

Cálculo I

Bloque I: Números, funciones, límites y continuidad.

Rafael Bravo de la Parra

U. D. Matemáticas, Universidad de Alcalá

Curso 2019-20

Índice

- 1 TEMA 1: Conjuntos de números: operaciones y representación.
- 2 TEMA 2: Funciones: operaciones y representación. Funciones elementales.
- 3 TEMA 3: Límites de funciones. Funciones continuas

Índice

- 1 TEMA 1: Conjuntos de números: operaciones y representación.
 - Números enteros, racionales y reales.
 - Números complejos.
- 2 TEMA 2: Funciones: operaciones y representación. Funciones elementales.
- 3 TEMA 3: Límites de funciones. Funciones continuas

Números enteros, racionales y reales.

Números naturales

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Números enteros

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Números racionales

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

Desarrollos decimales finitos o infinitos periódicos.

Números reales

$$\mathbb{R}$$

Todo tipo de desarrollos decimales.

Los desarrollos decimales infinitos no periódicos corresponden a los números **irracionales**, los reales que no son racionales: $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Índice

- 1 TEMA 1: Conjuntos de números: operaciones y representación.
 - Números enteros, racionales y reales.
 - Números complejos.
- 2 TEMA 2: Funciones: operaciones y representación. Funciones elementales.
- 3 TEMA 3: Límites de funciones. Funciones continuas

Forma binómica y operaciones.

Números complejos

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

- ❶ **Unidad imaginaria** $i, i^2 = -1$
- ❷ **Parte real:** $\operatorname{Re} z = a \in \mathbb{R}$
- ❸ **Parte imaginaria:** $\operatorname{Im} z = b \in \mathbb{R}$

Suma y producto de números complejos

$$z_1 = a_1 + b_1 i \text{ y } z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$\text{SUMA: } z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$\text{PRODUCTO: } z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2)i$$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ y las operaciones de $\mathbb{C}$ extienden a las de $\mathbb{R}$.

Conjugado. Cociente.

Complejo conjugado

El **complejo conjugado** de $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$.

- ❶ La suma de los conjugados es el conjugado de la suma: $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$.
- ❷ El producto de los conjugados es el conjugado del producto: $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2}$.
- ❸ Producto de un número por su conjugado: $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$.

Cociente de números complejos

$$z_1 = a_1 + b_1 i \text{ y } z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2} (z_1 \cdot \bar{z}_2) = \frac{a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{-a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

El **inverso** de un número complejo $z = a + bi \neq 0$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a^2 + b^2} \bar{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$$

Módulo y argumento de un número complejo

Módulo de un número complejo

El **módulo** del número complejo $z = a + bi$ es el número positivo (o 0 si $z = 0$):

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Se tiene por tanto $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Argumento de un número complejo

El **argumento** de un número complejo $z = a + bi$ es el ángulo que comienza en el semieje real positivo y termina en el segmento que une el origen con el punto (a, b) .

Se representa por $\arg z$.

Se considera también argumento a cualquier otro ángulo que se diferencie del anterior en un múltiplo de 2π .

El valor del argumento entre 0 y 2π se obtiene mediante la fórmula:

$$\arg z = \begin{cases} \arctg(b/a) & \text{si } a > 0 \text{ y } b \geq 0 \\ \pi/2 & \text{si } a = 0 \text{ y } b > 0 \\ \arctg(b/a) + \pi & \text{si } a < 0 \\ 3\pi/2 & \text{si } a = 0 \text{ y } b < 0 \\ \arctg(b/a) + 2\pi & \text{si } a > 0 \text{ y } b < 0 \end{cases}$$

Forma polar

Forma polar de un número complejo

Sea el número complejo $z = a + bi$, llamamos $r = |z|$ a su módulo y $\theta = \arg z$ a su argumento:

$$a = r \cos \theta$$

$$b = r \operatorname{sen} \theta$$

y así

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Producto y cociente en forma polar

Sean $z_1 = a_1 + b_1 i = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ y $z_2 = a_2 + b_2 i = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2))$$

es decir

- El módulo del producto es el producto de los módulos: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- El argumento del producto es la suma de los argumentos:

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Si $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2))$$

Potencias y raíces enteras de un número complejo

Potencia entera de un número complejo

Sea el número complejo $z = a + bi = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ y $n \in \mathbb{N}$:

$$z^n = (a + bi)^n = r^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Raíz entera de un número complejo

Sea el número complejo $z = a + bi = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ y $n \in \mathbb{N}$:

Si $z \neq 0$ entonces z tiene n raíces n -ésimas distintas w_k , $(w_k)^n = z$.

Todas las raíces n -ésimas tienen el mismo módulo: $|w_k| = \sqrt[n]{|z|}$
y argumentos:

$$\arg(w_k) = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k \text{ con } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Teorema (Teorema Fundamental del Álgebra)

Un polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces (contando las repeticiones).

Fórmula de Euler

Fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$$

Así

$$z = a + bi = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r e^{i\theta}$$

Operaciones

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \text{ y } z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

Producto:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Cociente:

$$z_1 / z_2 = r_1 e^{i\theta_1} / (r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 / r_2 e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

Potencia:

$$z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Índice

- 1 TEMA 1: Conjuntos de números: operaciones y representación.
- 2 TEMA 2: Funciones: operaciones y representación. Funciones elementales.
- 3 TEMA 3: Límites de funciones. Funciones continuas

Índice

- 1 TEMA 1: Conjuntos de números: operaciones y representación.
- 2 TEMA 2: Funciones: operaciones y representación. Funciones elementales.
 - Definiciones y gráficas.
 - Operaciones: suma, producto y cociente. Funciones racionales.
 - Funciones trascendentes: trigonométricas y exponenciales.
 - Composición de funciones: función inversa, logaritmos y trigonométricas inversas.
- 3 TEMA 3: Límites de funciones. Funciones continuas

Terminología sobre funciones

Definición

Una **función** f de un conjunto A en un conjunto B es una regla que asigna a cada elemento x de A exactamente un elemento, llamado **imagen** de x y denotado $f(x)$, del conjunto B .

- Notación: $f : A \longrightarrow B$.
- El conjunto A se denomina **dominio** de f .
- Si una función f está expresada mediante una fórmula y no se especifica su dominio, éste es el mayor subconjunto de números reales x para los que $f(x)$ es un número real.

$$\text{dom}f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$$

- Dos funciones expresadas mediante la misma fórmula si tienen distintos dominios se consideran funciones distintas.
- El conjunto de todos los elementos $y \in B$ para los que existe un $x \in \text{dom}f$ tal que $y = f(x)$ se denomina **rango**, o imagen, de f .

$$\text{rango}f = \{y \in B : \text{existe } x \in \text{dom}f \text{ con } y = f(x)\}$$

El rango de f no tiene por qué coincidir con B .

- A x se le denomina variable **independiente** y a y variable **dependiente**.

Gráficas de funciones

Definición

En el sistema de coordenadas cartesianas o rectangulares del plano, la **gráfica** de una función f es el conjunto de puntos de coordenadas $(x, f(x))$ donde x pertenece al dominio de f .

$$\text{graf } f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \text{dom } f\}$$

- Se puede decir que $y = f(x)$ es la ecuación de la gráfica de f .
- Si tenemos una curva en el plano, ésta puede ser la gráfica de una función si y sólo si cada recta vertical (paralela al eje y) corta a la curva como mucho en un punto.
- El dominio de una función es la proyección ortogonal de su gráfica sobre el eje x .
- El rango de una función es la proyección ortogonal de su gráfica sobre el eje y .

Índice

- 1 TEMA 1: Conjuntos de números: operaciones y representación.
- 2 TEMA 2: Funciones: operaciones y representación. Funciones elementales.
 - Definiciones y gráficas.
 - Operaciones: suma, producto y cociente. Funciones racionales.
 - Funciones trascendentes: trigonométricas y exponenciales.
 - Composición de funciones: función inversa, logaritmos y trigonométricas inversas.
- 3 TEMA 3: Límites de funciones. Funciones continuas

Operaciones aritméticas

Definición

Si f y g son dos funciones, entonces la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$, el **producto** fg y el **cociente** f/g se definen como sigue:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{con } \text{dom}(f + g) = \text{dom} f \cap \text{dom} g$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \quad \text{con } \text{dom}(f - g) = \text{dom} f \cap \text{dom} g$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \text{con } \text{dom}(fg) = \text{dom} f \cap \text{dom} g$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) \quad \text{con } \text{dom}(f/g) = \{x \in \text{dom} f \cap \text{dom} g : g(x) \neq 0\}$$

Funciones polinomiales y racionales

- Una función polinomial tiene la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) son números reales.

El dominio de f es todo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

- Una función racional se define mediante el cociente de dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

El dominio de f es $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$, todos los números reales salvo las raíces del polinomio denominador.

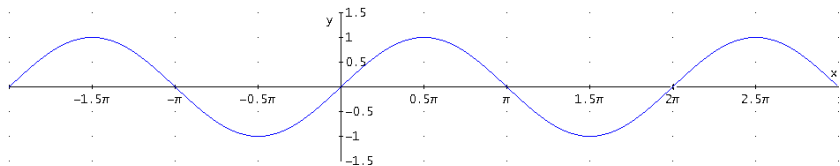
Índice

- 1 TEMA 1: Conjuntos de números: operaciones y representación.
- 2 TEMA 2: Funciones: operaciones y representación. Funciones elementales.
 - Definiciones y gráficas.
 - Operaciones: suma, producto y cociente. Funciones racionales.
 - Funciones trascendentes: trigonométricas y exponenciales.
 - Composición de funciones: función inversa, logaritmos y trigonométricas inversas.
- 3 TEMA 3: Límites de funciones. Funciones continuas

Funciones trigonométricas

Función seno: $f(x) = \sin x$

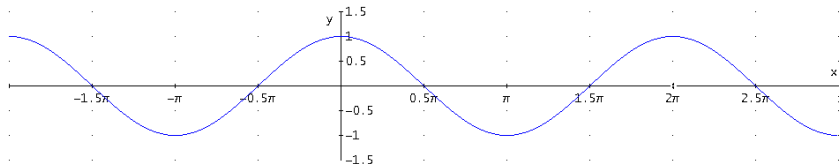
- $\text{dom} f = \mathbb{R}$ y $\text{rango} f = [-1, 1]$.
- $f(x)$ se define como el seno de un ángulo de x **radianes**.
- f es una **función impar**, $f(-x) = -f(x)$. La gráfica es simétrica respecto del origen.
- f es una **función periódica** de periodo 2π , $f(x + 2\pi) = f(x)$.



Funciones trigonométricas

Función coseno: $f(x) = \cos x$

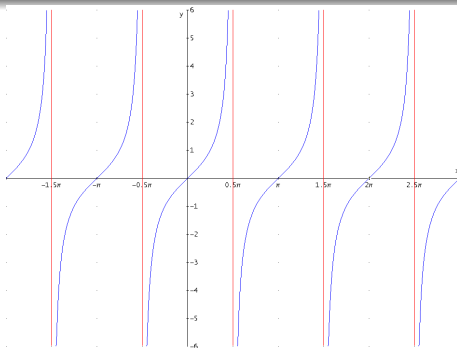
- $\text{dom} f = \mathbb{R}$ y $\text{rango} f = [-1, 1]$.
- $f(x)$ se define como el coseno de un ángulo de x **radianes**.
- f es una **función par**, $f(-x) = f(x)$. La gráfica es simétrica respecto del eje y .
- f es una **función periódica** de periodo 2π , $f(x + 2\pi) = f(x)$.



Funciones trigonométricas

Función tangente: $f(x) = \tan x$

- $\text{dom } f = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ y $\text{rango } f = \mathbb{R}$.
- $f(x)$ se define como la tangente de un ángulo de x **radianes**.
- f es una **función impar**, $f(-x) = -f(x)$. La gráfica es simétrica respecto del origen.
- f es una **función periódica** de periodo π , $f(x + \pi) = f(x)$.



Funciones trigonométricas

Tabla de valores conocidos del seno, coseno y tangente

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\text{sen } x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\text{cos } x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\text{tan } x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No existe	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Funciones exponenciales

Sea $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ y $b \neq 1$ entonces una función exponencial tiene la forma

$$f(x) = b^x$$

Al número b se le denomina **base** y x es el **exponente**.

Propiedades de las potencias

Suponemos $a > 0$, $b > 0$ y $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

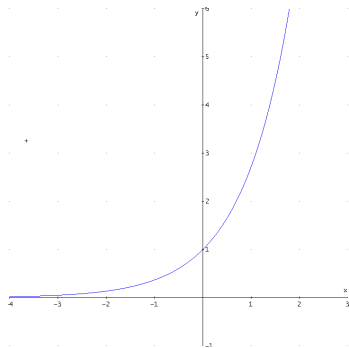
$$\begin{array}{lll} i) & b^{x_1} \cdot b^{x_2} = b^{x_1+x_2} & ii) \quad \frac{b^{x_1}}{b^{x_2}} = b^{x_1-x_2} & iii) \quad (b^{x_1})^{x_2} = b^{x_1 \cdot x_2} \\ iv) & \frac{1}{b^x} = b^{-x} & v) \quad (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x & vi) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \end{array}$$

Funciones exponenciales

Propiedades de la función exponencial $f(x) = b^x$ con $b > 1$

- $\text{dom } f = \mathbb{R}$ y $\text{rang}o f = (0, \infty)$ ($b^x > 0$).
- $b^0 = 1$.
- f es una **función creciente** y convexa.

Gráfica de $f(x) = e^x$

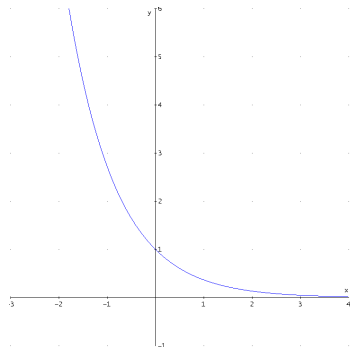


Funciones exponenciales

Propiedades de la función exponencial $f(x) = b^x$ con $0 < b < 1$

- $\text{dom } f = \mathbb{R}$ y $\text{rango } f = (0, \infty)$ ($b^x > 0$).
- $b^0 = 1$.
- f es una **función decreciente** y convexa.

Gráfica de $f(x) = e^{-x}$



La función exponencial

El número e

e es un número irracional que se puede definir como

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

$$e = 2,718281828459045235360287471352662497757...$$

Definición

La función exponencial natural o simplemente la función exponencial es la que tiene por base el número e :

$$f(x) = e^x = \exp(x)$$

Índice

- 1 TEMA 1: Conjuntos de números: operaciones y representación.
- 2 TEMA 2: Funciones: operaciones y representación. Funciones elementales.
 - Definiciones y gráficas.
 - Operaciones: suma, producto y cociente. Funciones racionales.
 - Funciones trascendentes: trigonométricas y exponenciales.
 - Composición de funciones: función inversa, logaritmos y trigonométricas inversas.
- 3 TEMA 3: Límites de funciones. Funciones continuas

Composición de Funciones

Definición (Composición de funciones)

Dadas dos funciones f y g , la composición de f y g , denotada $g \circ f$, es la función definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

y su dominio es $\text{dom}(g \circ f) = \{x \in \text{dom } f : f(x) \in \text{dom } g\}$.

Propiedades de la composición

- 1 La composición de funciones es **asociativa**:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- 2 La composición de funciones en general **no es conmutativa**:

$$g \circ f \neq f \circ g$$

- 3 La composición de funciones tiene un elemento neutro, la **función identidad** $e(x) = x$:

$$e \circ f = f \circ e = f$$

- 4 Dada una función f a veces existe su elemento inverso respecto de la composición que se denota f^{-1} :

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = e(x) = x$$

y se denomina **función inversa**.

Función Inversa

Definición (Función uno a uno)

Se dice que una función f es **uno a uno** si cada elemento en el rango de f se asocia con exactamente un elemento de su dominio.

Esto es equivalente a cualquiera de las siguientes afirmaciones:

- Si $x_1, x_2 \in \text{dom } f$ y $x_1 \neq x_2$ entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Si $x_1, x_2 \in \text{dom } f$ y $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.
- Toda recta horizontal, $y = c$, que corta a la gráfica de f lo hace en un único punto.

Definición (Función inversa)

Dada una función f uno a uno con dominio A y rango B . La **inversa** de f es la función denotada f^{-1} que tiene dominio B y rango A para la cual

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para todo } x \in B$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \in A$$

Cálculo de la inversa

- 1 Comprobar que f es uno a uno en su dominio. Si f no es uno a uno se puede elegir una parte del dominio de manera que la nueva función si lo sea y mantenga el rango de f .
- 2 El dominio y el rango de la función inversa f^{-1} son respectivamente el rango y el dominio de f .
- 3 Obtener $f^{-1}(x)$ equivale a despejar x en la ecuación $y = f(x)$ obteniéndose $x = f^{-1}(y)$ y a continuación cambiar el nombre a la variable, cambiar y por x .

Funciones logarítmicas

Inversas de las funciones exponenciales

Para $b > 0$ y $b \neq 1$ tenemos una función exponencial de la forma $y = b^x$, que sabemos que es uno a uno de manera que tiene inversa, $f(y)$, que debe cumplir $y = b^{f(y)}$ y también $f(b^x) = x$.

Definición (Función logarítmica)

La función logarítmica de base $b > 0$ y $b \neq 1$ se define:

$$\begin{aligned} f : (0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \log_b x \end{aligned}$$

donde $y = \log_b x$ es el exponente al que hay que elevar la base b para obtener x ($b^y = x$).

Propiedades de los logaritmos

Suponemos $b > 0$ y $b \neq 1$, $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$, $c \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$:

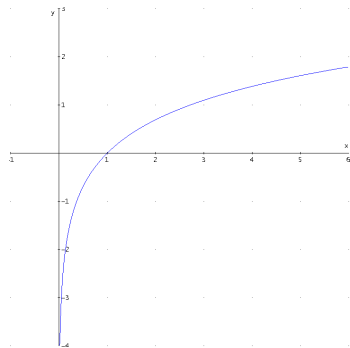
i) $\log_b(x_1 \cdot x_2) = \log_b x_1 + \log_b x_2$	ii) $\log_b \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_b x_1 - \log_b x_2$
iii) $\log_b x^c = c \log_b x$	iv) $\log_b \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_b x$

Funciones logarítmicas

Propiedades de la función logaritmo $f(x) = \log_b x$ con $b > 1$

- $\text{dom} f = (0, \infty)$ y $\text{rango} f = \mathbb{R}$.
- $\log_b 1 = 0$.
- f es una **función creciente** y cóncava.

Gráfica de $f(x) = \ln x$

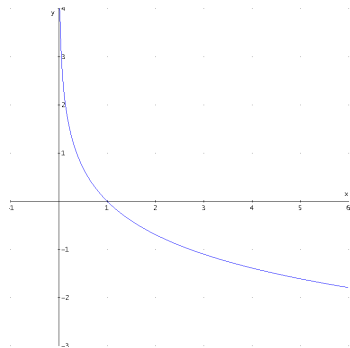


Funciones logarítmicas

Propiedades de la función logaritmo $f(x) = \log_b x$ con $0 < b < 1$

- $\text{dom} f = (0, \infty)$ y $\text{rango} f = \mathbb{R}$.
- $\log_b 1 = 0$.
- f es una **función decreciente** y convexa.

Gráfica de $f(x) = \log_{1/e} x = -\ln x$



Logaritmos naturales

Definición

El **logaritmo natural o neperiano** es el que tiene por base el número e y que denotaremos por $\ln x$.

Propiedades del logaritmo natural

- ❶ La función $f(x) = \ln x$ es la inversa de la función exponencial:

$$\ln(e^x) = x \text{ y } e^{\ln x} = x$$

- ❷ $\ln 1 = 0$, $\ln x < 0$ si $x \in (0, 1)$ y $\ln x > 0$ si $x \in (1, \infty)$.

- ❸ Cualquier logaritmo se puede calcular a partir del logaritmo neperiano:

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

- ❹ Cualquier exponencial se puede escribir a partir del número e y el logaritmo neperiano:

$$b^x = e^{(\ln b)x}$$

- ❺ Cualquier función potencial $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se puede definir a partir de la exponencial y el logaritmo neperiano:

$$x^\alpha = e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \ln x}$$

Funciones trigonométricas inversas

Ninguna de las funciones trigonométricas tiene inversa en todo su dominio, pero restringiéndolo adecuadamente sí.

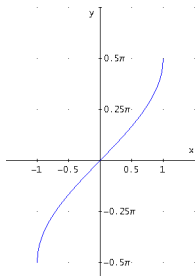
Función arcoseno: $f(x) = \arcsen x = \sen^{-1} x$

Es la inversa de $y = \sen x$ con dominio $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{array}{ccc} f : & [-1, 1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \longrightarrow & \arcsen x \end{array}$$

donde $\arcsen x$ es el único ángulo en radianes del intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ cuyo seno es x .

- $\sen(\arcsen x) = x$ para todo $x \in [-1, 1]$.
- $\arcsen(\sen x) = x$ para todo $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.



Funciones trigonométricas inversas

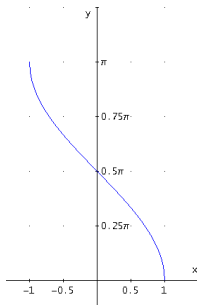
Función arcocoseno: $f(x) = \arccos x = \cos^{-1} x$

Es la inversa de $y = \cos x$ con dominio $[0, \pi]$:

$$\begin{array}{ccc} f : & [-1, 1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ & x & \longrightarrow & \arccos x \end{array}$$

donde $\arccos x$ es el único ángulo en radianes del intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es x .

- $\cos(\arccos x) = x$ para todo $x \in [-1, 1]$.
- $\arccos(\cos x) = x$ para todo $x \in [0, \pi]$.



Funciones trigonométricas inversas

Función arcotangente: $f(x) = \operatorname{atan} x = \tan^{-1} x$

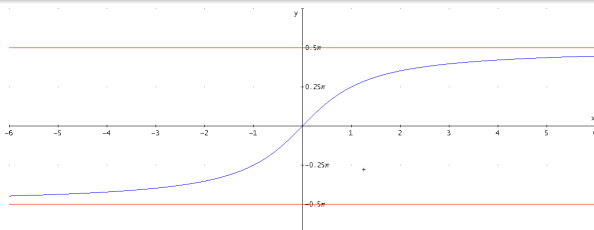
Es la inversa de $y = \tan x$ con dominio $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ x &\longrightarrow \operatorname{atan} x \end{aligned}$$

donde $\operatorname{atan} x$ es el único ángulo en radianes del intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ cuya tangente es x .

- $\tan(\operatorname{atan} x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $\operatorname{atan}(\tan x) = x$ para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

La gráfica $y = \operatorname{atan} x$ de la función arcotangente tiene una asíntota horizontal $y = \frac{\pi}{2}$ cuando $x \rightarrow +\infty$ y otra distinta $y = -\frac{\pi}{2}$ cuando $x \rightarrow -\infty$.



Índice

- 1 TEMA 1: Conjuntos de números: operaciones y representación.
- 2 TEMA 2: Funciones: operaciones y representación. Funciones elementales.
- 3 TEMA 3: Límites de funciones. Funciones continuas

Índice

- 1 TEMA 1: Conjuntos de números: operaciones y representación.
- 2 TEMA 2: Funciones: operaciones y representación. Funciones elementales.
- 3 TEMA 3: Límites de funciones. Funciones continuas
 - Límites de una función en un punto
 - Límites e infinito.
 - Definiciones rigurosas de límite
 - Funciones continuas.
 - Teorema del valor intermedio
 - Teorema de los valores extremos

Límite de una función en un punto

Definición

Sea f una función definida en un entorno de $a \in \mathbb{R}$ aunque no necesariamente en a y $L \in \mathbb{R}$. El **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L** si podemos acercar tanto como queramos los valores de $f(x)$ a L sin más que coger x suficientemente cerca de a pero distinto de a . Se denota:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Definición (Límites laterales)

El **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda (**derecha**) es L** si podemos acercar tanto como queramos los valores de $f(x)$ a L sin más que coger $x < a$ ($x > a$) suficientemente cerca de a pero distinto de a . Se denota:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \left(\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \right)$$

Teorema

Sea f una función definida en un entorno de $a \in \mathbb{R}$ aunque no necesariamente en a y $L \in \mathbb{R}$. Se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ si y solo si } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Límites y operaciones

Teorema (Límites y suma y producto)

Si existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ entonces

- $\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$

Teorema (Límites y cociente)

Si existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ y éste último es distinto de 0 entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Teorema (Límites y composición)

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ y $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = L.$$

Se puede sustituir a en todos los enunciados por a^- o a^+ .

Límites y operaciones

Límites y cociente: denominador con límite 0

- ❶ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ no existe.}$$

- ❷ Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ entonces no sabemos que ocurre con

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Esta situación se denomina **INDETERMINACIÓN** y significa que saber que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ no es suficiente para calcular $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$.

Se puede sustituir a por a^- o a^+ .

Más teoremas sobre límites

Teorema

Sean $a, c \in \mathbb{R}$. Entonces:

- $\lim_{x \rightarrow a} c = c.$
- $\lim_{x \rightarrow a} x = a.$

Corolario

Si $f(x)$ es un polinomio o una función racional y $a \in \text{dom} f$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Teorema

Si $f(x)$ es una función potencial (x^α), trigonométrica ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x, \dots$), exponencial (b^x), logarítmica ($\log_b x$) o trigonométrica inversa ($\arcsen x$, $\arccos x$, $\text{atan} x, \dots$) y $a \in \text{dom} f$ entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Límites y orden

Teorema

Sean f y g dos funciones definidas y que verifican $\mathbf{f(x)} \leq \mathbf{g(x)}$ en un entorno de a . Si existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

Corolario (teorema de compresión o del sandwich)

Sean f , g y h tres funciones definidas y que verifican en un entorno de a

$$\mathbf{f(x)} \leq \mathbf{h(x)} \leq \mathbf{g(x)}.$$

Si existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ y son iguales entonces existe $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ y se verifica

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Se puede sustituir a en los dos enunciados por a^- (o a^+) y en ese caso la desigualdad basta que se cumpla en un entorno a la izquierda (o a la derecha).

Índice

- 1 TEMA 1: Conjuntos de números: operaciones y representación.
- 2 TEMA 2: Funciones: operaciones y representación. Funciones elementales.
- 3 TEMA 3: Límites de funciones. Funciones continuas
 - Límites de una función en un punto
 - Límites e infinito.
 - Definiciones rigurosas de límite
 - Funciones continuas.
 - Teorema del valor intermedio
 - Teorema de los valores extremos

Límites infinitos

Definición

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es $+\infty$ si podemos hacer tan grandes como queramos los valores de $f(x)$ sin más que coger x suficientemente cerca de a pero distinto de a . Se denota:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

Definición

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es $-\infty$ si podemos hacer negativos y tan grandes en valor absoluto como queramos los valores de $f(x)$ sin más que coger x suficientemente cerca de a pero distinto de a . Se denota:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

Análogamente se definirían los límites infinitos laterales.

Definición (Asíntota vertical)

*Si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a (o a^+ o a^-) es $+\infty$ (o $-\infty$) se dice que la recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$.*

Límites infinitos y operaciones

Suma y límites infinitos

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \mathbf{A}$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \mathbf{B}$ son L , $+\infty$ o $-\infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \mathbf{C}$.

$\mathbf{B} \backslash \mathbf{A}$	$\mathbf{L}$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND.
$-\infty$	$-\infty$	IND.	$-\infty$

Producto y límites infinitos

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \mathbf{A}$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \mathbf{B}$ son L , $+\infty$ o $-\infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \mathbf{C}$.

$\mathbf{B} \backslash \mathbf{A}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{L} \neq \mathbf{0}$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	IND.	$\text{signo}(\mathbf{L}) \infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	IND.	$-\text{signo}(\mathbf{L}) \infty$	$-\infty$	$+\infty$

Cociente y límites infinitos

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \mathbf{A}$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \mathbf{B}$ son L , $+\infty$ o $-\infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \mathbf{C}$.

$\mathbf{B} \backslash \mathbf{A}$	$\mathbf{L}$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$\mathbf{0}$	IND.	IND.
$-\infty$	$\mathbf{0}$	IND.	IND.

Límites infinitos y operaciones

Límites y cociente: denominador con límite 0

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ entonces

1

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ no existe.}$$

2

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x)$ puede ser $+\infty$, $-\infty$ o tomar cada vez valores más grandes sin un signo determinado.

Se puede sustituir a por a^- o a^+ .

Límites en el infinito

Definición

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ es L si podemos acercar tanto como queramos los valores de $f(x)$ a L sin más que coger x suficientemente grande. Se denota

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Definición

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a $-\infty$ es L si podemos acercar tanto como queramos los valores de $f(x)$ a L sin más que coger x negativo suficientemente grande en valor absoluto. Se denota

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Definición (Asíntota horizontal)

*Si el límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$, o a $-\infty$, es L se dice que la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$.*

Análogamente se definirían los límites infinitos en $+\infty$ y $-\infty$.

Límites en el infinito y operaciones

Teorema (Límites y suma y producto)

Si existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ entonces

- $\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x).$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x).$

a puede sustituirse por $+\infty$ o $-\infty$.

Teorema (Límites y cociente)

Si existen los límites $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ y éste último es distinto de 0 entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

a puede sustituirse por $+\infty$ o $-\infty$.

Teorema (Límites y composición)

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ y $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = L.$$

a, b y L pueden sustituirse cada una por $+\infty$ o $-\infty$.

Límites infinitos en el infinito y operaciones

En los resultados siguientes a puede sustituirse por $+\infty$ o $-\infty$.

Suma y límites infinitos

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ son $L, +\infty$ o $-\infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = C$.

$B \backslash A$	L	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND.
$-\infty$	$-\infty$	IND.	$-\infty$

Producto y límites infinitos

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ son $L, +\infty$ o $-\infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} (f \cdot g)(x) = C$.

$B \backslash A$	0	$L \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	IND.	$\text{signo}(L) \infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	IND.	$-\text{signo}(L) \infty$	$-\infty$	$+\infty$

Cociente y límites infinitos

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ son $L, +\infty$ o $-\infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = C$.

$B \backslash A$	L	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	0	IND.	IND.
$-\infty$	0	IND.	IND.

Límites y cociente: denominador con límite 0

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \neq 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe y $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$.

Índice

- 1 TEMA 1: Conjuntos de números: operaciones y representación.
- 2 TEMA 2: Funciones: operaciones y representación. Funciones elementales.
- 3 TEMA 3: Límites de funciones. Funciones continuas
 - Límites de una función en un punto
 - Límites e infinito.
 - Definiciones rigurosas de límite
 - Funciones continuas.
 - Teorema del valor intermedio
 - Teorema de los valores extremos

Límites en un punto

Definición (Límite de una función en un punto)

Sea f una función definida para todo x tal que $0 < |x - a| < \eta$, siendo η un número positivo.

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L si
para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que
si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definición (Límite por la izquierda de una función en un punto)

Sea f una función definida para todo x tal que $0 < a - x < \eta$, siendo η un número positivo.

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la izquierda es L si
para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que
si $0 < a - x < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definición (Límite por la derecha de una función en un punto)

Sea f una función definida para todo x tal que $0 < x - a < \eta$, siendo η un número positivo.

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por la derecha es L si
para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que
si $0 < x - a < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Límites infinitos y en el infinito.

Definición (Límites infinitos)

Sea f una función definida para todo x tal que $0 < |x - a| < \eta$, siendo η un número positivo.

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es $+\infty$ ($-\infty$) si
para cada $M > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que
si $0 < |x - a| < \delta$ entonces $f(x) > M$ ($f(x) < -M$).

Análogamente se definirían los límites infinitos laterales.

Definición (Límites en el infinito)

Sea f una función definida para todo $x > K$ ($x < -K$), siendo K un número positivo.

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ ($-\infty$) es L si
para cada $\varepsilon > 0$ existe un $M > 0$ tal que
si $x > M$ ($x < -M$) entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definición (Límites infinitos en el infinito)

Sea f una función definida para todo $x > K$ ($x < -K$), siendo K un número positivo.

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a $+\infty$ ($-\infty$) es $+\infty$ ($-\infty$) si
para cada $N > 0$ existe un $M > 0$ tal que
si $x > M$ ($x < -M$) entonces $f(x) > N$ ($f(x) < -N$).

Índice

- 1 TEMA 1: Conjuntos de números: operaciones y representación.
- 2 TEMA 2: Funciones: operaciones y representación. Funciones elementales.
- 3 TEMA 3: Límites de funciones. Funciones continuas
 - Límites de una función en un punto
 - Límites e infinito.
 - Definiciones rigurosas de límite
 - Funciones continuas.
 - Teorema del valor intermedio
 - Teorema de los valores extremos

Funciones continuas

Definición

Una función $f(x)$ es **continua en un punto** a si

- ❶ $a \in \text{dom } f$
- ❷ Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- ❸ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Si alguna de estas condiciones no se cumple se dice que $f(x)$ es **discontinua en el punto** a .

Una función $f(x)$ es continua en un punto a por la derecha (**izquierda**) si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ($\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$).

Una función $f(x)$ es continua en el intervalo abierto (a, b) si es continua en todo punto $x \in (a, b)$.

Una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ si es continua en todo punto $x \in (a, b)$, continua por la derecha en a y por la izquierda en b .

Operaciones con funciones continuas

Teorema

Las funciones polinómicas, racionales, raíces ($\sqrt[n]{x}$), potenciales (x^α), trigonométricas ($\sin x$, $\cos x$, $\tan x, \dots$), exponenciales (b^x), logarítmicas ($\log_b x$) y trigonométricas inversas ($\arcsen x$, $\arccos x$, $\operatorname{atan} x, \dots$) son continuas en todo su dominio.

Teorema

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en el punto a . Entonces también son continuas en a las funciones $(f + g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ y, si $g(a) \neq 0$, $(f/g)(x)$.

Teorema

Si la función $f(x)$ es continua en el punto a y la función $g(x)$ es continua en el punto $f(a)$ entonces la función $(g \circ f)(x)$ es continua en el punto a , es decir, la composición de funciones continuas es una función continua.

Teorema

Si $f(x)$ es continua y uno a uno su función inversa $f^{-1}(x)$ también es continua.

Índice

- 1 TEMA 1: Conjuntos de números: operaciones y representación.
- 2 TEMA 2: Funciones: operaciones y representación. Funciones elementales.
- 3 TEMA 3: Límites de funciones. Funciones continuas
 - Límites de una función en un punto
 - Límites e infinito.
 - Definiciones rigurosas de límite
 - Funciones continuas.
 - Teorema del valor intermedio
 - Teorema de los valores extremos

Teorema del valor intermedio o de Bolzano

Teorema

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea γ cualquier número estrictamente entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = \gamma$.

Corolario

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$ ($f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo). Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Corolario

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo abierto (a, b) tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces $f(x)$ conserva el signo en (a, b) (o $f(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ o $f(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$).

Método de bisección.

Ecuación $f(x) = 0$ con f función continua.

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ sabemos que existe $c \in (a, b)$ que es raíz de la ecuación.

Para aproximarse a ella se puede utilizar el método iterativo denominado **Método de Bisección**:

Paso 1 Hacemos $u_1 = a$ y $v_1 = b$ y procedemos a la bisección de $[u_1, v_1]$: $m_1 = (u_1 + v_1)/2$ es el punto medio.

Si $f(m_1) = 0$ hemos encontrado la raíz, si no o en $[u_1, m_1]$ o en $[m_1, v_1]$ habrá cambio de signo de f y denominamos $[u_2, v_2]$ a éste intervalo.

Paso n Procedemos a la bisección de $[u_n, v_n]$: $m_n = (u_n + v_n)/2$ es el punto medio.

Si $f(m_n) = 0$ hemos encontrado la raíz, si no o en $[u_n, m_n]$ o en $[m_n, v_n]$ habrá cambio de signo de f y denominamos $[u_{n+1}, v_{n+1}]$ a éste intervalo.

Al cabo de n iteraciones sabemos que:

$$|m_n - c| \leq \frac{b - a}{2^n}$$

Método de bisección.

Ecuación $e^{-x} = \ln x$, en $[1, 2]$.

$$f(x) = e^{-x} - \ln x.$$

$$\alpha = 1,3097995858041504776...$$

i	u_i	v_i	m_i	$f(u_i)$	$f(m_i)$	$f(v_i)$
1	1	2	1,5	0,367879441	-0,182334948	-0,557811897
2	1	1,5	1,25	0,367879441	0,063361246	-0,182334948
3	1,25	1,5	1,375	0,063361246	-0,065614135	-0,182334948
4	1,25	1,375	1,3125	0,063361246	-0,002787367	-0,065614135
5	1,25	1,3125	1,28125	0,063361246	0,029853807	-0,002787367
6	1,28125	1,3125	1,296875	0,029853807	0,013427263	-0,002787367
7	1,3046875	1,3125	1,30859375	0,005293741	0,00124667	-0,002787367
8	1,30859375	1,3125	1,310546875	0,00124667	-0,000771973	-0,002787367
9	1,30859375	1,310546875	1,309570313	0,00124667	0,000236942	-0,000771973
10	1,309570313	1,310546875	1,310058594	0,000236942	-0,000267617	-0,000771973
11	1,309570313	1,310058594	1,309814453	0,000236942	-1,5363E-05	-0,000267617
12	1,309570313	1,309814453	1,309692383	0,000236942	0,000110783	-1,5363E-05
13	1,309692383	1,309814453	1,309753418	0,000110783	4,77084E-05	-1,5363E-05

Índice

- 1 TEMA 1: Conjuntos de números: operaciones y representación.
- 2 TEMA 2: Funciones: operaciones y representación. Funciones elementales.
- 3 TEMA 3: Límites de funciones. Funciones continuas
 - Límites de una función en un punto
 - Límites e infinito.
 - Definiciones rigurosas de límite
 - Funciones continuas.
 - Teorema del valor intermedio
 - Teorema de los valores extremos

Acotación y extremos de un conjunto y de una función.

Definición (Cota superior e inferior. Conjunto acotado)

Sea S un subconjunto no vacío de los números reales, $S \subset \mathbb{R}$ y $S \neq \emptyset$.

- Se dice que $M \in \mathbb{R}$ es una **cota superior** de S si para todo $s \in S$ se verifica que $s \leq M$.
Si existe la cota superior se dice que S está **acotado superiormente**.
- Se dice que $m \in \mathbb{R}$ es una **cota inferior** de S si para todo $s \in S$ se verifica que $s \geq m$.
Si existe la cota inferior se dice que S está **acotado inferiormente**.
- Se dice que S está **acotado** si está acotado superior e inferiormente.

Definición (Máximo y mínimo.)

Sea $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$.

- Se dice que $s_0 \in S$ es el **máximo** de S , y se denota $s_0 = \max S$, si para todo $s \in S$ se verifica que $s \leq s_0$.
- Se dice que $s_0 \in S$ es el **mínimo** de S , y se denota $s_0 = \min S$, si para todo $s \in S$ se verifica que $s \geq s_0$.

Teorema de los valores extremos

Definición (Función acotada y extremos absolutos de una función.)

- Se dice que una función f está **acotada** (superior o inferiormente) si su rango es un conjunto acotado (superior o inferiormente).

Existen $M, m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in \text{dom } f$.

- Se denominan **máximo y mínimo absolutos** (extremos absolutos) de una función al máximo y el mínimo de su rango.

Se dice que función f alcanza su **máximo absoluto** (**mínimo absoluto**) en $c \in \text{dom } f$ si $f(x) \leq f(c)$ ($f(c) \leq f(x)$) para todo $x \in \text{dom } f$.

Teorema (de los valores extremos (o de Weierstrass))

Si la función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ entonces alcanza sus extremos absolutos, es decir, existen $c, d \in [a, b]$ tales que

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \text{ para todo } x \in [a, b].$$

Corolario

Si la función $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ existen $c, d \in [a, b]$ tales que $f([a, b]) = [f(c), f(d)]$.