$\mathbb{C}$ no es un cuerpo ordenado

Un *cuerpo ordenado* es un conjunto no vacío C con dos operaciones internas $+$ y $\cdot$ tales que la terna $(C, +, \cdot)$ cumple los axiomas de cuerpo conmutativo, y además, existe una relación $\prec$ de orden total compatible con las operaciones $+$ y $\cdot$ de C. Es decir, $\prec$ es una relación binaria en $\mathbb{C}$ reflexiva ($z \prec z$ para todo $z \in \mathbb{C}$), antisimétrica (si $z_1 \prec z_2$ y $z_2 \prec z_1$ entonces $z_1 = z_2$) y transitiva (si $z_1 \prec z_2$ y $z_2 \prec z_3$ entonces $z_1 \prec z_3$), además, todos los elementos son comparables (dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se verifica $z_1 \prec z_2$ ó $z_2 \prec z_1$) y verifica:

C1. Compatibilidad de $\prec$ con la suma: Si $z_1 \prec z_2 \Longrightarrow z_1 + z_3 \prec z_2 + z_3$ para todo $z_3 \in \mathbb{C}$.

C2. Compatibilidad de $\prec$ con el producto: Si $z_1 \prec z_2 \Longrightarrow z_1 \cdot z_3 \prec z_2 \cdot z_3$ para todo $z_3 \in \mathbb{C}$ tal que $0 \prec z_3$ y $z_3 \neq 0$.

Proposición. En $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ no existe ningún orden total compatible con su estructura de cuerpo.

Demostración: Para probarlo se procede por reducción al absurdo suponiendo que existe una relación de orden total $\prec$ en $\mathbb{C}$ compatible con su estructura de cuerpo. Como todos los elementos de $\mathbb{C}$ han de ser comparables, entonces $0 \prec i$ ó $i \prec 0$. En el primer caso resulta

$$0 \prec i \underset{\substack{C2.\\ 0\prec i}}{\Longrightarrow} 0 \cdot i \prec i \cdot i \Longrightarrow 0 \prec -1 \underset{\text{C1.}}{\Longrightarrow} 1 \prec 0 \underset{\substack{C2.\\ 0\prec i}}{\Longrightarrow} 1 \cdot i \prec 0 \cdot i \Longrightarrow i \prec 0,$$

Por tanto, se tiene que $i \prec 0$ y $0 \prec i$, de donde, por la antisimetría de $\prec$, se sigue que $0 = i$, lo cual es falso. En consecuencia, no puede ser $0 \prec i$.

Tampoco puede ser $i \prec 0$ pues en ese caso se tendría que $0 \prec -i$ y entonces

$$i \prec 0 \underset{\substack{C2.\\ 0\prec -i}}{\Longrightarrow} i\cdot(-i) \prec 0\cdot(-i) \Longrightarrow 1 \prec 0 \underset{\substack{C2.\\ 0\prec -i}}{\Longrightarrow} 1\cdot(-i) \prec 0\cdot(-i)\cdot \Longrightarrow -i \prec 0 \underset{\text{C1.}}{\Longrightarrow} -i+i \prec 0+i \Longrightarrow 0 \prec i$$

Nuevamente se cumpliría a la vez $i \prec 0$ y $0 \prec i$. Luego, no puede ser $i \prec 0$.

En conclusión, $\mathbb{C}$ no puede tener estructura de cuerpo ordenado. $\square$