DISEÑO DE REGULADORES ÓPTIMOS

CONTROL ÓPTIMO EN VARIABLES DE ESTADO

INTRODUCCIÓN

El método de diseño por realimentación de estados y observador, no siempre es el método de diseño más útil por:

- El traslado de las especificaciones de diseño no siempre es directo, particularmente para sistemas complejos, esto es, ¿cuál es la configuración de polos mejor para las especificaciones dadas? Imagínense sistemas de orden superior a dos no reducibles.
- En sistemas MIMO las ganancias de realimentación de estados que logran una configuración dada, no es única. ¿Cuál es la mejor K para una configuración de polos dada?
- Los autovalores del observador deberían escogerse más rápidos que los del sistema de lazo cerrado. ¿Hay algún otro criterio disponible para ayudar a decidirse por una configuración o por otra?
- El objetivo a conseguir con estas nuevas técnicas es tener en cuenta criterios adicionales para la selección de los vectores de ganancia más idóneos que ponderen la realimentación del estado de una manera óptima.

INTRODUCCIÓN

¿Qué significa óptimo? Hacer un trabajo de la mejor forma posible.

No obstante, antes de comenzar la búsqueda de una solución óptima, se debe:

- Definir el trabajo.
- Establecer una escala matemática para cuantificar lo que significamos como mejor.
- Descartar otras alternativas posibles.

Consideraciones:

- A menos que los índices de cuantificación sean claros y consistentes, declarar que un sistema es óptimo no tiene sentido real.
- Un sistema simple, impreciso, barato, fácil de implementar y con un comportamiento ajustado a requisitos podría considerarse óptimo.
- Por el contrario, un sistema muy preciso podría considerarse no óptimo por ser muy costoso o complejo.

PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO BÁSICO

Considerando la representación en variables de estado del sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

De aquí en adelante asumiremos que el valor del estado es accesible, bien porque las variables de estado son accesibles y pueden medirse, bien porque el sistema sea observable y exista la posibilidad de estimarlas (observador).

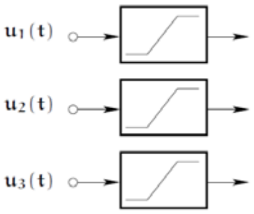
PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO BÁSICO

Las limitaciones se centrarán o bien en los valores permitidos de las variables de estado o sobre el valor de las entradas de control

$$u(t) : \left\| u(t)_k \right\| < M \ \forall t$$

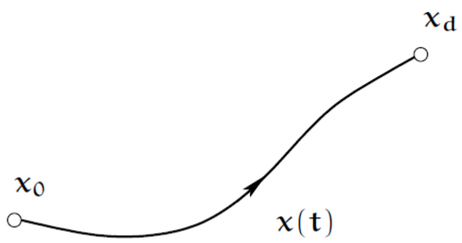
Representación de saturación en los actuadores:

$$\left\| \begin{matrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{matrix} \right\| = \left| u_1(t) \right|^2 + \left| u_2(t) \right|^2 + \left| u_1(t) \right|^2 < M^2 \ \forall t$$



PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO BÁSICO

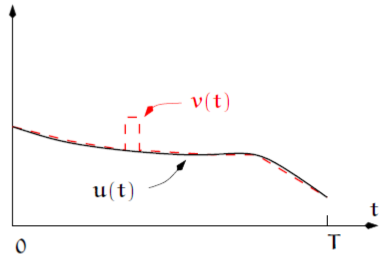
La tarea a realizar normalmente lleva implícitas unas condiciones de frontera adicionales sobre las ecuaciones del espacio de estados. Por ejemplo, se podría plantear transferir el estado x(t) desde un estado inicial conocido a un estado final especificado, en un tiempo concreto, o en él mínimo posible:

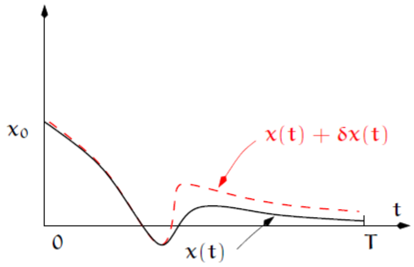


POLITÉCNICA

PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO BÁSICO

La manera directa de optimizar un diseño es definir un índice de funcionamiento o de coste J, que medirá la calidad de la solución de diseño. Para cada u(t) posible se corresponderá con una trayectoria de la función de estado:



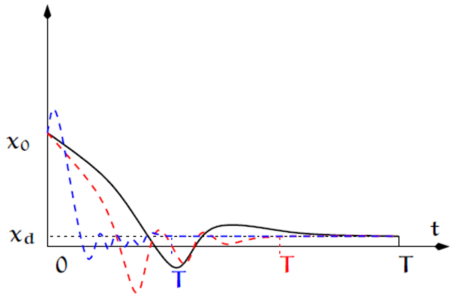


La entrada u(t) genera la trayectoria x(t). Una variación v(t) en u(t) genera una trayectoria diferente x(t)+δx(t)

POLITÉCNICA

PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO BÁSICO

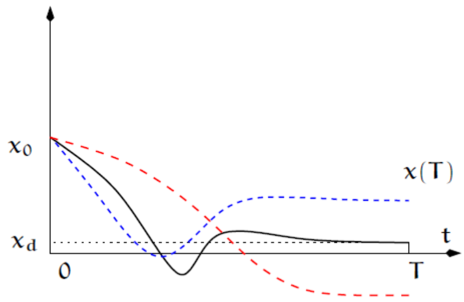
Uno de los criterios comunes es el de tiempo mínimo, en el cual se busca el control u(t) que produce la trayectoria más rápida para obtener el estado final deseado.



En este caso el índice de coste a minimizar puede expresarse simplemente por J=T

PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO BÁSICO

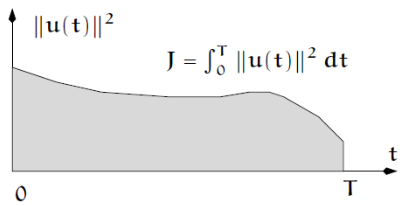
Otro criterio para la elección de la función de coste es el error final al obtener el estado final en un tiempo especificado de antemano T:

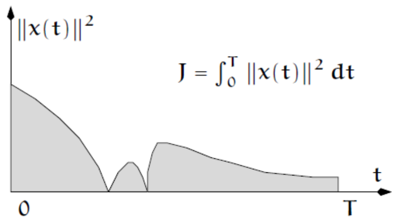


$$J = \left\| x(T) \right\|^2$$

PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO BÁSICO

Otra posibilidad es establecer criterios de área mínima bajo la curva del módulo al cuadrado del estado, para seleccionar aquellas entradas que producen transitorios más pequeños sobre la trayectoria generada entre el estado inicial y final:





De la misma manera, si se actúa sobre el área de la curva de módulos cuadráticos correspondientes a la entrada, estaríamos seleccionando aquellos controles que requieren menos esfuerzo de actuación.

CONTROL ÓPTIMO CUADRÁTICO

Aglutinando los casos anteriores, se plantea el control óptimo cuadrático. Este criterio se puede plantear definiendo el índice de coste J de la siguiente manera:

$$J = x^t(t_f)Sx(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[x^t(t)Qx(t) + u^t(t)Ru(t) \right] dt$$

Las matrices de ponderación S, Q y R pueden definirse según el objetivo que se pretenda perseguir:

$S = I \quad Q = 0 \quad R = 0 \qquad J = \left\| x(t_f) \right\|^2$ Consideración de error final mínimo

$S = 0 \quad Q = 0 \quad R = I \qquad J = \int_{t_0}^{t_f} \left\| u(t) \right\|^2 dt$ Energía mínima en la entrada

Las matrices S y Q son simétricas y no definidas negativas, y R es simétrica y definida positiva.

CONTROL ÓPTIMO CUADRÁTICO

Una matriz simétrica M es definida positiva si:

$$x^t M x > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad x \in \mathbb{R}^n \quad M \in \mathbb{R}^{nxn}$$

Una matriz simétrica M es no definida negativa si:

$$x^t M x \geq 0 \quad \forall x \neq 0 \quad x \in \mathbb{R}^n \quad M \in \mathbb{R}^{nxn}$$

$M_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} M_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2 + x_2^2$ Definida positiva

$M_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} M_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3x_1^2 - x_2^2$ No es signo definida

CONTROL ÓPTIMO CUADRÁTICO

Puesto que existen métodos complementarios para garantizar el error, normalmente suele prescindirse de la matriz S, quedando el índice de coste definido de la siguiente manera:

$$J = \int_0^{\infty} \left[x^t(t) Q x(t) + u^t(t) R u(t) \right] dt$$

Las matrices de ponderación S, Q y R pueden definirse según el objetivo que se pretenda perseguir:

REALIMENTACIÓN DE ESTADOS ÓPTIMA (LQR)

Partiendo del modelo en variables de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^p \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

Definiendo el índice de coste J, como:

$$J = \int_0^{\infty} \left[x^t(t) Q x(t) + u^t(t) R u(t) \right] dt$$

El control óptimo que minimiza J está dado por la ley de realimentación del estado:

$$u(t) = -Kx(t) \quad con \quad K = R^{-1} B^T P$$

REALIMENTACIÓN DE ESTADOS ÓPTIMA (LQR)

Donde P es la única solución definida positiva de la Ecuación Algebraica de Riccati (EAR):

$$A^t P + PA - PBR^{-1}B^t P + Q = 0$$

Las matrices Q (definida no negativa) y R (definida positiva) contienen los parámetros de ponderación del problema. Suele ser habitual elegir:

$$Q = C^t C \quad y \quad R = \lambda I \quad con \quad \lambda > 0$$

Que corresponde a elegir un equilibrio entre las energías de la salida y la entrada, con el índice:

$$J = \int_0^\infty \left[\|y(t)\|^2 + \lambda \|u(t)\|^2 \right] dt$$

REALIMENTACIÓN DE ESTADOS ÓPTIMA (LQR)

$$J = \int_0^\infty \left[\|y(t)\|^2 + \lambda \|u(t)\|^2 \right] dt$$

Si λ es pequeña y(t) converge rápidamente a 0, pero se necesitan actuaciones de control en u(t) grandes (grandes ganancias).

Si λ es grande son necesarios valores de u(t) más pequeños para conseguir el estado final pero por el contrario la convergencia de y(t) es más lenta.

EJEMPLO

$$G(s)=\frac{1}{s(s+1)} \qquad x_1=\frac{1}{s}x_2 \qquad x_2=\frac{1}{s+1}u \qquad y=x_1$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

Con: $J=\int_0^\infty\left[u^2+x_1^2+x_2^2\right]dt$ $\qquad Q=I$, $R=I$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x$$

EAR: $A^tP+PA-PBR^{-1}B^tP+Q=0$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}P+P\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}-P\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}P+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=0$$

EJEMPLO

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}P+P\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}-P\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}P+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=0$$

P definida positiva y simétrica: $P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}$

$$p_{12}^2-1=0$$
$$2(p_{12}-p_{22})-p_{22}^2+1=0$$
$$p_{11}=p_{12}+p_{12}p_{22}$$

$$P=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \qquad P=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$P=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

EJEMPLO

Luego la acción de control óptima sería:

$$K = R^{-1}B^{t}P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo que el lazo cerrado quedaría:

$$(A - BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

LIAPUNOV PARA SISTEMAS LINEALES INVARIANTES

Estabilidad para sistemas invariantes.

$$\dot{x} = Ax$$

Único estado de equilibrio x=0

Eligiendo la función de Liapunov:

$$V(x) = x^{t}Px$$

Donde P es una matriz simétrica definida positiva

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^{t}Px + x^{t}P\dot{x} = (Ax)^{t}Px + x^{t}PAx = x^{t}A^{t}Px + x^{t}PAx = x^{t}\left(A^{t}P + PA\right)x$$

LIAPUNOV PARA SISTEMAS LINEALES INVARIANTES

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^t Px + x^t P\dot{x} = (Ax)^t Px + x^t PAx = x^t A^t Px + x^t PAx = x^t \left(A^t P + PA\right) x$$

$$\dot{V}(x) = -x^t Qx \quad donde \quad Q = -\left(A^t P + PA\right)$$

Al ser V(x) definida positiva, para que exista estabilidad asintótica la derivada debe ser definida negativa, luego Q debe ser definida positiva.

Para ello, una condición necesaria y suficiente, es que P sea definida positiva.

Puesto que la igualdad debe cumplirse para todo caso, suele elegirse Q=**I**, y de ahí obtener P.

SOLUCIÓN DEL CONTROL ÓPTIMO LQR

El objetivo es encontrar una solución que minimice el índice J y por tanto sea una solución óptima para el control LQR. Partiendo de la función de coste:

$$J = \int_0^\infty \left[x^t(t)Qx(t) + u^t(t)Ru(t)\right]dt$$

Suponiendo P simétrica definida positiva, solución de la EAR:

$$A^t P + PA - PBR^{-1}B^t P + Q = 0$$

Para ello vamos a partir de una función de Liapunov en su segunda forma:

$$V(x) = x^t(t)Px(t)$$

SOLUCIÓN DEL CONTROL ÓPTIMO LQR

Siendo V(t) una forma cuadrática de Liapunov la derivamos:

$$V(x) = x^t(t)Px(t)$$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^t(t)Px(t) + x^t(t)P\dot{x}(t) = (Ax+Bu)^t Px + x^t P(Ax+Bu)$$

$$\dot{V}(x) = x^t\left(A^tP + PA\right)x + u^tB^tPx + x^tPBu$$

De la EAR:

$$A^tP + PA - PBR^{-1}B^tP + Q = 0 \;\Rightarrow\; A^tP + PA = -Q + PBR^{-1}B^tP$$

$$\dot{V}(x) = x^t\left(-Q + PBR^{-1}B^tP\right)x + u^tB^tPx + x^tPBu$$

SOLUCIÓN DEL CONTROL ÓPTIMO LQR

$$\dot{V}(x) = x^t\left(-Q + PBR^{-1}B^tP\right)x + u^tB^tPx + x^tPBu + u^tRu - u^tRu$$

$$\dot{V}(x) = -\left[x^tQx + u^tRu\right] + x^tPBR^{-1}B^tPx + u^tB^tPx + x^tPBu + u^tRu$$

$$\dot{V}(x) = -\left[x^tQx + u^tRu\right] + \left(B^tPx + Ru\right)^t R^{-1}\left(B^tPx + Ru\right)$$

$$\int_0^\infty \dot{V}(x) = -J + \int_0^\infty \left(B^tPx + Ru\right)^t R^{-1}\left(B^tPx + Ru\right)dt$$

$$J = x^t(0)Px(0) + \int_0^\infty \left(B^tPx + Ru\right)^t R^{-1}\left(B^tPx + Ru\right)dt$$

SOLUCIÓN DEL CONTROL ÓPTIMO LQR

$$J = x^t(0)Px(0) + \int_0^\infty \left(B^t Px + Ru\right)^t R^{-1}\left(B^t Px + Ru\right)dt$$

Para que J sea mínimo, siendo el término integral no negativo:

$$u = -R^{-1}B^T Px = -Kx$$
$$K = R^{-1}B^T P$$

El valor mínimo de la función de coste será:

$$J = x^t(0)Px(0)$$