Cálculo I
Bloque III: Integración impropia y numérica, sucesiones y series.

Rafael Bravo de la Parra

U. D. Matemáticas, Universidad de Alcalá

Curso 2019-20

Índice

1. TEMA 8: Integración numérica e impropia.
2. TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.
3. TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.

Índice

1. TEMA 8: Integración numérica e impropia.
   - Integración numérica
   - Integrales impropias
2. TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.
3. TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.

Integración numérica: Regla del Punto Medio

Cálculo aproximado de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$
$[a,b]$ se divide en n subintervalos de longitud $h=(b-a)/n$,
$[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\ldots,n)$, con $x_i=a+ih$.
Denotamos por $\bar{x}_i=\frac{1}{2}(x_{i-1}+x_i)$, el punto medio del intervalo $[x_{i-1},x_i]$.

Regla del Punto Medio

$$M_n=hf(\bar{x}_1)+\cdots+hf(\bar{x}_n)=h\sum_{i=1}^{n}f(\bar{x}_i).$$

Fórmula del error: Suponiendo que $|f''(x)|\leq K$ para $x\in[a,b]$:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-M_n\right|=E_M\leq\frac{K}{24}h^2(b-a)$$

Integración numérica: Regla del Trapecio

Cálculo aproximado de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

$[a,b]$ se divide en n subintervalos de longitud $h=(b-a)/n$,
$[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\dots,n)$, con $x_i=a+ih$.

Regla del Trapecio

$$T_n=\frac{h}{2}(f(x_0)+f(x_1))+\frac{h}{2}(f(x_1)+f(x_2))+\cdots+\frac{h}{2}(f(x_{n-1})+f(x_n))$$

$$T_n=\frac{h}{2}(f(a)+f(b))+h\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)$$

Fórmula del error: Suponiendo que $|f''(x)|\le K$ para $x\in[a,b]$:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-T_n\right|=E_T\le\frac{K}{12}h^2(b-a)$$

Integración numérica: Regla de Simpson

Cálculo aproximado de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

$[a,b]$ se divide en n, **número par**, subintervalos de longitud $h=(b-a)/n$, $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,\ldots,n)$, con $x_i=a+ih$.

Regla de Simpson

Siendo i par se hace la siguiente aproximación de la integral entre x_i y x_{i+2}:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_i)+4f(x_{i+1})+f(x_{i+2})\right)$$

que se basa en la interpolación cuadrática. La fórmula para el intervalo $[a,b]$ es:

$$S_n=\frac{h}{3}\left(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+\cdots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

Fórmula del error: Suponiendo que $|f^{(4)}(x)|\le K$ para $x\in[a,b]$:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-S_n\right|=E_S\le\frac{K}{180}h^4(b-a)$$

Índice

1. TEMA 8: Integración numérica e impropia.
   - Integración numérica
   - Integrales impropias
2. TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.
3. TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.

Integrales impropias: intervalos no acotados

Definición (Integrales impropias: $\int_a^\infty f(x)\,dx$, $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$.)

1. *Si f es continua en $[a,\infty)$ entonces si el límite existe (número real):*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx.$$

2. *Si f es continua en $(-\infty,b]$ entonces si el límite existe (número real):*

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx.$$

*Si existen los límites las integrales $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ se dicen **convergentes** y en caso contrario **divergentes**.*

3. *Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ e $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ son convergentes para algún $a\in\mathbb{R}$ se define:*

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Integrales impropias: funciones no acotadas

Definición (Integrales impropias: funciones no acotadas.)

1. *Sea f continua en $[a,b)$ y $\lim_{x\to b^-} |f(x)| = \infty$. Si existe el límite (número real) se define:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx.$$

2. *Sea f continua en $(a,b]$ y $\lim_{x\to a^+} |f(x)| = \infty$. Si existe el límite (número real) se define:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx.$$

   Si existen los límites la integral se dice ***convergente*** *y en caso contrario* ***divergente****.*

3. *Sea f tal que $\lim_{x\to c^+} |f(x)| = \infty$ o $\lim_{x\to c^-} |f(x)| = \infty$ para algún $c \in (a,b)$, f es continua en $[a,c) \cup (c,b]$ e $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ son ambas convergentes. Entonces se define:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Integrales impropias: Criterio de comparación

Teorema

Sean f y g dos funciones continuas en $[a,\infty)$ tales que

$$0 \leq g(x) \leq f(x) \text{ para todo } x \in [a,\infty)$$

Se tiene entonces:

1. *Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente.*
2. *Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es divergente entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente.*

Teoremas análogos se pueden enunciar para los demás tipos de integrales impropias.

Índice

1 TEMA 8: Integración numérica e impropia.

2 TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.

3 TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.

Índice

1. TEMA 8: Integración numérica e impropia.
2. TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.
   - Sucesiones
   - Series numéricas.
3. TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.

Sucesiones

Definición

Una ***sucesión*** *es una función cuyo dominio es el conjunto de los enteros positivos.*
Notación: La sucesión de ***términos*** $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$
se denota $\{a_n\}$ *o* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definición (Sucesión convergente)

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ ***converge*** *a un número real* L *si podemos acercar tanto como queramos los términos* a_n *a* L *sin más que coger* n *suficientemente grande. El número* L *se denomina* ***límite*** *de la sucesión. Si la sucesión* $\{a_n\}$ *no es* ***convergente*** *se dice que es* ***divergente***.
Notación: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Límites de sucesiones y operaciones.

Teorema

Supongamos que existen los límites $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = L_2$*. Se tiene entonces*

- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2.$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2.$
- *Si* $L_2 \neq 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2}.$

Teorema

Sea $\{a_n\}$ *una sucesión y* f *una función tal que* $f(n) = a_n$ *para todo* $n \geq 1$*. Si*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \qquad \textit{entonces} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = L.$$

Teorema (Compresión.)

Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *y* $\{c_n\}$ *sucesiones tales que* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *para todos los n mayores que algún índice N. Si* $\lim_{x\to+\infty} a_n = \lim_{x\to+\infty} b_n = L$ *entonces también* $\lim_{x\to+\infty} c_n = L.$

Límites de sucesiones

Definición (Límites infinitos)

*La sucesión $\{a_n\}$ **diverge** a ∞ ($-\infty$) si podemos hacer tan grandes (grandes negativos) como queramos los términos a_n sin más que coger n suficientemente grande.*

Notación: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \ (-\infty)$.

Teorema

Sea $\{a_n\}$ una sucesión y f una sucesión tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \geq 1$. Si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty \ (-\infty) \qquad \textit{entonces} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \ (-\infty).$$

Teorema

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $a_n \leq b_n$ para todos los n mayores que algún índice N.

1. *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n = +\infty$ *entonces también* $\lim\limits_{x\to+\infty} b_n = +\infty$.
2. *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} b_n = -\infty$ *entonces también* $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n = -\infty$.

Sucesiones monótonas.

Definición (Sucesión monótona)

Una sucesión $\{a_n\}$ se denomina

creciente *si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.*

decreciente *si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n \geq 1$.*

Una sucesión se denomina ***monótona*** *si es creciente o decreciente.*

Definición (Sucesión acotada)

Una sucesión $\{a_n\}$ se denomina acotada superiormente, acotada inferiormente y acotada si lo es, respectivamente, el conjunto formado por todos sus términos, $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$.

Teorema

Toda sucesión monótona y acotada es convergente.

Índice

1. TEMA 8: Integración numérica e impropia.
2. TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.
   - Sucesiones
   - Series numéricas.
3. TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.

Series numéricas.

Dada una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ utilizamos la notación $\displaystyle\sum_{n=p}^{q} a_n = a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$ con $p \leq q$.

A $\{a_n\}$ le asociamos la sucesión $\{s_n\}$ donde $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Definición (Serie)

- *Para la sucesión $\{s_n\}$ se utiliza también la expresión simbólica $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ o abreviadamente*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ o } \sum a_n,$$
que se denomina ***serie infinita*** *o simplemente* ***serie****.*
- *A los números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se les denomina* ***términos*** *de la serie y a a_n* ***término general****.*
- *Al número s_n se le denomina* ***suma parcial n-ésima de la serie****.*

Series numéricas: convergencia.

Definición (Convergencia de una serie)

*Se dice que la **serie** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** si existe el límite de la sucesión de sus sumas parciales, $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ y, en este caso, a s se le denomina **suma de la serie** y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.*

*Si $\{s_n\}$ no tiene un límite finito se dice que la **serie diverge**.*

Series geométricas

Una **serie geométrica** de razón r y primer elemento $a \neq 0$ es de la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a\,r^n = a + a\,r + a\,r^2 + \cdots + a\,r^n + \cdots$$

Teorema (Convergencia de las series geométricas)

Si $|r| \geq 1$ entonces la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a\,r^n$ diverge.

Si $|r| < 1$ entonces la serie geométrica converge siendo su suma $\sum_{n=0}^{\infty} a\,r^n = \dfrac{a}{1-r}$.

Series numéricas: convergencia.

Teorema (Condición necesaria de convergencia de una serie.)

Si la serie $\sum a_n$ *es covergente entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Corolario

Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ *no existe o es* $\neq 0$ *entonces la serie* $\sum a_n$ *es divergente.*

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ no implica la convergencia de la serie

La **serie armónica** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Teorema

Si las series $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *son convergentes, con* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, *y* c *es un número se tiene que:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c\, A$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B$.

Series de términos positivos.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice de términos positivos si $a_n \geq 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Teorema (Criterio de la integral)

Sea $f(x)$ una función continua, positiva y decreciente en el intervalo $[1, \infty)$ tal que $a_n = f(n)$ para todo $n \geq 1$.

- *Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.*
- *Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es divergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.*

El teorema sigue siendo válido si se cumplen las hipótesis en un intervalo $[\alpha, \infty)$ para algún $\alpha > 1$.

Teorema (Convergencia de la serie p)

La serie p, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

Series de términos positivos.

Criterio de comparación directa.

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos tales que $a_n \leq b_n$ para todo $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$.

1. Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.
2. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente.

Criterio de comparación en el límite.

Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos. Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, \infty)$$

entonces o ambas series convergen o ambas series divergen.

La comparación se establece con las series p o con las series geométricas.

Series de términos positivos.

Teorema (Criterio del cociente)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c.$$

- *Si* $c < 1$ *entonces la serie converge.*
- *Si* $c > 1$, *o si* $c = \infty$, *entonces la serie diverge.*
- *Si* $c = 1$ *el criterio no decide.*

Teorema (Criterio de la raíz)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c.$$

- *Si* $c < 1$ *entonces la serie converge.*
- *Si* $c > 1$, *o si* $c = \infty$, *entonces la serie diverge.*
- *Si* $c = 1$ *el criterio no decide.*

Series alternadas.

Una **serie alternada** es aquella cuyos términos son positivos y negativos alternativamente.

Criterio de convergencia.

Sea la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ o $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$, con $a_n \geq 0$, que verifica:

1. $a_{n+1} \leq a_n$ para todo n (*la sucesión* $\{a_n\}$ *es decreciente*).
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (*condición necesaria de convergencia*).

entonces la serie converge.

Además si s es la suma de la serie se tiene que el residuo R_n al estimarla a través de s_n verifica que

$$|R_n| = |s - s_n| \leq a_{n+1}.$$

Para que se cumpla el criterio basta que $\{a_n\}$ sea decreciente de un cierto n_0 en adelante.

Convergencia absoluta.

Definición (Convergencia absoluta)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se dice que es* ***absolutamente convergente*** *si la serie de valores absolutos* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es convergente.*

Definición (Convergencia condicionada)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se dice que es* ***condicionalmente convergente*** *si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente pero la serie de valores absolutos* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es divergente.*

Teorema

Si una serie es absolutamente convergente entonces es convergente.

Convergencia absoluta.

Teorema (Criterio del cociente)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos no nulos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = c.$$

- *Si* $c < 1$ *entonces la serie es absolutamente convergente.*
- *Si* $c > 1$, *o si* $c = \infty$, *entonces la serie es divergente.*
- *Si* $c = 1$ *el criterio no decide.*

Teorema (Criterio de la raíz)

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos no nulos tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = c.$$

- *Si* $c < 1$ *entonces la serie es absolutamente convergente.*
- *Si* $c > 1$, *o si* $c = \infty$, *entonces la serie es divergente.*
- *Si* $c = 1$ *el criterio no decide.*

Convergencia y divergencia de series.

Estrategia para analizar la convergencia/divergencia de la serie $\sum a_n$

1. ¿ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$? Si no es así, la serie es divergente.
2. ¿Es una serie de términos positivos (o negativos)? Si lo es:
   i. ¿Es una serie geométrica o una serie p? Si lo es, se aplica el resultado de convergencia/divergencia correspondiente.
   ii. ¿Es una serie comparable directamente o en el límite con una geométrica o una serie p? Si lo es, se aplica el criterio correspondiente.
   iii. ¿Se le puede aplicar el criterio del cociente, de la raiz o de la integral? Si alguno es concluyente se aplica.
3. ¿Es una serie alternada? Si lo es y ya se ha comprobado que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ falta asegurarse que $\{|a_n|\}$ es decreciente a partir de un cierto n_0 para asegurar la convergencia.
4. Si la serie no se puede considerar de términos positivos o negativos, es decir, tiene infinitos términos positivos e infinitos negativos, no necesariamente alternados, podemos estudiar su convergencia absoluta a través de los criterios de series de términos positivos (incluidos los criterios del cociente y la raiz para este tipo de convergencia). Si la serie converge absolutamente entonces sabemos que converge, si no converge absolutamente no sabemos nada sobre la convergencia.
5. En último extremo podemos recurrir a la definición de convergencia de una serie.

Índice

1 TEMA 8: Integración numérica e impropia.

2 TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.

3 TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.

Índice

1. TEMA 8: Integración numérica e impropia.
2. TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.
3. TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.
   - Series de potencias
   - Series de Taylor

Series de potencias.

Series de potencias.

Una **serie de potencias** tiene la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

donde x es una variable y las constantes c_n se denominan **coeficientes de la serie**.

De forma más general a la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ se denomina **serie de potencias en** $x-a$ o **serie de potencias con centro en** a.

La función $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ está definida para todos los valores x para los que la serie de potencias converge.

Series de potencias.

Convergencia de las series de potencias.

Teorema (Convergencia de una serie de potencias)

En una serie de potencias, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$*, se da una de las siguientes alternativas de convergencia:*

1. *La serie sólo converge cuando* $x = a$*.*
2. *La serie converge absolutamente para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*
3. *Existe un* $R > 0$ *tal que la serie*
   - *Converge absolutamente si* $|x-a| < R$, $x \in (a-R, a+R)$*.*
   - *Diverge si* $|x-a| > R$, $x \in (-\infty, a-R) \cup (a+R, \infty)$*.*

Al número R se le denomina **radio de convergencia** de la serie de potencias y puede ser: 1. $R = 0$, 2. $R = \infty$ o 3. $R \in (0, \infty)$.
Al intervalo en el que converge la serie de potencias se le denomina **intervalo de convergencia**.

Series de potencias: Diferenciación e Integración.

Teorema (Diferenciación e integración término a término)

Sea la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *con radio de convergencia* R.

La función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ *es diferenciable y, por tanto, continua e integrable en el intervalo* $(a-R, a+R)$. *Además:*

1. $f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$.
2. $\int f(x)dx = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$.

siendo los radios de convergencia de ambas series iguales a R.

Corolario

La función $f(x)$ *tiene derivada de orden* n *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *en el intervalo* $(a-R, a+R)$, *siendo*

$f^{(n)}(x) = n!c_n + ((n+1)n\cdots 2)\, c_{n+1}(x-a) + ((n+2)(n+1)\cdots 3)\, c_{n+2}(x-a)^2 + \cdots =$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} (k(k-1)\cdots(k-n+1))\, c_k(x-a)^{k-n}.$$

Índice

1. TEMA 8: Integración numérica e impropia.
2. TEMA 9: Sucesiones y Series Numéricas.
3. TEMA 10: Series de potencias. Series de Taylor.
   - Series de potencias
   - Series de Taylor

Polinomios y Series de Taylor

Definición (Polinomio de Taylor)

Sea f una función derivable n veces en el punto a. Se define su polinomio de Taylor de grado n con centro en a como

$$p_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En el caso de $a = 0$ se denominan polinomios de Maclaurin.

Definición (Serie de Taylor)

Sea f una función que posee derivada de orden n para todo $n \in \mathbb{N}$ en el punto a. Se define su serie de Taylor con centro en a como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

En el caso de $a = 0$ se denomina serie de Maclaurin.

Fórmula de Taylor con resto

Definición

Sea $p_n(x)$ el polinomio de Taylor de grado n con centro en a de la función f. Se denomina resto n-ésimo de Taylor con centro en a de la función f a:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x).$$

Teorema (Teorema de Taylor)

Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo abierto I que contiene al punto a.
Entonces para cada $x \in I$ existe un punto c, que depende de x y de n, situado entre a y x tal que:

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}.$$

o también

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}.$$

Aproximación de funciones

Teorema

Sea f una función que posee derivada de orden n para todo $n \in \mathbb{N}$ en el punto a. Se tiene que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ si y solo si } \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

Series de Maclaurin con sus intervalos de convergencia

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad (-1,1)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (-\infty,\infty)$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad (-\infty,\infty)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (-\infty,\infty)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1,1]$$

$$\operatorname{atan} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad [-1,1]$$

Series de Taylor de funciones definidas mediante series de potencias

Teorema

Sea f una función que admite un desarrollo en serie de potencias en a,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \; para \; |x-a| < R$$

entonces los coeficientes verifican

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

En su intervalo de convergencia una serie de potencias es la serie de Taylor de la función que define (su suma).