambda_0 = \frac{2h}{n} \text{sen } \theta \quad (8.7)$$

para los distintos valores de n , tendremos distintos *modos* de ondas que se pueden propagar por la línea. En particular el mayor valor de longitud de onda permitido, será para $n=1$ y $\theta=\pi/2$, longitud a la que se llamará de *corte* para el primer modo de vibración ($n=1$)

$$\lambda_{c,1} = 2h \quad (8.8)$$

Existirá por supuesto una longitud de onda de corte para cada *modo de vibración* n : $\lambda_{c,n}$, las ondas, en un modo prefijado, con longitudes de onda mayores que la de corte no se propagaran por la línea de transmisión, siendo el valor de la longitud de onda de corte:

$$\lambda_{c,n} = \frac{2h}{n}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.9)$$

por supuesto según crece el orden del *modo* las ondas permitidas tiene frecuencias mayores, esto es, la línea funciona como un filtro de bajas frecuencias. Considerando la expresión (8.9) es fácil ver que los ángulos permitidos deben ser menores que 90° , pues:

$$\theta = \text{sen}^{-1} \frac{\lambda_0}{\lambda_{c,n}} \quad (8.10)$$

cuando la longitud de onda es igual a la de corte, la única posibilidad es una onda que oscila en dirección perpendicular a las placas conductoras. Según disminuye el ángulo de incidencia de las ondas sobre las placas se van admitiendo más ondas transmitidas en la línea. Por supuesto al aumentar h , la frecuencia de corte disminuye y se permite el paso por la línea de más frecuencias, en el caso límite de separación infinita de las placas tendremos el caso de transmisión estudiado en los capítulos precedentes. Si el ángulo es cero, incidencia de la onda con dirección paralela al eje de la línea, la transmisión es de modo **TEM**.

Lo dicho en los párrafos previos para ondas con polarización lineal en **E** vale igual para ondas en las que el campo polarizado sea **H** resultando *modos de vibración transversal magnético* **TM**.

Vamos, ahora, a deducir las expresiones anteriores utilizando expresiones analíticas de campos **TEM** que inciden oblicuamente sobre una superficie plana de conductividad infinita. Sea, entonces, un campo **TEM** polarizado linealmente, en la dirección y , que incide sobre una superficie de $\sigma = \infty$, en el plano yz , con un ángulo θ_i , figura 8.4.

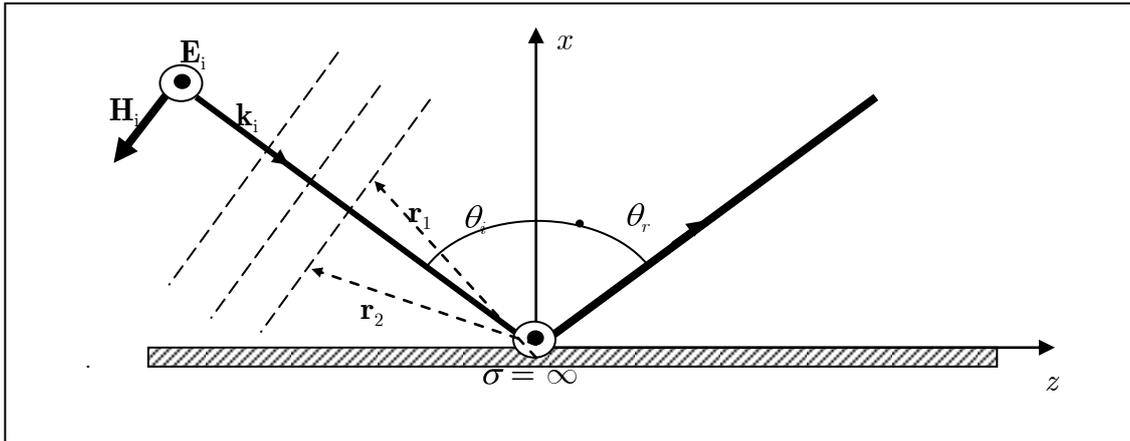


Figura 8.4

Incidencia de una onda **TEM** sobre una superficie de conductividad infinita

Dado que el vector campo eléctrico \mathbf{E}_i está polarizado en la dirección y , tal y como se han tomado los ejes de coordenadas, los vectores de campo magnético \mathbf{H}_i y de onda \mathbf{k}_i tendrán componentes según x y z . En cada punto el campo \mathbf{E} estará dado por

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{a}_y E_0 e^{-j\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} \quad (8.11)$$

El producto $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}$, representa los frentes de onda constantes (ver figura 8.4, en donde están indicados dos vectores \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , que nos definen el mismo frente de onda al multiplicarlos escalarmente por el vector de onda \mathbf{k}_i) y E_0 es el módulo del campo incidente. Fijámonos en las componentes (D. H. Stealin *et al*):

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{a}_y E_0 e^{-j k_x x + k_z z} \quad (8.12)$$

siendo k_x y k_z las componentes del vector de onda según los ejes, por supuesto trabajamos en fasores. Para la onda reflejada, la expresión es (teniendo en cuenta que el coeficiente de reflexión $\Gamma=1$)

$$\mathbf{E}_r = -\mathbf{a}_y E_0 e^{-j k_x x + k_z z} \quad (8.13)$$

luego existen dos campos en la zona no conductora. Ambos campos en el punto de contacto ($x=0$) deben ser tales que se anulen para cumplir las condiciones en la frontera (componente tangencial de \mathbf{E} debe de ser cero sobre el conductor), esto implica que:

$$\mathbf{E}_{total} = \mathbf{a}_y E_0 e^{-jk_x z} - E_0 e^{-jk_x z} \quad (8.14)$$



como el medio por el que se mueve la onda es el mismo antes y después de reflejarse:

$$k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon = k_{xi}^2 + k_{zi}^2 = k_{xr}^2 + k_{zr}^2 \quad (8.15)$$

para que se cumpla que la expresión (8.14) sea igual a cero es necesario que $k_{zi} = k_{zr}$, lo que junto a (8.15) implica la igualdad de los módulos de la componente x de los \mathbf{k} incidente y reflejado. Cumpliéndose, en consecuencia, la igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión como debe ser por la Ley de Snell, $\theta_i = \theta_r = \theta$, donde además se cumple que:

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{k_z}{k_x} \right| \quad (8.16)$$

El campo eléctrico total en la zona del dieléctrico es

$$\mathbf{E}_{total} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \mathbf{a}_y E_0 e^{jk_x x} - e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \mathbf{a}_y j 2 E_0 \sin k_x x e^{-jk_z z} \quad (8.17)$$

y por la relación entre \mathbf{H} y \mathbf{E} (Teorema de Faraday)

$$\mathbf{H}_{total} = -j \frac{2E_0}{\eta \sqrt{k_x^2 + k_z^2}} \mathbf{a}_x k_z \sin k_x x - j \mathbf{a}_z k_x \cos k_x x e^{-jk_z z} \quad (8.18)$$

donde como siempre η es la impedancia intrínseca del medio $\sqrt{\mu/\varepsilon}$. Desde luego se cumplen las condiciones en la frontera ($x=0$) para la componente tangencial de \mathbf{E} (dirección y) y la componente normal de \mathbf{H} (dirección x). Lo que se deduce de las ecuaciones (8.17) y (8.18), es que en los planos en los que

$$x = \frac{n\pi}{k_x}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.19)$$

también se cumplen las condiciones en la frontera para un campo en un conductor, y entonces se podrá colocar en cualquiera de dichos planos un conductor ideal, de forma que tenemos una onda que avanza entre los dos planos conductores, pero que no es transversal a ellos (\mathbf{H} no lo es), de forma que se tiene una onda de tipo transversal eléctrico o **TE**. El valor promedio del vector de Poynting $\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \rangle$ solo es no nulo en la dirección \mathbf{a}_z , esto es, se transporta energía en la dirección del eje de las placas conductoras que por lo tanto actúan como una guía de ondas.

Todo lo dicho para campos **TE**, se podría repetir para campos **TM** en los cuales un campo magnético \mathbf{H}_i , polarizado linealmente (en la dirección y) incide oblicuamente en una placa conductora infinita situada en el plano yz . Tras la reflexión se tiene un campo magnético \mathbf{H}_r que sigue polarizado en la dirección y (téngase en cuenta que el campo \mathbf{H} no se invierte en la reflexión al contrario de lo que le sucede al campo \mathbf{E}), en estas condiciones el campo suma de los campos incidente y reflejado es

$$\mathbf{H}_{total} = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r = \mathbf{a}_y H_0 e^{jk_x x} + e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} = \mathbf{a}_y 2H_0 \cos k_x x e^{-jk_z z} \quad (8.20)$$

que tras aplicar el teorema de Ampère, permite determinar el correspondiente campo eléctrico

$$E_{total} = \frac{2\eta H_0}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} \mathbf{a}_x k_z \cos k_x x + \mathbf{j} \mathbf{a}_z k_x \sin k_x x e^{-jk_z z} \quad (8.21)$$

Como en el caso de los modos **TE** es fácil comprobar que en $x=0$, se cumplen las condiciones en la frontera para la componente tangencial de \mathbf{E}_{total} (componentes z e y de \mathbf{E}) y la componente normal de \mathbf{H}_{total} (componente x de \mathbf{H}). Lo mismo que en el caso **TE**, para valores de

$$x = \frac{n\pi}{k_x}; \quad n = 0, 1, \dots \quad (8.22)$$

se conservan las condiciones frontera y por lo tanto en esas posiciones es posible colocar otra superficie de conductividad infinita y de esta forma obtener ondas **TM** guiadas. A diferencia del caso transversal eléctrico, el valor de n puede ir de cero en adelante, esto es el primer modo **TM** es **TM₀**, mientras que el primer modo **TE** es el **TM₁**. Los campos asociados al modo **TM₀** son

$$\mathbf{H}_{TM_0} = \mathbf{a}_y \eta H_0 e^{-jk_0 z} \quad \text{y} \quad \mathbf{E}_{TM_0} = \mathbf{a}_y 2\eta H_0 \frac{k_z}{k} e^{-jk_0 z} \quad (8.23)$$

que en el caso de que $k_x = 0$, se convierten en el modo **TEM** estudiado en el capítulo sexto, esto significa que el modo **TEM** no es nada más que uno (el más sencillo) de los infinitos modos de propagación por una línea de placas paralelas **TE** o **TM**. De la expresión (8.15) y de las condiciones, (8.19) y (8.22), necesarias para que podamos guiar ondas, **TE** y **TM** respectivamente, entre dos placas se deduce que

$$k_z^2 = \omega^2 \mu \epsilon - k_x^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{n\pi}{h} \right)^2 \quad (8.24)$$

de forma que mientras k_z sea una cantidad real tendremos una transmisión de ondas en la guía. Si disminuimos ω , manteniendo k_x constante, es evidente que k_z va haciéndose más pequeño, esta disminución a su vez implica que el ángulo de incidencia (reflexión) va disminuyendo, (8.16) haciéndose igual a cero cuando

$$\omega = \frac{n\pi}{h\sqrt{\mu\epsilon}}; \quad n = 1, 2, \dots \text{ para modo } \mathbf{TE} \text{ o } n = 0, 1, \dots \text{ para modo } \mathbf{TM} \quad (8.25)$$

Expresión en la que h es la separación entre las placas. El valor de ω dado en (8.25) implica el caso límite en el que la onda oscila entre las placas sin transmitir energía en la dirección Z . Si se reduce todavía más el valor de la frecuencia angular, k_z se hace imaginario y en las expresiones de los campos, (8.17), (8.18), (8.20) y (8.21) aparece un factor exponencial decreciente $e^{-\alpha z}$, donde α puede considerarse como un coeficiente de atenuación. Evidentemente las ondas para tales frecuencias a partir de un valor de z (dependiendo de lo que valga k_z) dejaran de existir., es decir la guía actúa como un filtro de bajas frecuencias (grandes longitudes de onda). Al valor de ω dado por (8.25), se le denomina frecuencia de corte para el modo n y la podemos denotar como $\omega_{c,n}$. El valor n igual a cero (del primer modo **TM**) implica que $\omega_{c,0}=0$, lo cual indica que todas las frecuencias son permitidas y que $k_z=k=\omega(\mu\epsilon)^{1/2}$, lo que implica a su vez que el modo es del tipo transversal electromagnético **TEM**.

Se define la longitud de onda en la guía como

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \frac{n\pi}{h}^2}} \quad (8.26)$$

la longitud de onda en la dirección x es igualmente

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} = \frac{2h}{n} \quad (8.27)$$

cumpléndose la relación de dispersión (8.15) se tiene finalmente que:

$$\frac{1}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_x} \right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda_z} \right)^2} \quad (8.28)$$

donde λ es la longitud de onda en el medio libre de constantes μ y ε a la frecuencia ω :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (8.29)$$

Cuando $\omega = \omega_{c,n}$, de (8.25) y (8.29) se deduce que la longitud de onda de corte $\lambda_{c,n}$ coincide con λ_x ($\lambda_z=0$, en la frecuencia de corte) como se había hallado anteriormente por el primer método de cálculo basado en la geometría y la interferencia de dos ondas **TEM**, (8.9). La velocidad de la onda en el medio no guiado es:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (8.30)$$

en función de esta velocidad, las velocidades de fase y de grupo de la onda, teniendo en cuenta que avanza en la dirección z^+ , son

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_z} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi v}{\omega h}\right)^2}} \quad (8.31)$$

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k_z} = v \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi v}{\omega h}\right)^2} \quad (8.32)$$

finalmente, la velocidad de fase en la dirección x es

$$v_{\varphi_x} = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega h}{n\pi} = v \frac{kh}{n\pi} = v \frac{k}{k_x} \quad (8.33)$$

Como veremos más adelante, lo expuesto se puede obtener de las ecuaciones generales de una onda moviéndose entre dos placas conductoras con la apropiada geometría.

8.3 Ecuación de Ondas en las guías de onda

Se supone que la onda se va a propagar en sentido z por una guía de ondas de sección constante, con paredes de conductividad infinita, $\sigma_c=\infty$, que rodea a un dieléctrico sin pérdidas, $\sigma_d=0$. Las componentes de los campos se pueden escribir separando la parte transversal de los mismos (plano xy) de la componente longitudinal (dirección de avance de la onda z) de la siguiente forma:

$$E_i = E_i(x, y) e^{-\gamma z}, \quad i = x, y, z; \quad H_i = H_i(x, y) e^{-\gamma z}, \quad i = x, y, z \quad (8.34)$$

en donde la constante γ debe de ser compleja para que exista una onda avanzando en la dirección z . Por supuesto la notación es fasorial y para pasar a los campos reales hay que multiplicar (8.34) por $\exp(j\omega t)$ y tomar la parte real. Los campos obedecen a la ecuación de ondas en el interior de la guía de ondas, y la solución de dicha ecuación con las condiciones en la frontera adecuadas nos describe dichos campos apropiadamente:

$$\nabla^2 + k^2 \mathbf{E} = 0; \quad \nabla^2 + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (8.35)$$

En donde $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$. Las ecuaciones de onda vectoriales (8.35) realmente representan, cada una, tres ecuaciones escalares para las componentes:

$$\nabla^2 + k^2 E_i = 0, \quad \nabla^2 + k^2 H_i = 0; \quad i = x, y, z \quad (8.36)$$

Como se han separado las componentes transversales y longitudinales de los campos, podemos dividir el laplaciano en dos términos, uno que represente la derivación respecto a las componentes transversales x, y , y el otro que afecte solo a la variable longitudinal z

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (8.37)$$

Donde el subíndice T se refiere a transversal. Introduciendo este operador en (8.36), teniendo en cuenta que la derivada de los campos respecto z es γE_i , $i = x, y, z$, se tiene que las ecuaciones de onda (8.36) se transforman en

$$\begin{aligned} \nabla_T^2 E_i(x, y) e^{\gamma z} + k^2 + \gamma^2 E_i(x, y) e^{\gamma z} &= 0, \quad i = x, y, z \\ \nabla_T^2 H_i(x, y) e^{\gamma z} + k^2 + \gamma^2 H_i(x, y) e^{\gamma z} &= 0, \quad i = x, y, z \end{aligned} \quad (8.38)$$

En los campos solo se ha tomado en cuenta la onda progresiva, pero debe quedar claro que puede existir una onda en dirección $-z$, para la cual el tratamiento es totalmente idéntico al que se está describiendo.

De las ecuaciones de Maxwell se pueden sacar conclusiones sin resolver las ecuaciones (8.38), en particular veremos que bastará determinar la solución para las componentes longitudinales pues las componentes transversales se deducirán de ellas. Sean las ecuaciones de Faraday y Ampère en forma fasorial

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H}; \quad \nabla \times \mathbf{H} = +j\omega \epsilon \mathbf{E} \quad (8.39)$$

se obtiene las ecuaciones

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y = -j\omega\mu H_x; \quad -\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (8.40)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega\varepsilon E_x; \quad -\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\varepsilon E_y; \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\varepsilon E_z \quad (8.41)$$

Ahora, por ejemplo, se puede despejar E_y en (8.40) y H_x en (8.41)

$$\text{a) } E_y = -j\frac{1}{\gamma}\left(\omega\mu H_x - \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right); \quad \text{b) } H_x = -j\frac{1}{\gamma}\left(\omega\varepsilon E_y - \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2}\right) \quad (8.42)$$

Si se sustituye (8.42)a en (8.42)b se obtiene finalmente

$$E_y = \frac{1}{k^2 + \gamma^2}\left(j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y}\right) \quad (8.43)$$

De la misma forma desarrolla arriba, de (8.40) y (8.41) se obtienen las expresiones

$$E_x = -\frac{1}{k^2 + \gamma^2}\left(j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \quad (8.44)$$

$$H_y = -\frac{1}{k^2 + \gamma^2}\left(j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \quad (8.45)$$

$$H_x = \frac{1}{k^2 + \gamma^2}\left(j\omega\varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \quad (8.46)$$

Suponiendo los campos con la forma dada en (8.34), basada en una propagación en la dirección z , se ha demostrado que basta determinar las componentes en esa dirección, para obtener las demás componentes utilizando las expresiones (8.43) a (8.46). Esto significa que para una onda moviéndose en una *Guía de ondas* de sección constante solo existen dos componentes independientes en los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} y son las de la dirección de avance de la onda (dirección longitudinal). Las cuatro componentes transversales se deducen de estas dos. Solo será necesario resolver las ecuaciones (8.38) para las componentes longitudinales con las correspondientes condiciones en la frontera impuestas por la guía en estudio.

8.4 Guía de onda rectangular: Modos TE y TM

Sea una guía de onda de sección rectangular, lados $b < a$, eje en la dirección z , y paredes perfectamente conductoras que rodean un dieléctrico sin pérdidas, figura 8.5.

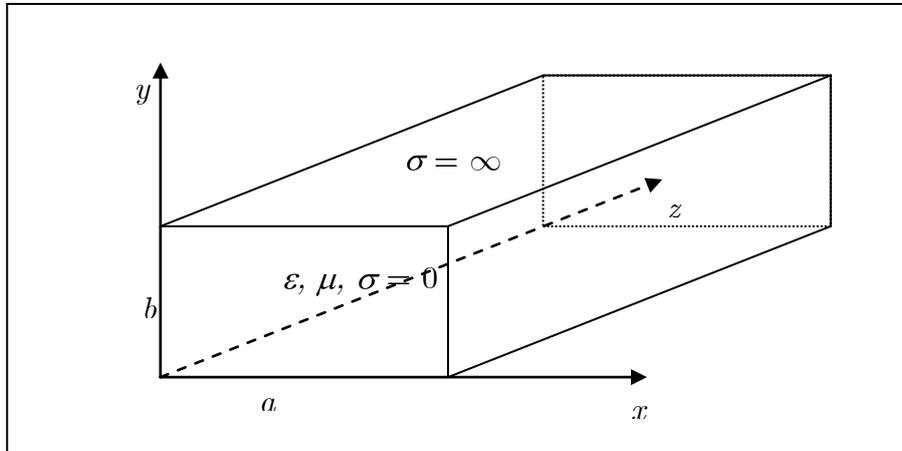


Figura 8.5

Guía de ondas de sección rectangular

Las únicas ecuaciones de ondas a resolver son las correspondientes a las componentes longitudinales (z en nuestra exposición) de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H}

$$\begin{aligned} a) \nabla_T^2 E_z(x, y)e^{\gamma z} + k^2 + \gamma^2 E_z(x, y)e^{\gamma z} &= 0 \\ b) \nabla_T^2 H_z(x, y)e^{\gamma z} + k^2 + \gamma^2 H_z(x, y)e^{\gamma z} &= 0 \end{aligned} \quad (8.47)$$

Usando el método de separación de variables para el campo eléctrico, suponemos una solución

$$E_z(x, y, z) = X(x)Y(y)e^{-\gamma z} \quad (8.48)$$

que sustituida en (8.47) a conduce a la ecuación

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} Y(y)e^{-\gamma z} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} X(x)e^{-\gamma z} + k^2 + \gamma^2 Y(y)X(x)e^{-\gamma z} = 0 \quad (8.49)$$

si se divide la ecuación entre E_z ,

$$\frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k^2 + \gamma^2 = 0 \quad (8.50)$$

Dado que el tercer término es constante, para que se cumpla la igualdad los dos primeros también deben ser constantes. Se deben, pues, igualar a sendas constantes de separación que por razones que se verán más adelante, llamaremos $-k_x^2$ y $-k_y^2$. En estas condiciones, se obtienen las dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$a) \quad \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k_x^2 X(x) = 0; \quad b) \quad \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + k_y^2 Y(y) = 0 \quad (8.51)$$

con la condición

$$k^2 + \gamma^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (8.52)$$

en donde, al ser requerida propagación en la dirección z^+ , γ debe de ser imaginario. En principio basta con que sean imaginario puro y podemos escribir entonces

$$\gamma = jk_z \quad (8.53)$$

que sustituida en (8.52), conduce a la relación de *dispersión para la onda en la guía*:

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (8.54)$$

Donde $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$ es el número de onda de una onda de frecuencia angular ω propagándose por un medio dieléctrico ilimitado de constantes ε , μ . De (8.52) se deduce

$$\gamma = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - \omega^2 \mu \varepsilon} \quad (8.55)$$

con el cambio $h^2 = k_x^2 + k_y^2$, se obtiene la condición de corte para la frecuencia

$$f_c = \frac{h}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (8.56)$$

donde $f_c = 2\pi\omega_c$ es la *frecuencia de corte*. De (8.55) se deduce que cuando $f > f_c$, γ es una cantidad imaginaria y la onda se propaga por la guía en dirección z . Cuando, por el contrario, $f < f_c$, γ es una cantidad real y la onda va desvaneciéndose según avanza en la dirección z . Si se introducen h y f_c en la expresión (8.55), se obtiene la relación

$$\gamma = h \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c}\right)^2} \quad (8.57)$$

en la que claramente se ve que según va disminuyendo la frecuencia manteniéndose mayor que la frecuencia de corte, la onda se propaga (γ imaginaria) y que a partir de la

frecuencia de corte al bajar a frecuencias menores la onda se atenúa (γ real). De la expresión (8.54), se deduce que la constante de fase en la dirección z , k_z , vale

$$k_z = \sqrt{2\pi f^2 \mu\varepsilon - h^2} = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \quad (8.58)$$

y la *velocidad de fase* en la dirección z será entonces

$$u_{\varphi z} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{2\pi f}{k} \left(1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right)^{-1/2} = u_{\varphi} \left(1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right)^{-1/2} \quad (8.59)$$

donde u_{φ} es la velocidad de la luz en el medio dieléctrico $1/\mu\varepsilon$. De la misma forma se determina el valor de la *longitud de onda* en la dirección de avance de la onda

$$\lambda_z = \frac{2\pi}{k_z} = \lambda \left(1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2\right)^{-1/2} \quad (8.60)$$

donde λ es la longitud de onda en el medio ilimitado para una onda de frecuencia f ,

$$\lambda = \frac{u_{\varphi}}{f} \quad (8.61)$$

siendo

$$\lambda_z = \frac{u_{\varphi z}}{f} \quad (8.62)$$

de las expresiones (8.59) a (8.62) se deduce que, en una guía de ondas, la velocidad de fase en la dirección z y consecuentemente la longitud de onda en esa dirección, para una frecuencia en la que la onda se propaga, es mayor que la correspondiente velocidad de fase (y longitud de onda) para una onda plana que con la misma frecuencia f , se propagase por un medio ilimitado de constantes μ y ε . A diferencia del medio ilimitado, la velocidad de fase en la guía, con un dieléctrico de constantes μ y ε , es función de la frecuencia, con lo cual esta forma de transmitir ondas es dispersiva. Si llamamos *longitud de onda de corte* a

$$\lambda_c = \frac{u}{f_c} \quad (8.63)$$

e introducimos esta expresión en (8.60), se obtiene finalmente una relación entre las tres longitudes de onda definidas:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_z} + \frac{1}{\lambda_c} \quad (8.64)$$

8.4.1 Modos de transmisión TM

Los modos de transmisión transversal magnética **TM**, son aquellos en los que la componente H_z del campo magnético es cero. La única ecuación a resolver es, entonces, la (8.47)a, que, como se ha visto más arriba, equivale a la resolución de las dos ecuaciones diferenciales ordinarias (8.51)a,b. La solución de este tipo de ecuaciones es sobradamente conocida, y sabemos que se puede poner como suma de senos y cosenos. Sean entonces las soluciones

$$X(x) = A_1 \sin k_x x + A_2 \cos k_x x; \quad Y(y) = B_1 \sin k_y y + B_2 \cos k_y y \quad (8.65)$$

las constantes A_1 , A_2 , B_1 , y B_2 se deben determinar de las condiciones impuestas por la frontera en las paredes de la guía. La solución general será

$$E_z(x, y, z) = A_1 \sin k_x x + A_2 \cos k_x x \quad B_1 \sin k_y y + B_2 \cos k_y y \quad e^{-\gamma z} \quad (8.66)$$

una de las condiciones en la frontera impuestas por las ecuaciones de Maxwell, es que la componente tangencial del campo **E** se anule sobre los conductores, figura 8.5, esto es:

$$E_z(0, y, z) = E_z(a, y, z) = 0; \quad E_z(x, 0, z) = E_z(x, b, z) = 0 \quad (8.67)$$

aplicando la condición de que E_z sea cero para $x = 0$ e $y = 0$, resulta la solución:

$$E_z(x, y, z) = E_0 \sin k_x x \sin k_y y e^{-\gamma z} \quad (8.68)$$

donde $E_0 = A_1 B_1$. Si en la solución (8.68), introducimos las condiciones en la frontera correspondientes a $x = a$ e $y = b$, se tienen las condiciones

$$\sin k_x a = 0 \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a}; \quad m = 1, 2, \dots; \quad \sin k_y b = 0 \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.69)$$

condiciones que para cada par de valores enteros m y n da lugar a lo que se llama *modo de onda transversal magnético mn*: **TM**_{mn}. como

$$h = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (8.70)$$

se obtiene que la frecuencia de corte para el modo mn , vale

$$f_{c,mn} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (8.71)$$

Para el modo mn y frecuencias con valores por encima de la frecuencia de corte habrá transmisión del campo por medio de la guía. Las componentes del campo guiado en el modo \mathbf{TM}_{mn} se obtienen de (8.68) y (8.69), así como de (8.43) a (8.46), recordando que en los modos \mathbf{TM} , $H_z = 0$,

$$E_z = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi n}{b} y\right) e^{-jk_{z,mn} z} \quad (8.72)$$

$$E_x = -\frac{jk_{z,mn}}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jk_{z,mn} z} \quad (8.73)$$

$$E_y = -\frac{jk_{z,mn}}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jk_{z,mn} z} \quad (8.74)$$

$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jk_{z,mn} z} \quad (8.75)$$

$$H_y = \frac{j\omega\varepsilon}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{-jk_{z,mn} z} \quad (8.76)$$

donde se cumple que

$$k_{z,mn} = k \sqrt{1 - \left(\frac{f_{z,mn}}{f}\right)^2} \quad (8.77)$$

Y la longitud de onda de corte es

$$\lambda_{c,mn} = 2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^{-1/2} \quad (8.78)$$

El modo más bajo de propagación es aquel en el que $m = 1$, $n = 1$, pues si m o n valen cero el modo de transmisión no es \mathbf{TM} sino que aparentemente son modos \mathbf{TEM}

(únicamente son distintas de cero las componentes transversales), pero de hecho se demuestra (D. K. Cheng) que en una guía rodeada de conductor no pueden existir modos **TEM**. La *impedancia intrínseca* de la onda se define, para el modo **TM**, como:

$$\eta_{\text{TM},mn} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{k_{z,mn}}{\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sqrt{1 - \frac{f_{c,mn}^2}{f^2}} = \eta \sqrt{1 - \frac{f_{c,mn}^2}{f^2}} \quad \Omega \quad (8.79)$$

De las ecuaciones de las componentes se deduce inmediatamente que las condiciones en la frontera para las componentes normales de H se cumplen sobre las superficies conductoras de la guía:

$$H_x(0, y, z) = H_x(a, y, z) = 0; \quad H_y(x, 0, z) = H_y(x, b, z) = 0 \quad (8.80)$$

como se comprueba fácilmente de las expresiones (8.75) y (8.76). De las condiciones en la frontera para la componente normal del vector desplazamiento \mathbf{D} se puede deducir la densidad de carga superficial en las paredes de la guía pues se cumple que $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_{\text{sup}}$, siendo \mathbf{n} la normal a la superficie, y σ_{sup} la densidad de carga superficial. En estas condiciones

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{sup}}(0, y, z) &= D_x(0, y, z) = \varepsilon E_x(0, y, z) = -j \frac{\varepsilon k_{z,mn}}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) E_0 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} \right) y \\ \sigma_{\text{sup}}(a, y, z) &= -D_x(a, y, z) = -\varepsilon E_x(a, y, z) = j \frac{\varepsilon k_{z,mn}}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) E_0 \cos m\pi \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} \right) y \\ \sigma_{\text{sup}}(x, 0, z) &= D_y(x, 0, z) = \varepsilon E_y(x, 0, z) = -j \frac{\varepsilon k_{z,mn}}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) E_0 \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} \right) x \\ \sigma_{\text{sup}}(x, b, z) &= -D_y(x, b, z) = -\varepsilon E_y(x, b, z) = j \frac{\varepsilon k_{z,mn}}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) E_0 \cos \left(\frac{m\pi}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} \right) x \end{aligned} \quad (8.81)$$

De la misma forma se pueden hallar las corrientes superficiales de la condición de frontera impuesta a la componente tangencial de \mathbf{H} , que resultan estar dirigidas en la dirección z

$$\begin{aligned}
J_z(0, y, z) = H_y(0, y, z) &= -j \frac{\omega \varepsilon}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) E_0 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} \right) y \\
J_z(a, y, z) = -H_y(a, y, z) &= j \frac{\omega \varepsilon}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) E_0 \cos m\pi \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} \right) y \\
J_z(x, 0, z) = H_x(x, 0, z) &= -j \frac{\omega \varepsilon}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) E_0 \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} \right) x \\
J_z(a, y, z) = -H_x(a, y, z) &= j \frac{\omega \varepsilon}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) E_0 \cos n\pi \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} \right) x
\end{aligned} \tag{8.82}$$

8.4.2 Modos de transmisión TE

Si el modo, que se transmite por la guía, no tiene componente del campo eléctrico en la dirección de avance de la onda (en nuestro estudio dirección z) se le llama *modo transversal eléctrico*. **TE** La ecuación que lo define es la (8.47) b en todo idéntica a la (8.47) a , con lo que todo lo dicho para la resolución de ésta, vale para aquella. Lo que cambia son las condiciones de contorno, que ahora afectan al campo H_z . La solución será del tipo (8.66)

$$H_z(x, y, z) = A_1 \operatorname{sen} k_x x + A_2 \cos k_x x \quad B_1 \operatorname{sen} k_y y + B_2 \cos k_y y \quad e^{-\gamma z} \tag{8.83}$$

Como las componentes tangenciales de E , E_x y E_y , se deben anular sobre las superficies conductoras, en $y=0$, $y=b$ e $x=0$, $x=a$, de las ecuaciones (8.43) y (8.44) se obtiene las condiciones

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0 \text{ en } x = 0 \text{ y en } x = a; \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0 \text{ y en } y = b \tag{8.84}$$

que nos conducen a la solución:

$$H_z = H_0 \cos \left(\frac{\pi m}{a} x \right) \cos \left(\frac{\pi n}{b} y \right) e^{-jk_{z,mn} z} \tag{8.85}$$

obteniéndose las restantes componentes de las expresiones (8.43) a (8.46):

$$H_x = j \frac{k_{z,mn}}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) H_0 \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-jk_{z,mn} z} \tag{8.86}$$

$$H_y = j \frac{k_{z,mn}}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) H_0 \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-jk_{z,mn}z} \quad (8.87)$$

$$E_x = j \frac{\omega\mu}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) H_0 \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-jk_{z,mn}z} \quad (8.88)$$

$$E_y = -j \frac{\omega\mu}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) H_0 \text{sen} \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-jk_{z,mn}z} \quad (8.89)$$

en donde, las cantidades que aparecen en las expresiones anteriores son las mismas que para los modos **TM**. De igual forma la longitud de onda, la frecuencia de corte, la velocidad de fase etc..., tienen para los modos **TE**_{mn}, las mismas expresiones que para los modos **TM**_{mn}. Solo cambia que para la transmisión **TE** existe los modos $m0$ y $0n$, y que la impedancia intrínseca es distinta:

$$\eta_{\text{TE},mn} = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{k_{z,mn}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 - \frac{f_{c,mn}^2}{f^2} \right)^{-1/2} = \eta \left(1 - \frac{f_{c,mn}^2}{f^2} \right)^{-1/2} \quad \Omega \quad (8.90)$$

de esta expresión y la (8.79) se deduce que:

$$\eta_{\text{TE},mn} \eta_{\text{TM},mn} = \eta^2 \quad (8.91)$$

se comprueba igualmente que en un diagrama *frecuencias vs impedancias* ambas impedancias son asíntoticas verticalmente con la línea $x=f_c$ y asíntoticas horizontalmente con la línea de la impedancia intrínseca del medio ilimitado $y = \eta_{\varepsilon\mu}$, estando situada $\eta_{\text{TE},m}$ siempre por encima de esa línea y $\eta_{\text{TM},m}$ siempre por debajo de ella, figura 8.6.

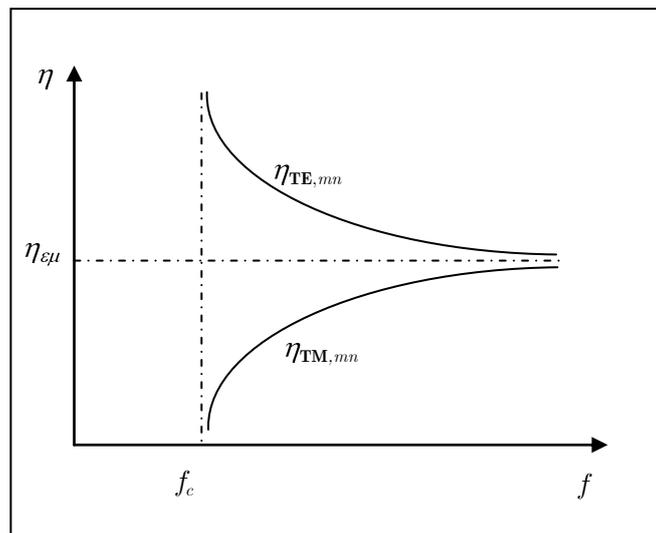


Figura 8.6

Frecuencias vs impedancias en una guía

De (8.88) y (8.89) se deduce inmediatamente el valor cero para las componentes tangenciales del campo eléctrico sobre las paredes. Además, al igual que se hace para los modos **TM**, de la discontinuidad de la componente normal de **D** y tangencial de **H** se pueden determinar el valor de las cargas y las corrientes sobre las paredes conductoras

Para las cargas superficiales

$$\begin{aligned}
 \sigma_{sup}(0, y, z) &= D_x(0, y, z) = \varepsilon E_x(0, y, z) = j \frac{\omega\mu}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) H_0 \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-jk_{z,mn}z} \\
 \sigma_{sup}(a, y, z) &= -D_x(a, y, z) = -\varepsilon E_x(a, y, z) = j \frac{\omega\mu}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) H_0 \cos m\pi \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{-jk_{z,mn}z} \\
 \sigma_{sup}(x, 0, z) &= D_y(x, 0, z) = \varepsilon E_y(x, 0, z) = -j \frac{\omega\mu}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) H_0 \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} x \right) e^{-jk_{z,mn}z} \\
 \sigma_{sup}(a, y, z) &= -D_x(a, y, z) = -\varepsilon E_x(a, y, z) = j \frac{\omega\mu}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) H_0 \cos n\pi \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} x \right) e^{-jk_{z,mn}z}
 \end{aligned} \tag{8.92}$$

Para las corrientes superficiales hay que determinar $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$, y resultan corrientes cerradas sobre las superficies correspondientes:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}(0, y, z) &= \mathbf{a}_x \times \mathbf{H}(0, y, z) = \mathbf{a}_z H_y(0, y, z) - \mathbf{a}_y H_z(0, y, z) \\
 &= H_0 \left[\mathbf{a}_z j \frac{k_{z,mn}}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) - \mathbf{a}_y \cos \left(\frac{\pi n}{b} y \right) \right] e^{-jk_{z,mn}z} \\
 \mathbf{J}(a, y, z) &= -\mathbf{a}_x \times \mathbf{H}(a, y, z) = -\mathbf{a}_z H_y(a, y, z) + \mathbf{a}_y H_z(a, y, z) \\
 &= H_0 \cos \pi m \left[-\mathbf{a}_z j \frac{k_{z,mn}}{h^2} \left(\frac{n\pi}{b} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{b} y \right) + \mathbf{a}_y \cos \left(\frac{\pi n}{b} y \right) \right] e^{-jk_{z,mn}z} \\
 \mathbf{J}(x, 0, z) &= \mathbf{a}_y \times \mathbf{H}(x, 0, z) = -\mathbf{a}_z H_x(x, 0, z) + \mathbf{a}_x H_z(x, 0, z) \\
 &= H_0 \left[-\mathbf{a}_z j \frac{k_{z,mn}}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} x \right) + \mathbf{a}_x \cos \left(\frac{\pi m}{a} x \right) \right] e^{-jk_{z,mn}z} \\
 \mathbf{J}(x, b, z) &= -\mathbf{a}_y \times \mathbf{H}(x, b, z) = \mathbf{a}_z H_x(x, b, z) - \mathbf{a}_x H_z(x, b, z) \\
 &= H_0 \cos n\pi \left[\mathbf{a}_z j \frac{k_{z,mn}}{h^2} \left(\frac{m\pi}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{a} x \right) - \mathbf{a}_x \cos \left(\frac{\pi m}{a} x \right) \right] e^{-jk_{z,mn}z}
 \end{aligned} \tag{8.93}$$

8.5 Ondas evanescentes en las guías de onda

Se ha visto que la constante de onda γ es

$$\gamma = h \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_c} \right)^2} \tag{8.94}$$

que es imaginaria cuando la frecuencia de operación es mayor que la frecuencia de corte, y por lo tanto existe transmisión de onda por la guía. Sin embargo para valores de la frecuencia menores que la frecuencia de corte la cantidad γ es real y en este caso la onda va desapareciendo según avanza y se dice que es una onda evanescente. Y las guías de onda tienen el efecto de filtro pasaalto. En este último caso a γ se le suele cambiar por α (constante de atenuación) y en las expresiones de los campos aparece el término que hace decrecer la amplitud

$$e^{-\alpha z} \quad (8.95)$$

En las guías de onda rectangulares, la constante γ viene expresada en función de las dimensiones de la sección

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \frac{\omega^2}{v^2}} \quad (8.96)$$

la frecuencia angular de corte es

$$\omega_c = v \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (8.97)$$

expresiones, en las que v es la velocidad de la onda electromagnética plana en el medio ilimitado de constantes ϵ , μ . En los modos **TE**, existe la posibilidad de que m o n (no simultáneamente) sean cero, en el caso planteado de guía rectangular de lados $a > b$, el valor mínimo de la frecuencia de corte, se da en el modo TE_{10} y vale

$$\omega_{c,10} = \frac{m\pi v}{a} \Leftrightarrow f_{c,10} = \frac{v}{2a} \quad (8.98)$$

frecuencia a la que le corresponde una longitud de onda de corte

$$\lambda_{c,10} = 2a \quad (8.99)$$

esto significa que longitudes de onda por encima de dos veces la máxima dimensión de la sección de la guía se atenuarán. Los primeros valores de la frecuencia de corte son

$$\begin{aligned} f_{c,TE10} &= \frac{v}{2a}; f_{c,TE01} = \frac{v}{2b}; f_{c,TE20} = \frac{v}{a}; f_{c,TE02} = \frac{v}{b}; \\ f_{c,TE11} &= f_{c,TM11} = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}; \text{ etc...} \end{aligned} \quad (8.100)$$

hay que tener en cuenta que es una serie doblemente infinita en m y n y que al depender de las dimensiones a y b , la posición de las frecuencias de corte de modos consecutivos pueden variar al dibujarlas en una línea según los valores de la geometría de la guía, por ejemplo si $a = 2$ cm y $b = 1$ cm, el orden de menor a mayor en los modos 10,01,20,02 y 11 es $\mathbf{TE}_{10} < \mathbf{TE}_{01} < \mathbf{TE}_{20} < \mathbf{TE}_{11} = \mathbf{TM}_{11} < \mathbf{TE}_{02}$. Si $a=2$ cm y $b=1,5$ cm, el orden de menor a mayor en los modos indicados es $\mathbf{TE}_{10} < \mathbf{TE}_{01} < \mathbf{TE}_{11} = \mathbf{TM}_{11} < \mathbf{TE}_{20} < \mathbf{TE}_{02}$. Y si por ejemplo $a=2$ cm y $b=0,5$ cm, el orden queda como $\mathbf{TE}_{10} < \mathbf{TE}_{20} < \mathbf{TE}_{01} < \mathbf{TE}_{11} = \mathbf{TM}_{11} < \mathbf{TE}_{02}$. Como se ve para los estos modos con los valores de m , n indicados y con las tres distintas geometrías, lo único que se mantiene en las tres es que el modo con frecuencia de corte más bajo es el \mathbf{TE}_{10} los demás varían su posición (el más alto en estos tres casos es \mathbf{TE}_{02} , pero esto puede variar si introducimos más modos, 30,03, 40, 21, 12, etc, o escogemos otras geometrías), según la elección que hagamos tendremos un tipo de selección de ondas u otro que pueden enviarse a través de la guía, en definitiva podemos filtrar determinados modos de radiación.

8.6 Flujo de potencia en guías de onda

El flujo de potencia por unidad de área a través de una guía de onda se determina, como es habitual, mediante el vector de Poynting \mathcal{P} , cuyo promedio temporal es:

$$\mathcal{P}_{prom} = \frac{1}{2} \text{Re } \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (8.101)$$

el valor de la potencia transmitida se debe determinar integrando este vector en la correspondiente área de la sección de la guía. El cálculo se debe de hacer para los distintos modos (M. Zahn; M. N. O. Sadiku; C. R. Paul *et al*; I L. C. Shen y J. A. Kong).

8.6.1 Flujo de potencia en guías de onda para modos TM

Como ejemplo se va a estudiar la transmisión de energía en modos **TM**. Los campos son de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= E_x(x, y)\mathbf{a}_x + E_y(x, y)\mathbf{a}_y + E_z(x, y)\mathbf{a}_z e^{-jk_z z} \\ \mathbf{H}(x, y, z) &= H_x(x, y)\mathbf{a}_x + H_y(x, y)\mathbf{a}_y e^{-jk_z z} \end{aligned} \quad (8.102)$$

donde las amplitudes pueden ser imaginarias. El promedio temporal del vector de Poynting es

$$\mathcal{P}_{prom} = \frac{1}{2} \text{Re} \left[E_x H_y^* - E_y H_x^* \mathbf{a}_z + E_z H_x^* \mathbf{a}_y - E_z H_y^* \mathbf{a}_x \right] \quad (8.103)$$

en donde se ha supuesto que hay ondas que avanzan por la guía, esto es que $k_{z,mn}$ es real, o sea que $k_{z,mn} = k_{z,mn}^*$ y por lo tanto el vector de Poynting no depende de z . Si estudiamos las ecuaciones que nos dan las componentes de los campos, (8.72)-(8.76) vemos que E_z es real mientras que H_x y H_y son imaginarios, luego su producto es también imaginario y por lo tanto desaparece al tomar la parte real en(8.103). La energía se mueve en la dirección Z . Sustituyendo las componentes en \mathbf{P} :

$$\mathcal{P}_{prom} = \frac{\omega \varepsilon |E_0|^2}{2h^2} \text{Re} \left[k_{z,mn} k_x^2 \cos^2 k_x x \sin k_y y + k_y^2 \sin^2 k_x x \cos k_y y \right] \quad (8.104)$$

y finalmente la potencia total radiada en la dirección z es:

$$P = \int_0^a \int_0^b \mathcal{P}_{prom} dx dy = \frac{\omega \varepsilon k_{z,mn} |E_0|^2}{8h^2} \quad (8.105)$$

8.7 Comentarios finales

Se ha estudiado la propagación de ondas y el transporte de energía en las denominadas guías de onda. Se ha visto que en las guías de onda hay componentes de los campos en la dirección de avance de la onda. Se han estudiado las soluciones para los modos **TM** y **TE** en guías rectangulares y se ha visto la existencia de una frecuencia de corte que hace que se puedan usar las guías como filtros de onda.

8.8 Cuestiones y ejercicios

1º. Una guía rectangular de 5cm. Por 2,5 cm. Tiene aire como dieléctrico.

- Determine la frecuencia de corte para los modos 10, 01, 20, 11, y 02.
- Si se excita la guía con una onda de 4000 Mhz. Determine la constante de propagación e indique que modos de los anteriores se podrán propagar.
- A que distancia, para los dos primeros modos que se atenúan, se divide la amplitud por un factor e .

2º. Una guía de onda rectangular de dimensiones 2 y 1 cm rodea un medio con parámetros $\epsilon_r=4$ y $\mu_r=1$. Determine:

- La frecuencia de corte f_c y la longitud de la onda de corte λ_c en los modos **TM**₁₁ y **TM**₁₂.
- Si la guía opera a una frecuencia un 10% superior a la de corte en el modo **TM**₁₁ ¿Qué valen la constante de fase y la longitud de onda para la onda guiada y la impedancia de la onda Z_{TM11} ?
- Si la onda opera a una frecuencia del 75% de la frecuencia de corte en el modo **TM**₁₁ ¿qué tipo de onda es? ¿Cuánto vale la amplitud (respecto a la onda incidente) al cabo de 2 cm.

3º. ¿Cuál es el modo **TE** dominante para una guía de ondas rectangular de área $a \times b$ siendo $a < b$ en cierto material aislante ($\epsilon_r=4$, $\mu_r=1$)? ¿Qué longitud de onda le corresponde a este modo **TE**? Si la guía tiene por dimensiones $a=1$ cm., $b=1,25$ cm. ¿Qué valen la constante de fase, la longitud de onda en la guía y la impedancia de la onda en el modo **TE** determinado en el primer apartado si la frecuencia de propagación es de 10 GHz

2º. La componente x del campo magnético en el interior de una guía rectangular tiene

la forma: $H_x = 10 \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{6\pi y}{b}\right) \sin \pi \times 10^{12} t - \beta z \text{ Am}^{-1}$. Si $a=2,5$ cm y $b=1,5$ cm,

determine:

- El modo de operación **TM**.
- La frecuencia de corte f_c .
- La constante de propagación γ .
- La impedancia intrínseca de la onda Z_{TM} .

8.9 Bibliografía

David K. Cheng; *Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería*; Addison, Wesley, Longman (Adisson-Wesley Iberoamericana S. A.), Ciudad de México, México, (1997).

Clayton R. Paul *et al*; *Introduction to electromagnetic fields*; WBC/McGraw-Hill, Cambridge, Mass., USA, (1997).

John D. Kraus and Fleisch D. A.; *Electromagnetics with applications (fifth edition)*; WBC/McGraw-Hill, Cambridge, Mass., USA, (1999).

Stanley V. Marshall *et al*; *Electromagnetismo: Conceptos y Aplicaciones*; Prentice Hall Hispanoamericana S. A., Ciudad de México, México (1996).

Liang C. Shen and Kong J. A.; *Applied electromagnetism (Third edition)*; PWS Publishing Company, Boston, Mass., USA, (1995).

David H. Stealin *et al*; *Electromagnetic waves*; Prentice-Hall International Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA, (1994).

Fawwaz T. Ulaby; *Fundamentals of applied electromagnetics*; Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, (1999).

Markus Zahn; *Electromagnetic field Theory: a problem solvig approach* ; John Wiley & sons, New York, USA, (1979).