,

Apuntes de Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial

Tema 4. Curvas regulares en el espacio. Estudio local y resultados globales.

Ejercicios

26 de julio de 2020

Departamento de Matemática Aplicada I. UNED

1. Determine la curva de Bézier cuyo polígono de control es

$$S = \{(-1,1,0),(0,1,0),(1,-1,-1),(0,1,-1),(0,-1,1)\}.$$

Represéntese gráficamente con `Maxima`.

Solución: El polígono de control es

$$\mathbf{b}_0 = (-1,1,0),\ \mathbf{b}_1 = (0,1,0),\ \mathbf{b}_2 = (1,-1,-1),\ \mathbf{b}_3 = (0,1,-1),\ \mathbf{b}_4 = (0,-1,1).$$

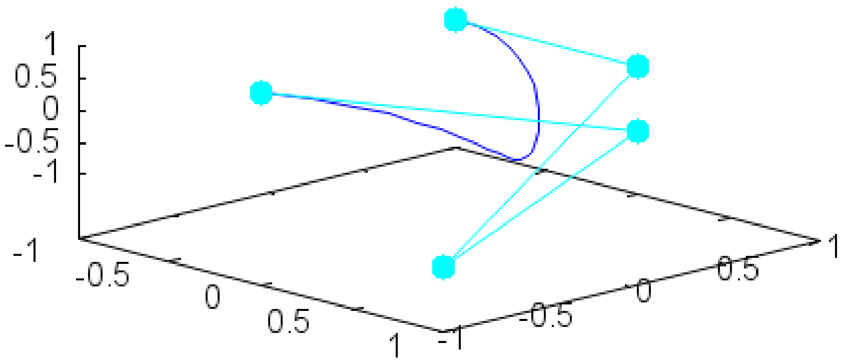
La curva de Bézier está dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^{4} \mathbf{b}_i B_i^4(t) = \sum_{i=0}^{4} \mathbf{b}_i \begin{pmatrix} 4 \\ i \end{pmatrix} t^i (1-t)^{4-i} \\
&= (-1,1,0)\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} t^0 (1-t)^{4-0} + (0,1,0)\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} t^1 (1-t)^{4-1} + \\
&+ (1,-1,-1)\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} t^2 (1-t)^{4-2} + (0,1,-1)\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} t^3 (1-t)^{4-3} \\
&+ (0,-1,1)\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} t^4 (1-t)^{4-4} \\
&= (-1,1,0)(1-t)^4 + 4(0,1,0)\,t(1-t)^3 + 6(1,-1,-1)t^2(1-t)^2 \\
&+ 4(0,1,-1)\,t^3(1-t) + (0,-1,1)\,t^4 \\
&= \begin{pmatrix} -(-t+1)^4 + 6t^2(-t+1)^2 \\ -t^4 + (-t+1)^4 + 4t(-t+1)^3 + 4t^3(-t+1) - 6t^2(-t+1)^2 \\ t^4 - 4t^3(-t+1) - 6t^2(-t+1)^2 \end{pmatrix}^t \\
&= \left(5t^4 - 8t^3 + 4t - 1, -14t^4 + 24t^3 - 12t^2 + 1, -t^4 + 8t^3 - 6t^2\right)
\end{aligned}$$

Para representar esta curva, se ha escrito en `Maxima` (está hecho en el documento CM-Maxima-Tema4.wxm)

```
 -->  load(draw)$
      control:[[-1,1,0],[0,1,0],[1,-1,-1],[0,1,-1],[0,-1,1]];
      longi:5
      B(t,n,i):=binomial(n,i)*(t^i)*(1-t)^(n-i);
      curvabezier(t):=ratsimp
      (sum(B(t,longi-1,i)*control[i+1],i,0,longi-1));
      wxdraw3d
      ( parametric(curvabezier(t)[1],curvabezier(t)[2],curvabezier(t)[3],t,0,1),
      point_type=filled_circle, point_size=2, color=cyan,points_joined=true,
      points(control),view=[56,46]);
```

La representación gráfica resultante es



2. Escriba la curva $\mathbf{x}(t) = (t^3 - 2t + 1, 4t - 1, t^2)$ con $t \in [0,1]$ como una curva de Bézier a partir de un polígono de control con 6 puntos. Apóyese en `Maxima` para resolver el sistema que resulta.

   Solución. Si el polígono de control está formado por $\{\mathbf{b}_i\}_{i=0,\ldots,5} = \{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=0,\ldots,5}$, entonces se puede escribir como una curva de Bézier a partir de los polinomios de Bernstein de grado 5:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^{5} \mathbf{b}_i B_i^5(t) \\
&= \mathbf{b}_0 B_0^5(t) + \mathbf{b}_1 B_1^5(t) + \mathbf{b}_2 B_2^5(t) + \mathbf{b}_3 B_3^5(t) + \mathbf{b}_5 B_4^5(t) + \mathbf{b}_5 B_5^5(t) \\
&= \mathbf{b}_0 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} t^0 (1-t)^5 + \mathbf{b}_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} t^1 (1-t)^4 + \mathbf{b}_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} t^2 (1-t)^3 \\
&+ \mathbf{b}_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} t^3 (1-t)^2 + \mathbf{b}_4 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} t^4 (1-t)^1 + \mathbf{b}_5 \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} t^5 (1-t)^0 \\
&= \mathbf{b}_0 (1-t)^5 + 5\mathbf{b}_1 t (1-t)^4 + 10\mathbf{b}_2 t^2 (1-t)^3 \\
&+ 10\mathbf{b}_3 t^3 (1-t)^2 + 5\mathbf{b}_4 t^4 (1-t)^1 + \mathbf{b}_5 t^5.
\end{aligned}
$$

Si llamamos $\mathbf{b}_i = (x_i, y_i, z_i)$, y desarrollamos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (x_0, y_0, z_0)(1-t)^5 \\
&\quad + 5(x_1, y_1, z_1)\, t(1-t)^4 + 10(x_2, y_2, z_2)\, t^2(1-t)^3 \\
&\quad + 10(x_3, y_3, z_3)\, t^3(1-t)^2 + 5(x_4, y_4, z_4)\, t^4(1-t)^1 + (x_5, y_5, z_5)\, t^5 \\
&= \begin{pmatrix} x_0(1-t)^5 + 5tx_1(1-t)^4 + 10t^2x_2(1-t)^3 + 10t^3x_3(1-t)^2 + 5t^4x_4(1-t) + t^5x_5 \\ y_0(1-t)^5 + 5ty_1(1-t)^4 + 10t^2y_2(1-t)^3 + 10t^3y_3(1-t)^2 + 5t^4y_4(1-t) + t^5y_5 \\ z_0(1-t)^5 + 5tz_1(1-t)^4 + 10t^2z_2(1-t)^3 + 10t^3z_3(1-t)^2 + 5t^4z_4(1-t1) + t^5z_5 \end{pmatrix} \\
&= (t^3 - 2t + 1, 4t - 1, t^2).
\end{aligned}$$

Con ayuda de Maxima, resolvemos los sistemas que resultan. Cada uno de estos sistemas consiste en 6 ecuaciones y 6 incógnitas. Por ejemplo, para determinar x_i tenemos que desarrollar primero:

$$\begin{aligned}
&x_0(-t+1)^5 + 5tx_1(-t+1)^4 + 10t^2x_2(-t+1)^3 \\
&\qquad + 10t^3x_3(-t+1)^2 + 5t^4x_4(-t+1) + t^5x_5
\end{aligned}$$

y luego igualar coeficientes con $t^3 - 2t + 1$ y resolver. Sin embargo, con Maxima basta hacer (véase el documento CM-Maxima-Tema4.wxm):

```
--> curva(t):=x0*(-t+1)^5+5*x1*t*(-t+1)^4+10*(t^2)*x2*(-t+1)^3
    +10*(t^3)*x3*(-t+1)^2+5*(t^4)*x4*(1-t)+(t^5)*x5;
    componente(t):=t^3-2*t+1;
    aa:expand(curva(t)-componente(t));
    ec0:coeff(aa,t,0); ec1:coeff(aa,t,1);
    ec2:coeff(aa,t,2);
    ec3:coeff(aa,t,3);
    ec4:coeff(aa,t,4);
    ec5:coeff(aa,t,5);
    linsolve([ec0,ec1,ec2,ec3,ec4,ec5],[x0,x1,x2,x3,x4,x5]);
```

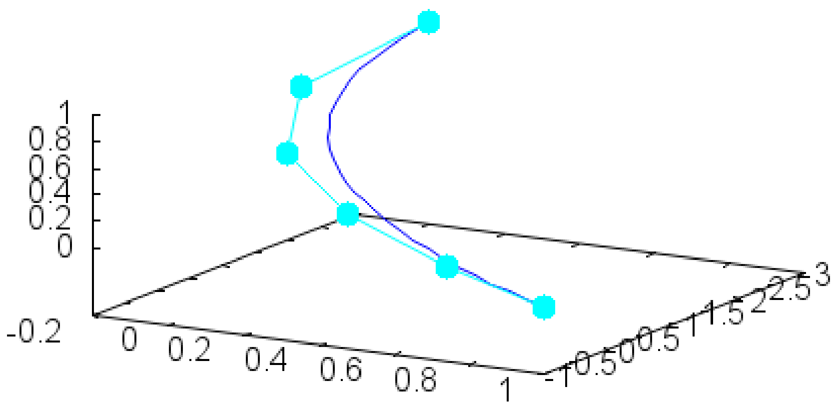
De forma similar se procede con las otras componetnes e los vértices del polígono de control y se obtiene el siguiente polígono de control:

$$(1, -1, 0), \left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, 0\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}\right), \left(-\frac{1}{10}, \frac{7}{5}, \frac{3}{10}\right), \left(-\frac{1}{5}, \frac{11}{5}, \frac{3}{5}\right), (0, 3, 1).$$

La representación gráfica de la curva y del polígono de control se ha hecho con

```
->   kill(all)$
     load(draw)$
     curvabezier(t):=[t^3-2*t+1,4*t-1,t^2];
     control:[[1,-1,0],[3/5,-1/5,0],[1/5,3/5,1/10],[-1/10,7/5,3/10],
     [-1/5,11/5,3/5],[0,3,1]];
     wxdraw3d
     (parametric(curvabezier(t)[1],curvabezier(t)[2],curvabezier(t)[3],t,0,1),
     point_type=filled_circle, point_size=2,
     color=cyan,points_joined=true,points(control));
```

Resulta:



3. Determínese el polígono de control de la curva de Bézier de la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (t^3 - 2t + 1, 4t - 1, t^2)$$

con $t \in [0, 1]$, pero cuando este polígono tiene 5 puntos. Este ejemplo se hizo para un polígono de control de 4 puntos en los apuntes.

Solución: Si el polígono de control tiene 5 puntos, tenemos polinomios de Bernstein de grado 4:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \sum_{i=0}^{4} \mathbf{b}_i B_i^4(t) \\
&= \mathbf{b}_0 B_0^4(t) + \mathbf{b}_1 B_1^4(t) + \mathbf{b}_2 B_2^4(t) + \mathbf{b}_3 B_3^4(t) + \mathbf{b}_4 B_4^4(t) \\
&= \mathbf{b}_0 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} t^0 (1-t)^4 + \mathbf{b}_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} t^1 (1-t)^3 + \mathbf{b}_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} t^2 (1-t)^2 \\
&+ \mathbf{b}_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} t^3 (1-t)^1 + \mathbf{b}_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} t^4 (1-t)^0 \\
&= \mathbf{b}_0 (1-t)^4 + \mathbf{b}_1 4t^1 (1-t)^3 + \mathbf{b}_2 6t^2 (1-t)^2 + \mathbf{b}_3 4t^3 (1-t)^1 + \mathbf{b}_4 t^4.
\end{aligned}
$$

Si llamamos $\mathbf{b}_i = (x_i, y_i, z_i)$, entonces

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (x_0, y_0, z_0)(1-t)^4 + 4(x_1, y_1, z_1) t^1 (1-t)^3 + 6(x_2, y_2, z_2) t^2 (1-t)^2 \\
&+ 4(x_3, y_3, z_3) t^3 (1-t)^1 + (x_4, y_4, z_4) t^4 \\
&= \begin{pmatrix} (1-t)^4 x_0 + 4(1-t)^3 t x_1 + 6(1-t)^2 t^2 x_2 + 4(1-t) t^3 x_3 + t^4 x_4 \\ (1-t)^4 y_0 + 4(1-t)^3 t y_1 + 6(1-t)^2 t^2 y_2 + 4(1-t) t^3 y_3 + t^4 y_4 \\ (1-t)^4 z_0 + 4(1-t)^3 t z_1 + 6(1-t)^2 t^2 z_2 + 4(1-t) t^3 z_3 + t^4 z_4 \end{pmatrix}^t
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{pmatrix} x_0 + (-4x_0 + 4x_1) t + (6x_0 - 12x_1 + 6x_2) t^2 + (-4x_0 + 12x_1 - 12x_2 + 4x_3) t^3 + (x_0 - 4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4) t^4 \\ y_0 + (-4y_0 + 4y_1) t + (6y_0 - 12y_1 + 6y_2) t^2 + (-4y_0 + 12y_1 - 12y_2 + 4y_3) t^3 + (y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y) t^4 \\ z_0 + (-4z_0 + 4z_1) t + (6zx_0 - 12z_1 + 6zx_2) t^2 + (-4z_0 + 12z_1 - 12z_2 + 4z_3) t^3 + (z_0 - 4z_1 + 6z_2 - 4z_3 + z_4) t^4 \end{pmatrix}^t
$$

$$
= (t^3 - 2t + 1, 4t - 1, t^2).
$$

Resolvemos con ayuda de `Maxima` el sistema y tenemos:

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 0, x_3 = -\frac{1}{4}, x_4 = 0, \\
y_0 &= -1, y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 2, y_4 = 3, \\
z_0 &= 0, z_1 = 0, z_2 = \frac{1}{6}, z_3 = \frac{1}{2}, z_4 = 1.
\end{aligned}
$$

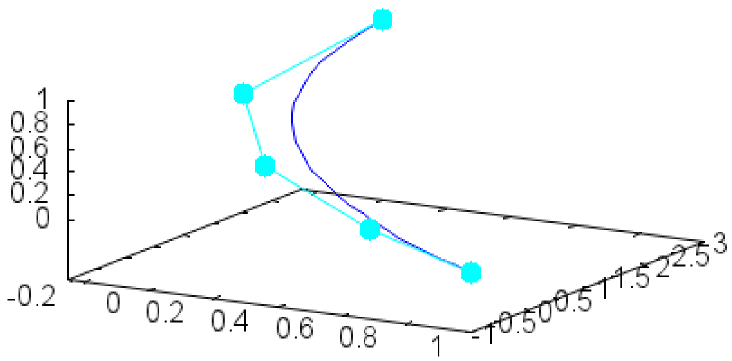
Los puntos son:

$$
(1, -1, 0), \ \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \ \left(0, 1, \frac{1}{6}\right), \ \left(-\frac{1}{4}, 2, \frac{1}{2}\right), \ (0, 3, 1).
$$

Entonces, la curva se puede escribir como:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= (t^3 - 2t + 1, 4t - 1, t^2) = \mathbf{b}_0 B_0^4(t) + \mathbf{b}_1 B_1^4(t) + \mathbf{b}_2 B_2^4(t) + \mathbf{b}_3 B_3^4(t) + \mathbf{b}_4 B_4^4(t) \\
&= (1, -1, 0) B_0^4(t) + \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) B_1^4(t) + \left(0, 1, \frac{1}{6}\right) B_2^4(t) \\
&+ \left(-\frac{1}{4}, 2, \frac{1}{2}\right) B_3^4(t) + (0, 3, 1) B_4^4(t).
\end{aligned}
$$

La gráfica es:



4. Sea C la la curva dada por

$$x = t^3 - t, y = t^5 - t, z = \operatorname{sen}^2 \pi t.$$

para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Estudiar si es una curva regular y si $(0,0,0)$ es un punto múltiple.

Solución: La curva es regular si no tiene puntos singulares, es decir, puntos donde el vector derivada sea $(0,0,0)$. Como el vector derivada es

$$\mathbf{x}'(t) = \left(3t^2 - 1, 5t^4 - 1, 2 \operatorname{sen} \pi t \cos \pi t\right),$$

este vector se anula y y sólo si

$$\begin{aligned} 3t^2 - 1 &= 0, \\ 5t^4 - 1 &= 0, \\ 2 \operatorname{sen} \pi t \cos \pi t &= 0. \end{aligned}$$

Esto no ocurre simultáneamente para ningún valor de t, por tanto, es una curva regular.

Para que sea $(0,0,0)$ sea punto múltiple debe ser

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

para dos valores distintos de λ. Buscamos si existen estos valores:

$$\begin{aligned} x &= \lambda^3 - \lambda = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda\left(\lambda^2 - 1\right) = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \pm 1, \lambda = 0, \\ y &= \lambda^5 - \lambda = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda\left(\lambda^5 - 1\right) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \pm 1, \lambda = 0, \\ z &= \operatorname{sen}^2 \pi \lambda = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = \pm 1, \lambda = 0 \end{aligned}$$

en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Por eso, es un punto múltiple de multiplicidad 3.

5. Hallar la recta tangente a la hélice circular $x = \cos \pi t, y = \operatorname{sen} \pi t, z = t$ en el punto correspondiente a $z = 1$.

   Solución: El punto $z = 1$ corresponde a $t = 1$ y a $x = \cos \pi = -1, y = \operatorname{sen} \pi = 0$. El punto será $(-1, 0, 1)$. Un vector director de la recta tangente es el vector derivada en ese punto. Como

   $$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t, t), \\ \mathbf{x}'(t) &= (-\pi \operatorname{sen} \pi t, \pi \cos \pi t, t), \end{aligned}$$

   en $t = 1$ este vector es

   $$(0, -\pi, 1).$$

   Por eso, la recta tangente tiene por ecuaciones

   $$x = -1 + 0\lambda, \; y = 0 - \pi\lambda, \; z = 1 + \lambda,$$

   o

   $$x = -1, z = 1 - \frac{y}{\pi}.$$

6. Sea C la curva definida por las ecuaciones

   $$\mathbf{x}(t) = (t^2, 4t, t^3)$$

   Determine la función curvatura y el radio de curvatura en $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 0)$.

   Solución: Sabemos que

   $$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

   Para esta curva, tenemos:

   $$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \left(2t, 4, 3t^2\right), \quad \mathbf{x}''(t) = (2, 0, 6t), \\ \mathbf{x}'(0) &= (0, 4, 0), \quad \mathbf{x}''(0) = (2, 0, 0), \quad \|\mathbf{x}'(0)\| = 4, \\ \mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8k, \quad \|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\| = 8. \end{aligned}$$

   Entonces la curvatura en $(0, 0, 0)$ es

   $$k(0) = \frac{8}{4^3} = \frac{1}{8}.$$

   El radio de curvatura R es el inverso de la curvatura k.y es:

   $$R(0) = \frac{1}{1/8} = 8.$$

7. Encontrar la curvatura y el vector normal de la parametrización $\mathbf{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}(t) = (t, 2t^2, t^2)$.

   Solución: Comenzamos con la curvatura k,

   Sabemos que
$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

   Para esta curva, tenemos:
$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= (1, 4t, 2t), \quad \mathbf{x}''(t) = (0, 4, 2), \\
\|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{1 + (4t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{1 + 20t^2} \\
\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 4t & 2t \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2j + 4k, \\
\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\| &= \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

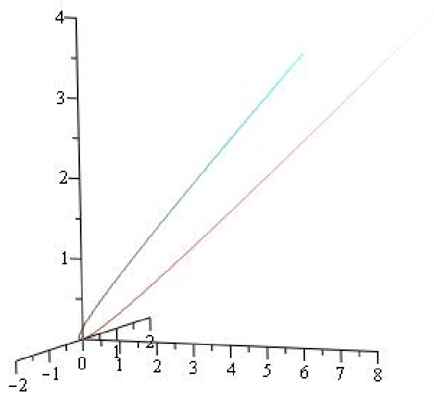
   Entonces
$$k(t) = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{1 + 20t^2}^3}.$$

   El vector normal tiene la misma dirección y sentido que el vector
$$(\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t).$$

   En este caso, es
$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t) &= ((1, 4t, 2t) \times (0, 4, 2)) \times (1, 4t, 2t) \\
&= (0, -2, 4) \times (1, 4t, 2t) \\
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 4t & 2t \end{vmatrix} = (-20t, 4, 2).
\end{aligned}$$

   Como debe ser unitario, el vector normal es
$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(t) &= \frac{(-20t, 4, 2)}{\|(-20t, 4, 2)\|} \\
&= \left(-20\frac{t}{\sqrt{400t^2 + 20}}, \frac{4}{\sqrt{400t^2 + 20}}, \frac{2}{\sqrt{400t^2 + 20}}\right) \\
&= \left(-\frac{2\sqrt{5}t}{\sqrt{20t^2 + 1}}, \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{20t^2 + 1}}, \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{20t^2 + 1}}\right)
\end{aligned}$$

   La representación gráfica de la curva es



8. Sea C la hélice dada por la ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt).$$

Vamos a determinar su plano osculador en el punto $\mathbf{x}(0) = (a, 0, 0)$.

Solución. Tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= (-a \operatorname{sen} t, a\cos t, b), \\ \mathbf{x}''(t) &= (-a\cos t, -a \operatorname{sen} t, 0). \end{aligned}$$

Entonces, para $t = 0$, se cumple

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= (a, 0, 0), \\ \mathbf{x}'(0) &= (0, a, b), \\ \mathbf{x}''(0) &= (-a, 0, 0). \end{aligned}$$

Un punto (x, y, z) del plano osculador va a verificar:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\mathbf{x}'(0), \mathbf{x}''(0), (x, y, z) - (a, 0, 0)) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & 0 \\ x - a & y & z \end{vmatrix} = a(az - by). \end{aligned}$$

Por eso, la ecuación del plano osculador en $(a, 0, 0)$ es:

$$by = az.$$

9. Determínese el centro de curvatura de la curva dada por las ecuaciones $x = \cos\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta$, $z = \theta$ en $z = \pi$.

   Solución. Es el punto $(-1, 0, \pi)$.

   Hay que determinar el vector normal y el radio de curvatura. Sabemos que el vector
$$(\mathbf{x}'(\theta) \times \mathbf{x}''(\theta)) \times \mathbf{x}'(\theta)$$
   tiene la misma dirección y sentido que el vector normal principal. Por eso, hacemos:
$$\mathbf{x}'(\theta) = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 1),\ \mathbf{x}''(\theta) = (-\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta, 0),$$
$$\mathbf{x}'(\pi) \times \mathbf{x}''(\pi) = (0, -1, 1) \times (1, 0, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, 1),$$
$$(\mathbf{x}'(\pi) \times \mathbf{x}''(\pi)) \times \mathbf{x}'(\pi) = (0, 1, 1) \times (0, -1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, 0, 0).$$
   Por eso, el vector normal en el punto correspondiente a $\theta = \pi$ es
$$\mathbf{n}(\pi) = (1, 0, 0).$$
   Como la curvatura en un punto genérico está dada por
$$k(t_0) = \frac{\|\mathbf{x}'(t_0) \times \mathbf{x}''(t_0)\|}{\|\mathbf{x}'(t_0)\|^3},$$
   en este caso tenemos:
$$k(\pi) = \frac{\|\mathbf{x}'(\pi) \times \mathbf{x}''(\pi)\|}{\|\mathbf{x}'(\pi)\|^3} = \frac{\|(0, -1, 1)\|}{\|(0, 1, 1)\|^3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^3} = \frac{1}{2}.$$
   el radio de curvatura en el punto $\mathbf{x}(\pi) = (-1, 0, \pi)$ es $R(\pi) = 2$. El centro de curvatura es, por tanto:
$$\mathbf{c} = \mathbf{x}(\pi) + R(\pi)\mathbf{n}(\pi) = (-1, 0, \pi) + 2(1, 0, 0) = (1, 0, \pi).$$

10. Sea $\mathbf{x} : (-2, 2) \to \mathbb{R}^3$ la curva dada por la ecuación
$$\mathbf{x}(t) = (\operatorname{sen}\pi t, \cos\pi t, t)$$
   Señálense los vectores que tienen la misma dirección que el vector binormal en el punto $(0, -1, 1)$.

a) $(-1, 0, \pi/2)$.

b) $(-\pi, 0, \pi)$.

c) $(1, 0, \pi)$.

d) $(1, 1, 1)$.

e) $(0, -1, 1)$.

f) $(-1, \pi, \pi)$.

g) $(\pi, 1, \pi)$.

h) $(1, 0, 1)$.

i) $(1, -1, 1)$.

j) Ninguno de ellos.

Solución. Es correcta la opción c). Lo comprobamos, haciendo

$$\mathbf{x}'(t) = (\pi \cos \pi t, -\pi \operatorname{sen} \pi t, 1),$$
$$\mathbf{x}''(t) = (-\pi^2 \operatorname{sen} \pi t, -\pi^2 \cos \pi t, 0).$$

Como

$$(0, -1, 1) = \mathbf{x}(1),$$

en este punto se tiene

$$\mathbf{x}'(1) = (-\pi, 0, 1), \;\; \mathbf{x}''(1) = (0, \pi^2 0).$$

Por tanto, la dirección del vector binormal es la del vector

$$\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\pi & 0 & 1 \\ 0 & \pi^2 & 0 \end{vmatrix} = -\pi^2\mathbf{i} - \pi^3\mathbf{k}$$

o lo que es equivalente la del vector $(-\pi^2, 0, -\pi^3)$, luego es la dirección de $(1, 0, \pi)$.

11. Sea la curva de ecuaciones

$$x = \cos t, y = t^2 - 2, z = t + 1, t \in \mathbb{R}.$$

Determínese el triedro de Frenet en el punto $(1, -2, 1)$.

Solución: Tenemos que

$$\mathbf{x}(t) = \left(\cos t, t^2 - 2, t + 1\right), \; \mathbf{x}(0) = (1, -2, 1).$$

Entonces determinamos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= (-\operatorname{sen} t, 2t, 1), & \mathbf{x}''(t) &= (-\cos t, 2, 0), \\
\mathbf{x}'(0) &= (0,0,1), & \mathbf{x}''(0) &= (-1,2,0).
\end{aligned}$$

La curva no está parametrizada por la longitud de arco, pero $\mathbf{x}'(0)$ es un vector unitario y, por eso: el vector tangente a la curva en $(1,-2,1)$ es:

$$\mathbf{t}(0) = (0,0,1).$$

Además, sabemos que

$$\mathbf{v} = (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) = ((0,0,1) \times (-1,2,0)) \times (0,0,1) = (-1,2,0)$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal principal $\mathbf{n}$ y que, por lo tanto,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(-1,2,0)}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2,0).$$

Por tanto, el vector binormal es

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} &= (0,0,1) \times \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2,0) = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,0,1) \times (-1,2,0) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1,0).
\end{aligned}$$

Entonces el triedro de Frenet es

$$\left\{(0,0,1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2,0), \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1,0)\right\}.$$

12. Sea C la hélice dada, para las constantes $a, b \in \mathbb{R}$, por la ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt).$$

a) ¿Cuál es el triedro de Frenet en un punto genérico $\mathbf{x}(t_0)$? ¿Cuál es el triedro de Frenet en $t = 0$?

b) ¿Cuál es la curvatura en en un punto genérico $\mathbf{x}(t_0)$?

c) ¿Cuál es la torsión en en un punto genérico $\mathbf{x}(t_0)$?

Solución:

a) Tenemos que calcular

$$\mathbf{x}'(t) = (-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b)\,, \quad \mathbf{x}''(t) = (-a\cos t, -a\,\mathrm{sen}\,t, 0)\,.$$

El vector $\mathbf{v}$ dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \times \mathbf{x}'(t) \\
&= ((-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b) \times (-a\cos t, -a\,\mathrm{sen}\,t, 0)) \times (-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b) \\
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\,\mathrm{sen}\,t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\,\mathrm{sen}\,t & 0 \end{vmatrix} \times (-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b) \\
&= \left(ab\,\mathrm{sen}\,t, -ab\cos t, a^2\right) \times (-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ ab\,\mathrm{sen}\,t & -ab\cos t & a^2 \\ -a\,\mathrm{sen}\,t & a\cos t & b \end{vmatrix} \\
&= \left(-\left(a^3 + ab^2\right)\cos t, -\left(a^3 + ab^2\right)\,\mathrm{sen}\,t, 0\right),
\end{aligned}$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal principal $\mathbf{n}$. Por eso:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} &= \frac{(-(a^3 + ab^2)\cos t, -(a^3 + ab^2)\,\mathrm{sen}\,t, 0)}{\sqrt{(-(a^3 + ab^2))^2\cos^2 t + (-(a^3 + ab^2))^2\,\mathrm{sen}^2 t}} \\
&= \frac{1}{(a^3 + ab^2)}\left(-\left(a^3 + ab^2\right)\cos t, -\left(a^3 + ab^2\right)\,\mathrm{sen}\,t, 0\right) \\
&= (-\cos t, -\,\mathrm{sen}\,t, 0)\,.
\end{aligned}$$

Por otro lado, el vector tangente unitario a la curva en $(a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, bt)$ es

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{(-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b)}{\sqrt{(-a\,\mathrm{sen}\,t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b)\,.$$

Por tanto, el vector binormal es

$$\begin{aligned}
\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a\,\mathrm{sen}\,t, a\cos t, b) \times (\cos t, \mathrm{sen}\,t, 0) \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\,\mathrm{sen}\,t & a\cos t & b \\ -\cos t & -\,\mathrm{sen}\,t & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b\,\mathrm{sen}\,t, -b\cos t, a)\,.
\end{aligned}$$

El triedro de Frenet está formado por los vectores:

$$\begin{aligned}
\mathbf{t} &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\operatorname{sen}t, a\cos t, b\right),\\
\mathbf{n} &= \left(-\cos t, -\operatorname{sen}t, 0\right),\\
\mathbf{b} &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\operatorname{sen}t, -b\cos t, a\right).
\end{aligned}$$

Para $t=0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}\left(0\right) &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\operatorname{sen}0, a\cos 0, b\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(0, a, b\right),\\
\mathbf{n}\left(0\right) &= \left(-\cos 0, -\operatorname{sen}0, 0\right) = \left(-1, 0, 0\right),\\
\mathbf{b}\left(0\right) &= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\operatorname{sen}0, -b\cos 0, a\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(0, -b, a\right).
\end{aligned}$$

Por eso, el triedro de Frenet es

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(0,a,b\right), \left(-1,0,0\right), \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(0,-b,a\right)\right\}.$$

b) Para calcular la curvatura, hacemos primero:

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\right\| &= \sqrt{\left(-a\operatorname{sen}t\right)^2+\left(a\cos t\right)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2},\\
\left\|\mathbf{x}''\left(t\right)\right\| &= \sqrt{\left(-a\operatorname{sen}t\right)^2+\left(-a\cos t\right)^2} = a.
\end{aligned}$$

Entonces, la curvatura es

$$\begin{aligned}
k\left(t\right) &= \frac{\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\times\mathbf{x}''\left(t\right)\right\|}{\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\right\|^3}\\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}^3}\left\|\left(ab\operatorname{sen}t, -ab\cos t, a^2\right)\right\| = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}^3}\\
&= \frac{a}{a^2+b^2},
\end{aligned}$$

porque

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'\left(t\right)\times\mathbf{x}''\left(t\right) &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ -a\operatorname{sen}t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\operatorname{sen}t & 0\end{vmatrix}\\
&= \left(ab\operatorname{sen}t, -ab\cos t, a^2\right),\\
\left\|\mathbf{x}'\left(t\right)\times\mathbf{x}''\left(t\right)\right\| &= \sqrt{a^2b^2\operatorname{sen}^2 t + a^2b^2\cos^2 t + a^4} = a\sqrt{a^2+b^2}.
\end{aligned}$$

Observamos que la curvatura es constante.

c) Sabemos que la torsión es, para una parametrización arbitaria:
$$\tau(t) = -\frac{\det\left(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t)\right)}{\left\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\right\|^2}.$$

Como
$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= (-a \operatorname{sen} t, a\cos t, b), \\
\mathbf{x}''(t) &= (-a\cos t, -a \operatorname{sen} t, 0), \\
\mathbf{x}'''(t) &= (a \operatorname{sen} t, -a\cos t, 0), \\
\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t) &= \left(ab \operatorname{sen} t, -ab\cos t, a^2\right), \\
\left\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\right\| &= a\sqrt{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

entonces:
$$\begin{aligned}
\det\left(\mathbf{x}'(t), \mathbf{x}''(t), \mathbf{x}'''(t)\right) &= \begin{vmatrix} -a \operatorname{sen} t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a \operatorname{sen} t & 0 \\ a \operatorname{sen} t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} \\
&= a^2 b \operatorname{sen}^2 t + a^2 b\cos^2 t \\
&= a^2 b.
\end{aligned}$$

Y:
$$\tau(t) = -\frac{a^2 b}{\left(a\sqrt{a^2+b^2}\right)^2} = -\frac{b}{a^2+b^2}.$$

13. Determine la ecuación de la recta normal y del plano normal y osculador a la hélice de ecuaciones $\alpha(t) = (2\cos t, 2 \operatorname{sen} t, t)$ en el punto $(2, 0, 0)$.

Solución: El plano normal es el plano perpendicular a la recta tangente y el plano osculador es el plano que pasa por el punto y cuyo vector característico es el binormal, es decir $\mathbf{t} \times \mathbf{n}$. Para esta representación, tenemos
$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= (-2 \operatorname{sen} t, 2\cos t, 1), \\
&\left\|\mathbf{x}'(t)\right\| = \sqrt{(-2 \operatorname{sen} t)^2 + (2\cos t)^2 + 1} = \sqrt{5}, \\
\mathbf{x}''(t) &= (-2\cos t, -2 \operatorname{sen} t, 0), \\
&\left\|\mathbf{x}''(t)\right\| = \sqrt{(-2\cos t)^2 + (-2 \operatorname{sen} t)^2} = 2.
\end{aligned}$$

Observamos que $(2, 0, 0) = \mathbf{x}(0)$, y en este valor de t, resulta
$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(0) &= (-2 \operatorname{sen} 0, 2\cos 0, 1) = (0, 2, 1), \\
\mathbf{x}''(0) &= (-2\cos 0, -2 \operatorname{sen} 0, 0) = (-2, 0, 0).
\end{aligned}$$

Por eso, el vector tangente es

$$\mathbf{t}(0) = \frac{\mathbf{x}'(0)}{\|\mathbf{x}'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1).$$

El plano normal tiene la ecuación

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}(0)) = 0 &\iff \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1)\cdot(x-2,y,z) = 0\\ &\iff \frac{2}{\sqrt{5}}y + \frac{1}{\sqrt{5}}z = 0 \iff 2y+z=0.\end{aligned}$$

Un vector en la misma dirección y sentido que el normal es

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(0) &= (\mathbf{x}'(0)\times\mathbf{x}''(0))\times\mathbf{x}'(0) = ((0,2,1)\times(-2,0,0))\times(0,2,1)\\ &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 0\end{vmatrix}\times(0,2,1) = (0,-2,4)\times(0,2,1)\\ &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & -2 & 4\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix} = -10i.\end{aligned}$$

El vector normal es $\mathbf{n} = (-1,0,0)$. La ecuación de la recta normal es

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = (x,y,z) &= \mathbf{x}(0) + t\mathbf{n}(0) = (2,0,0) + t(-1,0,0)\\ &= (2-\lambda,0,0).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{t}\times\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1)\times(-1,0,0) &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}}j + \frac{2}{\sqrt{5}}k = \left(0,-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\end{aligned}$$

y la ecuación del plano osculador es

$$\begin{aligned}(\mathbf{t}\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}(0)) = 0 &\iff \left(0,-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot(x-2,y,z) = 0\\ &\iff -\frac{1}{\sqrt{5}}y + \frac{2}{\sqrt{5}}z = 0 \iff y-2z=0.\end{aligned}$$

14. Sea la curva dada por la intersección de las superficies $z = x^2+y, x+z = 2$. Determínese b y c para que el vector $(3, b, c)$ pertenezca al plano normal a la curva en el punto $P = (1, 0, 1)$ y forme con el vector $(-1, 0, -1)$ y el vector tangente a la curva en P una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

    Solución: $b = 2, c = -3$.

    Unas ecuaciones paramétricas de la curva se obtienen haciendo $x = u$ y despejando y, z, con lo cual resulta

    $$x = u, y = 2 - u - u^2, z = 2 - u.$$

    El punto dado es la imagen de $u = 1$ por lo tanto $\mathbf{x}(u) = (u, 2 - u - u^2, 2 - u)$ y $\mathbf{x}'(u) = (1, -1 - 2u, -1)$ es el vector tangente y para $u = 1$, tenemos

    $$\mathbf{x}'(1) = (1, -3, -1).$$

    Nótese que $(1, -3, -1) \cdot (-1, 0, -1) = 0$.

    Se trata de encontrar un vector $(3, b, c)$ cuyo producto escalar con $(-1, 0, -1)$ y con $(1, -3, -1)$ sea cero. Entonces

    $$\begin{array}{l} (3, b, c) \cdot (-1, 0, -1) = 0, \\ (3, b, c) \cdot (1, -3, -1) = 0, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} -3 - c = 0, \\ 3 - 3b - c = 0, \end{array} \Rightarrow c = -3, b = 2.$$

15. Sea la curva de ecuaciones

    $$x = t^2, y = t^2 + 1, z = t - 1, t \in \mathbb{R}.$$

    Determínense las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante en el punto $(0, 1, -1)$.

    Solución: El punto $(0, 1, -1)$ es la imagen de $t = 0$. Para esta parametrización tenemos:

    $$\begin{array}{ll} \mathbf{x}'(t) = (2t, 2t, 1), & \mathbf{x}''(t) = (2, 2, 0), \\ \mathbf{x}'(0) = (0, 0, 1), & \mathbf{x}''(0) = (2, 2, 0). \end{array}$$

    Sabemos que el vector

    $$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) = ((0, 0, 1) \times (2, 2, 0)) \times (0, 0, 1) \\ &= (-2, 2, 0) \times (0, 0, 1) = (2, 2, 0) \end{aligned}$$

    tiene la misma dirección y sentido que el vector normal principal $\mathbf{n}$. Consecuentemente:

    $$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(2, 2, 0)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2, 2, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

El vector tangente unitario a la curva en $(0,1,-1)$ es

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}'(0)}{\|\mathbf{x}'(0)\|} = (0,0,1)\,.$$

Por tanto, el vector binormal es

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = (0,0,1) \times \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)\,.$$

El triedro de Frenet es

$$\left\{(0,0,1)\,, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\,, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)\right\}.$$

El plano osculador es

$$\begin{aligned} &((x,y,z)-(0,1,-1)) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) = 0 \\ \iff &(x,y-1,z+1) \cdot (-1,1,0) = 0 \\ \iff &x - y + 1 = 0. \end{aligned}$$

La ecuación del plano normal es:

$$\begin{aligned} &((x,y,z)-(0,1,-1)) \cdot (0,0,1) = 0 \\ \iff &(x,y-1,z+1) \cdot (0,0,1) = 0 \\ \iff &z + 1 = 0. \end{aligned}$$

La ecuación del plano rectificante es:

$$\begin{aligned} &((x,y,z)-(0,1,-1)) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = 0 \\ \iff &(x,y-1,z+1) \cdot (1,1,0) = 0 \\ \iff &x + y - 1 = 0. \end{aligned}$$