

Apuntes de Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial

Tema 5. Superficies. Parte I. Teoría y problemas

26 de julio de 2020



Este material ha sido elaborado por Esther Gil Cid y se difunde bajo la licencia Creative Commons Reconocimiento- CompartirIgual 3.0. Puede leer las condiciones de la licencia en <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/deed.es>

Departamento de Matemática Aplicada I. UNED

Índice general

5.	Superficies	4
5.1.	Ejemplos de superficies. Visualización en el ordenador	4
5.2.	Superficies de revolución y de traslación	12
5.3.	Superficies de Bézier. Visualización en el ordenador . .	17
5.4.	Superficies Parametrizadas regulares	19
5.5.	Plano tangente y recta normal	21
5.6.	Curvas sobre superficies	27
5.7.	Primera forma fundamental	34
5.8.	Segunda forma fundamental	42
5.9.	Teorema egregio de Gauss	78

5. Superficies

5.1. Ejemplos de superficies. Visualización en el ordenador

Intuitivamente, una superficie es el lugar geométrico por donde se mueve una partícula con dos grados de libertad, u y v . Esto quiere decir que (u, v) le corresponde una posición $\mathbf{x}(u, v)$ o

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)).$$

En general podemos considerar que $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ es una función continua de conjunto $U \subset \mathbb{R}^2$ en \mathbb{R}^3 . Pero en esta asignatura vamos a pedir esta función sea diferenciable, en ocasiones más de una vez.

Ejemplo 1. La superficie dada por

$$x^2 + y - e^z = 3$$

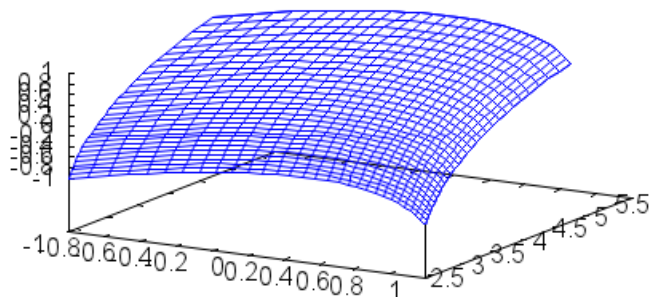
tiene una ecuación paramétrica

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, 3 + e^v - u^2, v)$$

porque la variable y cumple:

$$y = 3 + e^z - x^2.$$

Su gráfica es



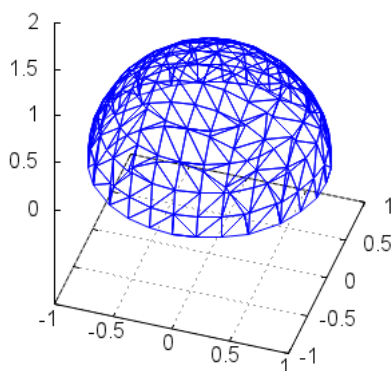
Ejemplo 2. Si llamamos $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$, entonces la superficie dada a partir de

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(u, v, \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}\right)$$

es una semiesfera de 1. Esta ecuación se llama paramétrica, porque depende de dos parámetros. La ecuación implícita sería de la forma

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

para $x^2 + y^2 < 1$. Se representa en la siguiente figura:



Señalamos que en general una esfera centrada en $(0, 0, 0)$ y radio r está dada por las ecuaciones implícitas

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

y por las ecuaciones paramétricas

$$x = r \cos \theta \operatorname{sen} \varphi,$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi,$$

$$z = r \cos \varphi,$$

para $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. ☹

Este ejemplo, justo con gran parte de los que aparecen en este documento, está representado en `CM-tema5-Maxima.wxm`.

Ejemplo 3. El cilindro circular de radio 1 está dado por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(u, v) &= (u, \sqrt{1-u^2}, v), \\ \mathbf{x}_2(u, v) &= (u, -\sqrt{1-u^2}, v).\end{aligned}$$

Es necesario utilizar dos ecuaciones, porque en caso contrario, sólo se cubrirían con una de las dos parametrizaciones, los puntos donde $u \geq 0$ o donde $y \leq 0$. Para representar esta superficie con *Maxima*, tenemos que escribir:

```
-> load(draw)$
    wxdraw3d(proportional_axes='xyz,color=blue,
             user_preamble="set size ratio 1",
             xtics='false,ytics='false,ztics='false,
             parametric_surface(u,(1-u^2)^0.5,v,u,-0.999,0.999,v,-0.999,0.999),
             parametric_surface(u,-(1-u^2)^0.5,v,u,-0.999,0.999,v,-0.999,0.999));
```

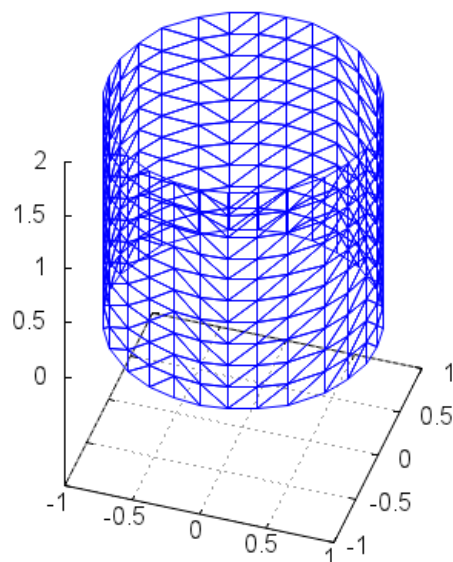
La ecuación implícita es

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Con *Maxima* se representa como

```
-> load(draw)$
    wxdraw3d(proportional_axes='xyz,color=blue,
             user_preamble="set size ratio 1",
             xtics='false,ytics='false,ztics='false,
             dimensions=[600,420],view=[50,18],
             implicit(x^2+y^2=1,x,-1,1,y,-1,1,z,0,2));
```

La gráfica del cilindro es:



Hemos visto superficies dadas por ecuaciones implícitas o paramétricas. En general, en esta asignatura vamos a trabajar con las ecuaciones paramétricas. Es interesante señalar que no siempre es sencillo pasar de un tipo de ecuación a otra, como vimos al estudiar las curvas. Si en las ecuaciones implícitas, se puede despejar una de las variables en función de las otras, tenemos las ecuaciones paramétricas.

Ejemplo 4. La superficie dada por

$$x^2 + y - e^z = 3$$

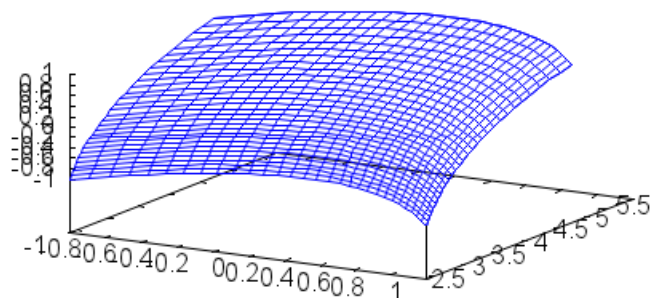
tiene una ecuación paramétrica

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, 3 + e^v - u^2, v)$$

porque la variable y cumple:

$$y = 3 + e^z - x^2.$$

Su gráfica es



Sin embargo, para pasar de la ecuación paramétrica a la implícita requiere pensar cómo encontrar una relación entre las variables que intervienen y puede ser más complicado.

Ejemplo 5. Un cono tiene por ecuación paramétrica

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u).$$

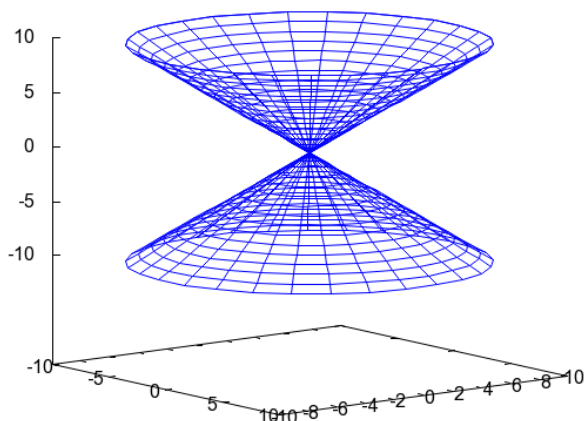
Para obtener las ecuaciones implícitas, debemos observar que en la primera coordenada aparece un parámetro multiplicado por un coseno y en la segunda está multiplicado por el seno, y este parámetro es justo la tercera coordenada. Por eso, podemos hacer

$$\begin{aligned} x &= u \cos v, & y &= u \sin v \\ x^2 + y^2 &= u^2 (\cos^2 v + \sin^2 v) = u^2. \end{aligned}$$

Pero justo tenemos que $u = z$, y así tenemos las ecuaciones implícitas:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Su gráfica es



Una forma de generar una superficie es a partir de una curva. Si tenemos una función \mathbf{x} cuya imagen nos da una curva, podemos suponer que uno de los dos parámetros, por ejemplo, u , está fijo, y entonces tenemos una curva $\mathbf{x}(u, v)$ al hacer que v sea una variable. Si a continuación pensamos en u como un parámetro que puede variar, la superficie es barrida por la curva moviéndose. Así, vemos una superficie como la posición del espacio que ocupa una curva móvil.

Ejemplo 6. Un toro T es la superficie generada por una circunferencia de radio a que gira alrededor de una recta fija de su plano. Está dado, por ejemplo, por las ecuaciones, para a, b constantes con $a < b$, para la circunferencia de radio a , situada en el plano yz , por ejemplo, y con centro a una distancia b del eje z , alrededor del cual gira. La ecuación paramétrica del toro, en este caso, es

$$\mathbf{x}(\varphi, \theta) = ((b + a \operatorname{sen} \varphi) \cos \theta, (b + a \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \theta, a \cos \varphi),$$

para $\varphi, \theta \in [0, 2\pi)$. A partir de esta ecuación, podemos obtener la ecuación implícita, observando que si llamamos

$$x = (b + a \operatorname{sen} \varphi) \cos \theta, \quad y = (b + a \operatorname{sen} \varphi) \operatorname{sen} \theta, \quad z = a \cos \varphi,$$

tenemos

$$x^2 + y^2 = (b + a \operatorname{sen} \varphi)^2.$$

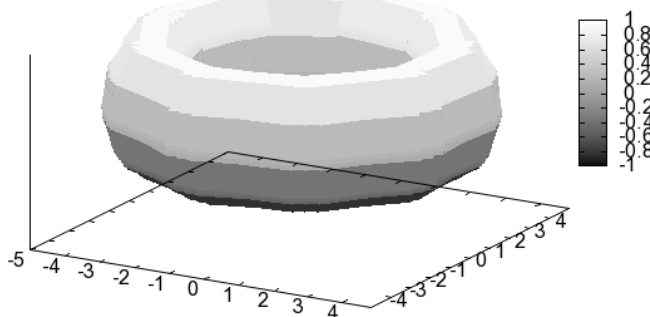
Como

$$\begin{aligned} a^2 &= z^2 + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - b\right)^2 \\ &= z^2 + \left(b - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Por eso, la ecuación implícita del toro es

$$\left(b - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = a^2.$$

La representación gráfica del toro se muestra a continuación.



una superficie (A. Valdés, 2014) es como una curva que se mueve a lo largo del tiempo. Supongamos que tenemos una aplicación diferenciable:

$$\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Si dejamos v fijo (lo llamaremos v_0 , entonces la aplicación:

$$\mathbf{x}_1 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

que a cada $u \in I$, tal que $(u, v_0) \in U$, le asigna

$$\mathbf{x}_1(u) = \mathbf{x}(u, v_0)$$

es una curva diferenciable, cuyo parámetro es u . Esto significa que la superficie está siendo recorrida por la curva dada por \mathbf{x}_1 .

Esta idea nos da formas de generar superficies.

Ejemplo 7. Consideramos dos curvas dadas por

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Podemos generar una superficie, dada por

$$\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

si hacemos:

$$\mathbf{x}(u, v) = f(v)\mathbf{x}_1 + g(v)\mathbf{x}_2,$$

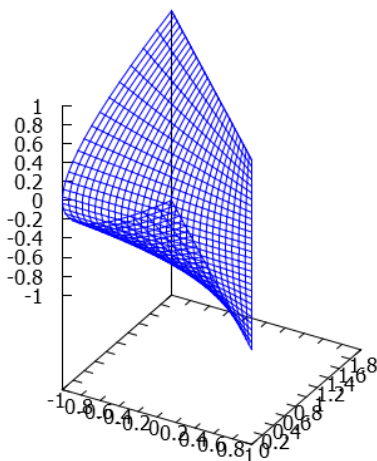
si f, g son funciones de una variable. Si elegimos, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(u) &= (1, 0, u) & \mathbf{x}_2(u) &= (0, u^2, u) \\ f(v) &= v & g(v) &= 1 - v \end{aligned}$$

tenemos la superficie:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= f(v)\mathbf{x}_1 + g(v)\mathbf{x}_2 = v(1, 0, u) + (1 - v)(0, u^2, u) = \\ &= (v, 0, uv) + (0, u^2(1 - v), u(1 - v)) = (v, u^2(1 - v), u). \end{aligned}$$

Se representa gráficamente en la siguiente figura:



Ejemplo 8. Un helicoides es la superficie formada las rectas que se apoyan en una hélice. Por ejemplo, tenemos una hélice de ecuación

$$\mathbf{x}_1(u) = (\cos u, \sin u, u)$$

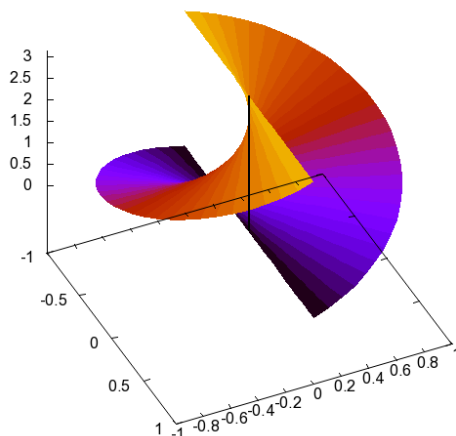
sobre la que se apoyan las rectas paralelas al plano xy (o $z = 0$) y cortan al eje z y a los puntos de la hélice. La ecuación de esta recta, para cada punto $\mathbf{x}_1(u)$ es

$$\mathbf{x}_2(v) = (0, 0, u) + v(\cos u, \sin u, 0).$$

Juntanto cambios en los dos parámetros, tenemos la ecuación del helicoido:

$$\mathbf{x}(u, v) = (0, 0, u) + v(\cos u, \sin u, 0).$$

La gráfica es la siguiente:



5.2. Superficies de revolución y de traslación

Hay más formas de generar superficies. Otra forma es partir de una curva (llamada generatriz) y hacer que gira alrededor de una recta fija (que se llama eje de rotación) que está en el mismo plano que la curva, de tal forma que la circunferencia que describe cada punto de la curva al girar está en un plano perpendicular al eje. Se llaman **superficies de revolución**.

Veamos cómo se determinan sus ecuaciones. Si la ecuación de la curva generatriz es $\mathbf{x}(u)$, al girar esta curva alrededor del eje de rotación, un punto cualquiera de la curva generatriz describe una circunferencia que está situada en un plano perpendicular al eje de rotación. Los puntos de estas circunferencias conforman la superficie de revolución. Vamos a escribir las ecuaciones que resultan al realizar esta operación.

Sean \mathbf{a} un punto del eje de rotación y \mathbf{v} un vector director de este eje. Entonces un punto cualquiera (x, y, z) de la superficie de revolución está en la misma circunferencia perpendicular al eje de rotación que un punto $\mathbf{x}(u)$ de curva generatriz y si un punto está en una circunferencia con estas características entonces está en la superficie de revolución. Que esto se cumpla es equivalente a que se tienen que cumplir las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \|(x, y, z) - \mathbf{a}\| &= \|\mathbf{x}(u) - \mathbf{a}\|, \\ ((x, y, z) - \mathbf{x}(u)) \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Si eliminamos el parámetro u con estas dos ecuaciones tenemos la ecuación de la superficie de revolución.

Ejemplos de superficies de revolución son el toro (una circunferencia girando alrededor de un eje que no la corta), una esfera (una circunferencia girando alrededor de un eje que contiene a un diámetro suyo)

Ejemplo 9. Vamos a determinar las ecuaciones de la superficie generada al girar la curva dada por $z = y^2, x = 0$ alrededor del eje z .

Una ecuación paramétrica de la curva es

$$\mathbf{x}_1(u) = (0, u, u^2).$$

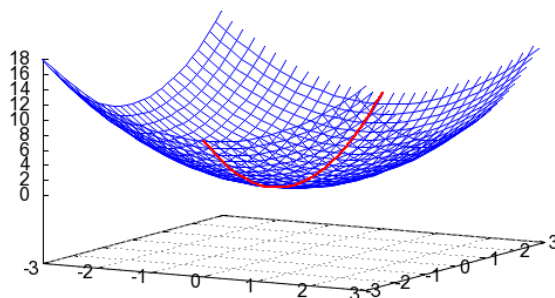
Si las coordenadas de un punto de la superficie son (x, y, z) , por un lado se cumple que existe u tal que $(0, u, u^2) = (x, y, z)$. Y por otro, se tiene que cumplir que los puntos que están en la superficie y que tienen la misma coordenada z deben estar a la misma distancia del eje z , lo que significa que debe ser

$$x^2 + y^2 = u^2.$$

Pero $u^2 = z$, por lo que la ecuación implícita de la superficie es

$$x^2 + y^2 = z.$$


Esta superficie es un paraboloides elíptico y su gráfica (en azul), junto con la curva que lo genera (en rojo) se representa a continuación:



Las **superficie de traslación** están generadas al trasladar una curva, llamada generatriz y de ecuación $\mathbf{x}_1(u)$, moviéndose paralelamente a sí misma, a lo largo de otra curva de ecuación $\mathbf{x}_2(v)$, que se llama directriz, con la que tiene un punto en común $\mathbf{a} = \mathbf{x}_1(u_0) = \mathbf{x}_2(v_0)$. La ecuación vectorial de esta superficie está dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}_2(v) + \mathbf{x}_1(u) - \mathbf{x}_1(u_0).$$

Observe que el papel de la directriz y la generatriz son intercambiables, lo que se aprecia muy bien en la ecuación.

Ejemplo 10. El cilindro es una superficie de traslación, si consideramos una recta que se traslada en una circunferencia (o una elipse) que está en su plano normal. Es además y a la vez, una superficie de revolución. 

Ejemplo 11. Vamos a determinar la ecuación de la superficie de traslación que se obtiene al trasladar la recta $x = 1, y = 0$ a lo largo de la elipse $z = 0, x^2 + 4y^2 = 1$.

La generatriz es la recta y la directriz es la elipse. Una parametrización de la elipse es

$$x = \cos \theta, y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta.$$

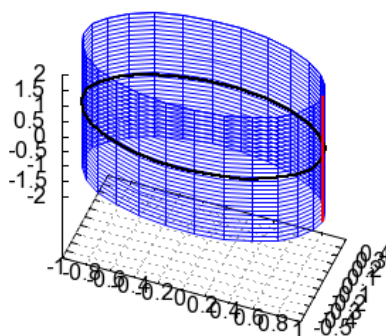
Una parametrización de la recta es

$$x = 1, y = 0, z = u.$$

Un punto en común es el punto $(1, 0, 0)$. Entonces, la ecuación de la superficie de traslación es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, \theta) &= \mathbf{x}_2(u) + \mathbf{x}_1(\theta) - \mathbf{x}_1(0) \\ &= (1, 0, u) + \left(\cos \theta, \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta, 0\right) - (1, 0, 0) \\ &= \left(\cos \theta, \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta, u\right). \end{aligned}$$

Es un



Ejemplo 12. Un paraboloido elíptico se obtiene trasladando una parábola a lo largo de otra que la corta perpendicularmente y donde el vector curvatura de ambas tiene la misma dirección y el mismo sentido. Sus secciones horizontales son elipses.

Vamos a encontrar la ecuación del paraboloido elíptico que se obtiene al trasladar la parábola $x = 0, z = y^2$ a lo largo de la parábola $y = 0, z = 2x^2$.

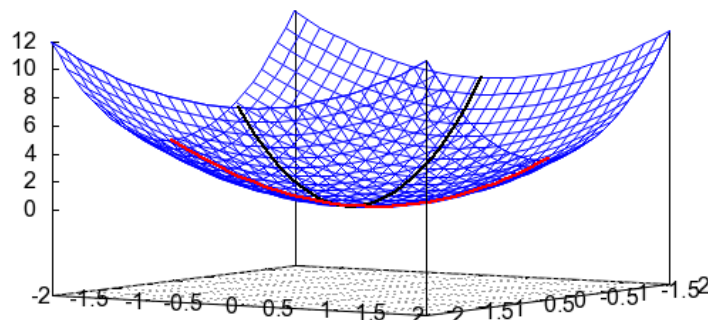
La generatriz es la primera parábola y la directriz es la segunda. Una parametrización de cada una de ellas es

$$\mathbf{x}_1(u) = (0, u, u^2), \mathbf{x}_2(t) = (t, 0, 2t^2).$$

Un punto común es $(0, 0, 0) = \mathbf{x}_1(0, 0, 0) = \mathbf{x}_2(0, 0, 0)$. La ecuación de la paraboloido elíptico es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, \theta) &= \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{x}_1(u) - \mathbf{x}_1(0) \\ &= (0, u, u^2) + (t, 0, 2t^2) - (0, 0, 0) \\ &= (t, u, u^2 + 2t^2). \end{aligned}$$

Su gráfica es



Ejemplo 13. Un hiperboloide parabólico es la traslación de una parábola a lo largo de otra que la corta perpendicularmente y donde el vector curvatura de ambas tiene la misma dirección, pero distinto sentido. Las secciones horizontales determinan hipérbolas, excepto la del plano que pasa por el vértice común de las parábolas, que son dos rectas que se cortan. Si las parábolas generatriz y la directriz son iguales, las rectas son perpendiculares entre sí y forman un ángulo de $\pi/4$ radianes con respecto a las generatrices (más adelante se verá qué significa esto).



Ejemplo 14. En un paraboloides parabólico una parábola (generatriz) se traslada sobre otra (directriz) y son tales que sus vectores curvatura son perpendiculares. Las secciones horizontales determinan parábolas. Vamos a encontrar la ecuación del paraboloides parabólico que se obtiene al trasladar la parábola $x = 0, z = y^2$ a lo largo de la parábola $y = x^2, z = 0$.

La generatriz es la primera parábola y la directriz es la segunda. Una parametrización de cada una de ellas es

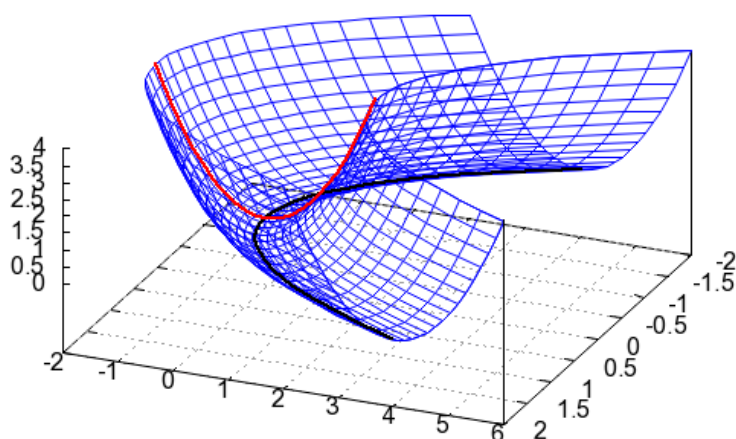
$$\mathbf{x}_1(u) = (0, u, u^2), \mathbf{x}_2(t) = (t, t^2, 0).$$

Un punto común es $(0, 0, 0) = \mathbf{x}_1(0, 0, 0) = \mathbf{x}_2(0, 0, 0)$. La ecuación del paraboloides parabólico es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, \theta) &= \mathbf{x}_2(t) + \mathbf{x}_1(u) - \mathbf{x}_1(0) \\ &= (0, u, u^2) + (t, t^2, 0) - (0, 0, 0) \\ &= (t, u + t^2, u^2). \end{aligned}$$

Su gráfica es





5.3. Superficies de Bézier. Visualización en el ordenador

Este apartado se debe completar con el apartado 5.1. del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.

Sabemos que hay superficies que se generan con una curva girando o con una curva trasladándose. Otra forma de generar superficies es teniendo en cuenta las curvas de Bézier. Supongamos que

$$\mathbf{b}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(u), \quad u \in [0, 1]$$

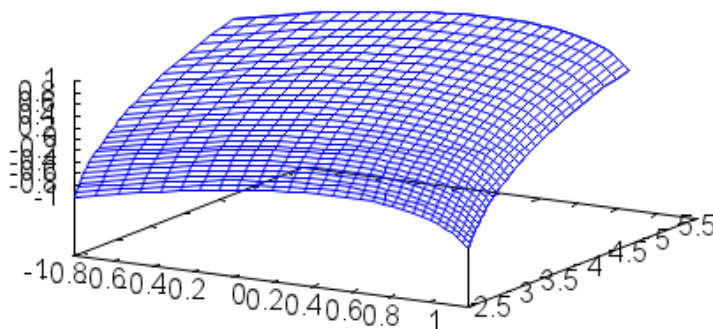
es una curva de Bézier, con polígono de control $\{\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$. Va a ser una curva polinómica de grado n . Podemos generar una superficie si cada punto del polígono de control \mathbf{b}_i describe una curva de Bézier, determinada a partir de un polígono de control de m puntos. El polígono de control es $\{\mathbf{b}_{i0}, \mathbf{b}_{i1}, \dots, \mathbf{b}_{im}\}$. Esto significa que cada punto $\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i(v)$, para $v \in [0, 1]$, va a describir una curva de Bézier dada por:

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i(v) = \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{ij} B_j^m(v), \quad v \in [0, 1].$$

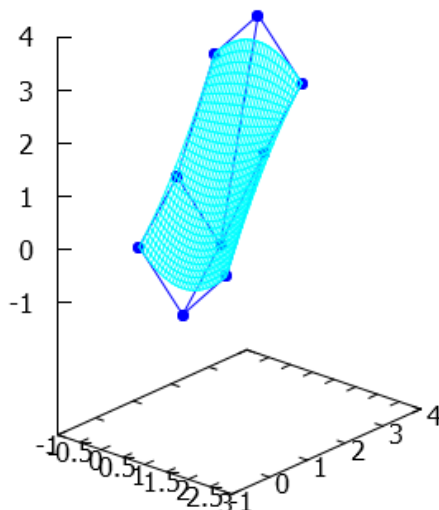
Entonces, la superficie que formen estas curvas va a ser:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u, v) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i(v) B_i^n(u) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{ij} B_j^m(v) \right) B_i^n(u) \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v).\end{aligned}$$

En la figura siguiente se representa esta situación:



Los puntos $\{\mathbf{b}_{ij}\}$ se llaman malla de control de la superficie de Bézier, y son $n \cdot m$ puntos, cada uno con 3 coordenadas. La superficie resultante es una superficie polinómica de bigrado (n, m) . Esto significa que es una expresión polinomial con grado n en u y grado m en v . Una superficie de Bézier es bicuadrática si $n = m = 2$, como la que se representa en la siguiente figura:



o es bicúbica si $n = m = 3$.

5.4. Superficies Parametrizadas regulares

Consideramos una aplicación diferenciable $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que determina una superficie, con

$$\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Los puntos de la superficie son $\mathbf{x}(u, v)$. Vamos a pedir que la aplicación sea diferenciable en los puntos de U tantas veces como necesitemos; va a ser al menos una vez, pero puede serlo más. Esto quiere decir que vamos a pedir que sus componentes tengan derivadas parciales continuas del orden que necesitemos.

Para cada punto $(u_0, v_0) \in U$ la diferencial de \mathbf{x} es una aplicación lineal:

$$d\mathbf{x}_{(u_0, v_0)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

y está dada por la matriz jacobiana en el punto. Las columnas de la matriz jacobiana son los vectores derivadas parciales. Por notación, y para simplificar,

vamos a denotar a estos vectores derivadas parciales de \mathbf{x} como:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u_0, v_0) &= \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{x}(u_0, v_0) = D_1 \mathbf{x}(u_0, v_0) \\ &= (D_1 x(u_0, v_0), D_1 y(u_0, v_0), D_1 z(u_0, v_0)), \\ \mathbf{x}_v(u_0, v_0) &= \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{x}(u_0, v_0) = D_2 \mathbf{x}(u_0, v_0) \\ &= (D_2 x(u_0, v_0), D_2 y(u_0, v_0), D_2 z(u_0, v_0)).\end{aligned}$$

Estas derivadas parciales son, para cada $(u, v) \in U$, aplicaciones lineales de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 y podemos verlos como vectores de \mathbb{R}^3 .

Estas ideas nos llevan a la definición de superficie regular, que son las superficies con las que vamos a trabajar en este tema.

Definición 1. Sea S una superficie dada por la parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que es diferenciable al menos una vez. Sea P un punto de S con $P = \mathbf{x}(u_0, v_0)$. Se dice que P es **regular** si la diferencial $d\mathbf{x}_{(u_0, v_0)}$ tiene rango 2 en (u_0, v_0) . Esto es equivalente a que

$$\text{rg} \begin{pmatrix} D_1 x(u, v) & D_1 y(u, v) & D_1 z(u, v) \\ D_2 x(u, v) & D_2 y(u, v) & D_2 z(u, v) \end{pmatrix} = 2.$$

Esto significa que los vectores $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ y $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ son linealmente independientes, o que su producto vectorial es distinto de cero:

$$\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \neq 0.$$

Si la diferencial tiene rango 1 en (u_0, v_0) se dice que P es un punto singular.

Notación en el libro Ampliación de Cálculo, de Luis Rodríguez Marín: En este texto la notación habitual para el producto vectorial es $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$, que nosotros utilizaremos indistintamente junto con $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Definición 2. Una **superficie regular** o **superficie parametrizada** es una superficie donde todos sus puntos son regulares (o que no tiene puntos singulares).

Ejemplo 15. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, es una función diferenciable, entonces su grafo dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

es una superficie parametrizada.

Efectivamente:

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right), \quad \mathbf{x}_v(u, v) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

y se cumple que el rango de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix}$$

siempre de 2, por lo que todos sus puntos son regulares.

Ejemplo 16. Vamos a estudiar si la parametrización

$$x = u, \quad y = u - v, \quad z = u^2 + v^2$$

con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ es regular.

Como $\mathbf{x}(u, v) = (u, u - v, u^2 + v^2)$, entonces

$$\mathbf{x}_u(u, v) = (1, 1, 2u), \quad \mathbf{x}_v(u, v) = (0, -1, 2v).$$

Entonces el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2u \\ 0 & -1 & 2v \end{pmatrix}$$

es 2 para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. También podíamos haber comprobado que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= (1, 1, 2u) \times (0, -1, 2v) \\ &= (2v + 2u, -2v, -1) \neq (0, 0, 0) \end{aligned}$$

siempre. ☺

A no ser que especifiquemos lo contrario, vamos a trabajar con superficies parametrizadas, y además vamos a pedir que la aplicación que las define sea tantas veces diferenciable como necesitemos.

5.5. Plano tangente y recta normal

Para una superficie parametrizada regular, observamos que $\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v) \neq \mathbf{0}$. Por tanto para cada punto de la superficie $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ podemos determinar un plano a partir de los vectores \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v . El plano que pasa por un punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ y está generado por los vectores $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ y $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ recibe el nombre de **plano tangente** a la superficie en $\mathbf{x}(u_0, v_0)$.

Por otro lado, la ecuación paramétrica del plano tangente se obtiene teniendo en cuenta que contiene a los vectores $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ y $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ y que pasa por $\mathbf{x}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Esta ecuación es

$$(x, y, z) = \mathbf{p}(\lambda, \mu) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \mathbf{x}_u(u_0, v_0) + \mu \mathbf{x}_v(u_0, v_0).$$

También podemos determinar el plano tangente teniendo en cuenta que su vector normal viene dado por $\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{x}_v(u_0, v_0)$. Si llamamos

$$\mathbf{Normal}(u, v) = \mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v),$$

entonces la ecuación del plano tangente a una superficie S dada por $\mathbf{x}(u, v)$ en un punto $\mathbf{x}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ tiene por ecuación implícita

$$\mathbf{Normal}(u_0, v_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

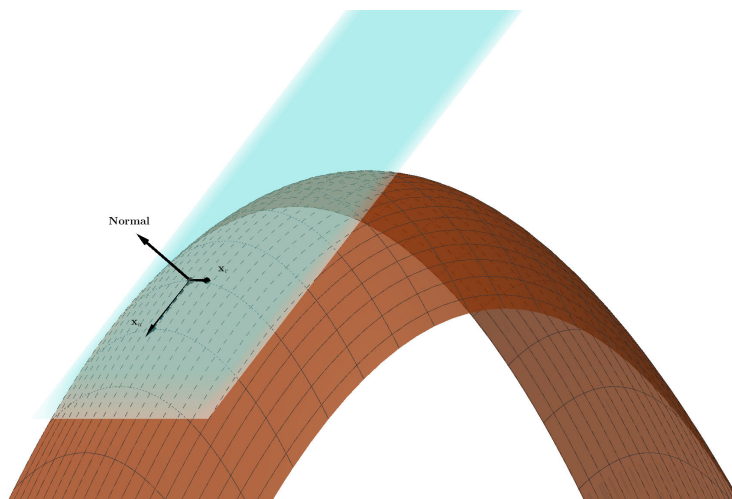
Esto es lo mismo que hacer:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u(u_0, v_0) & y_u(u_0, v_0) & z_u(u_0, v_0) \\ x_v(u_0, v_0) & y_v(u_0, v_0) & z_v(u_0, v_0) \end{vmatrix} = 0$$

y vemos que coincide con la expresión del plano tangente por el punto.

Notación en el libro [Ampliación de Cálculo, de Luis Rodríguez Marín](#): En el libro [Ampliación de Cálculo](#) se denota como $\mathbf{N}(u, v)$ al producto vectorial $\mathbf{N}(u, v) = \mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)$. En estos apuntes lo llamamos **Normal**.

En la siguiente figura se representan una superficie, un punto, los vectores derivadas parciales a la superficie en el punto, el vector **Normal** y el plano determinado por ellos.



A lo largo del texto también llamaremos plano tangente al plano tangente vectorial (es decir, al plano generado por los vectores derivadas parciales que pasa por el origen). Por el contexto vamos a distinguir si al decir plano (o

espacio) tangente nos referimos al espacio vectorial generado por los vectores $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ y $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ o al plano tangente a la superficie por el punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$.

Ejemplo 17. En el ejemplo 15 vimos que si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, entonces su grafo dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, f(u, v))$$

es una superficie parametrizada.

También vimos que los vectores $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ están dados por:

$$\mathbf{x}_u(u, v) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}\right), \quad \mathbf{x}_v(u, v) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}\right).$$

Por la asignatura de *Cálculo* sabemos que estos vectores están en el plano tangente. Y que la ecuación del plano tangente en $(a, b, f(a, b))$ es:

$$(x, y, z) = (a, b, f(a, b)) + \lambda \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\right) + \mu \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Esto coincide con lo que hemos dicho para superficies. ☺

La recta perpendicular al plano tangente se llama **recta normal**. Es la recta cuyo vector director es un vector normal al plano tangente, como por ejemplo $\mathbf{Normal}(u, v)$. Para simplificar, vamos a definir ya **vector normal**: es el vector unitario con la misma dirección y sentido que $\mathbf{Normal}(u, v)$. Lo denotamos $\mathbf{N}(u, v)$ y cumple:

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\|}.$$

Con la notación que hemos utilizado anteriormente, y llamando

$$\mathbf{Normal}(u_0, v_0) = (N_1(u_0, v_0), N_2(u_0, v_0), N_3(u_0, v_0)),$$

las ecuaciones de la recta normal son:

$$\frac{x - x_0}{N_1} = \frac{y - y_0}{N_2} = \frac{z - z_0}{N_3}.$$

También se puede escribir como

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \mathbf{Normal}(u_0, v_0).$$

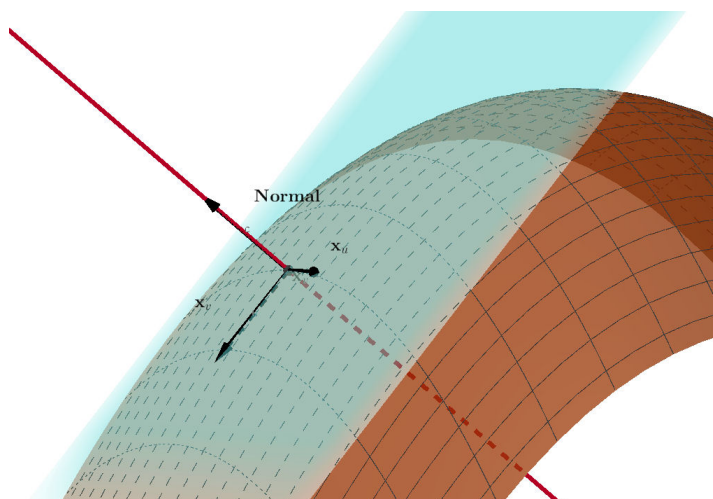
Podemos también determinar estas ecuaciones a partir de \mathbf{N} , mediante:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \mathbf{N}(u_0, v_0).$$

pero en general va a ser más sencillo con **Normal**, ya que no se divide entre el módulo del vector.

Notación en el libro Ampliación de Cálculo, de Luis Rodríguez Marín: En el libro Ampliación de Cálculo se llama vector normal unitario al vector que aquí llamamos $\mathbf{N}(u, v)$ y se denota como $\mathbf{n}(u, v)$.

En la siguiente figura se representan el plano normal y la recta tangente:



Ejemplo 18. Sea S la superficie dada por la parametrización

$$x = u^2v + v, y = v^2 + 1, z = u^2 - uv.$$

Vamos a determinar el conjunto M de sus puntos singulares y, para el punto correspondiente a $u = 1, v = 1$, las ecuaciones paramétricas e implícitas del plano tangente en este punto y la ecuación de la recta normal.

Los puntos singulares de una curva respecto a una parametrización son aquellos en los que $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = 0$. Como

$$\mathbf{x}(u, v) = (u^2v + v, v^2 + 1, u^2 - uv),$$

entonces

$$\mathbf{x}_u = (2uv, 0, 2u - v), \quad \mathbf{x}_v = (u^2 + 1, 2v, -u),$$

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2uv & 0 & 2u - v \\ u^2 + 1 & 2v & -u \end{vmatrix} = (-4uv + 2v^2, u^2v + 2u^3 + 2u - v, 4uv^2).$$

Este vector es el vector nulo si $u = 0$ o $v = 0$. Entonces

$$M = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u = 0 \text{ o } v = 0\}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u, v) &= (u^2v + v, v^2 + 1, u^2 - uv), \\ \mathbf{x}(1, 1) &= (2, 2, 0).\end{aligned}$$

Determinamos los vectores

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u, v) &= (2uv, 0, 2u - v), \quad \mathbf{x}_u(1, 1) = (2, 0, 1), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (u^2 + 1, 2v, -u), \quad \mathbf{x}_v(1, 1) = (2, 2, -1).\end{aligned}$$

El plano tangente pasa por $\mathbf{x}(1, 1) = (2, 2, 0)$ y contiene a los vectores $\mathbf{x}_u(1, 1)$ y $\mathbf{x}_v(1, 1)$, es decir, su ecuación implícita es:

$$0 = \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 4y - 2x + 4z - 4,$$

o $2y - x + 2z = 2$.

La ecuación paramétrica es

$$\mathbf{p}(\lambda, \mu) = (2, 2, 0) + \lambda(2, 0, 1) + \mu(2, 2, -1).$$

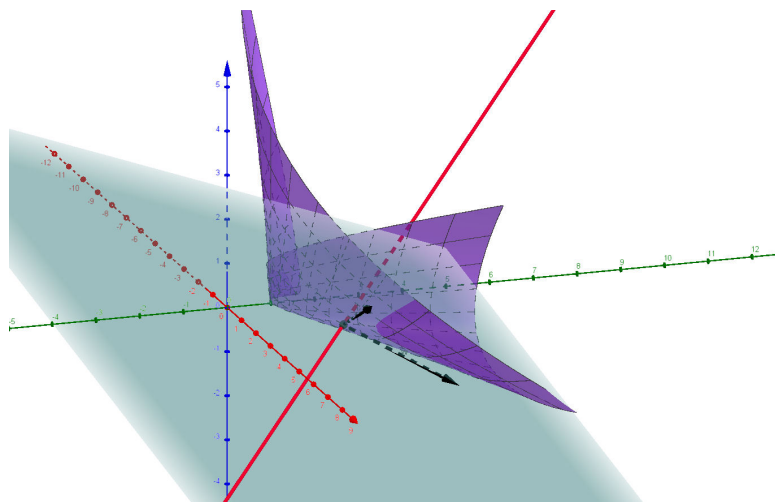
La recta normal tiene la dirección del vector $\mathbf{x}_u(1, 1) \times \mathbf{x}_v(1, 1) =$

$$\mathbf{x}_u(1, 1) \times \mathbf{x}_v(1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 4, 4).$$

Su ecuación es:

$$(x, y, z) = (2, 2, 0) + \lambda(-2, 4, 4).$$

En la siguiente figura se representan la superficie, el plano tangente y los vectores derivada parcial.



Mejor aproximación a la superficie por un plano

El ejemplo 17 nos da una idea de que el plano tangente es el plano que mejor aproxima localmente la superficie. Por otro lado, el teorema de Taylor nos da las mejores aproximaciones a funciones por funciones lineales, cuadráticas, etc. Por eso, vamos a utilizarlo para demostrar que la mejor aproximación local a una superficie en un punto es el plano tangente utilizando el desarrollo de Taylor de la función.

Sabemos que si $\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$ es una superficie regular, donde $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces en el punto $\mathbf{x}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ el polinomio de Taylor de orden 1 es la mejor aproximación lineal a la función. El Teorema de Taylor (aplicado a cada una de las componentes de $\mathbf{x}(u, v)$) nos dice que

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{x}(u_0, v_0) + (u - u_0) \mathbf{x}_u(u_0, v_0) + (v - v_0) \mathbf{x}_v(u_0, v_0) + (R_1(u, v), R_2(u, v), R_3(u, v)),$$

donde $R_i(u, v)$ representa el resto de orden 2 correspondiente al polinomio de Taylor de la componente i de \mathbf{x} . Sabemos, además, por las propiedades del resto, que

$$\lim_{(u,v) \rightarrow (u_0,v_0)} \frac{R_i(u, v)}{\|(u - u_0, v - v_0)\|} = 0.$$

Esto significa que

$$\mathbf{x}(u_0, v_0) + (u - u_0) \mathbf{x}_u(u_0, v_0) + (v - v_0) \mathbf{x}_v(u_0, v_0)$$

es la mejor aproximación lineal a \mathbf{x} cerca de (u_0, v_0) , Pero esta ecuación es precisamente la del plano tangente a la superficie en $\mathbf{x}(u_0, v_0)$.

Ejemplo 19. Como ya sabemos, un plano de \mathbb{R}^3 es una superficie. Está determinado por un punto $\mathbf{P} = (p_1, p_2, p_3)$ y por dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Su ecuación paramétrica es:

$$\mathbf{x}(\lambda, \mu) = \mathbf{P} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Observamos que esta ecuación es válida si tomamos cualquier punto del plano.

Los vectores derivada parcial con respecto a λ y μ son:

$$\mathbf{x}_\lambda = \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}_\mu = \mathbf{v}.$$

Luego el plano tangente que pasa por un punto cualquiera \mathbf{P} del plano tiene como ecuación paramétrica:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\lambda, \mu) &= \mathbf{P} + \lambda\mathbf{x}_\lambda + \mu\mathbf{x}_\mu \\ &= \mathbf{P} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esta es la ecuación del plano, como podíamos esperar, ya que el plano tangente a un plano en un punto es el propio plano. ☺

5.6. Curvas sobre superficies

Importante: Se debe estudiar también en el apartado 5.5 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.

A continuación se dan ejemplos y algunas ideas, pero no cubre todos los contenidos de este apartado.

Las curvas contenidas en una superficie S dada por una parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ son imágenes, por medio de \mathbf{x} de curvas diferenciables contenidas en U . Es decir, si C es una curva cuyos puntos son de la forma $(u(t), v(t)) \in U$, para $t \in I \subset \mathbb{R}$, entonces la aplicación

$$I \ni t \mapsto \mathbf{x}(u(t), v(t)) \in S \subset \mathbb{R}^3.$$

Resumiendo, si tenemos una superficie diferenciable dada por una aplicación de un conjunto U del plano (de \mathbb{R}^2) en el espacio, un tenemos una curva plana definida a través de otra aplicación diferenciable de un intervalo en ese conjunto U , entonces tenemos una aplicación de un intervalo en el espacio, que nos da una curva en el espacio, pero que a la vez es una curva que está contenida en la superficie S .

Ejemplo 20. Una parametrización de parte de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1 es

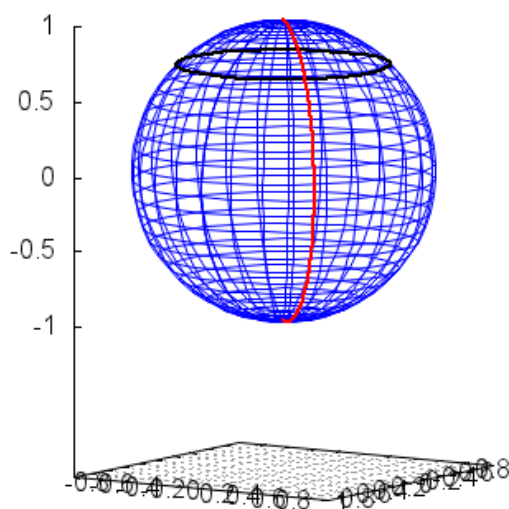
$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \operatorname{sen} \phi, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \cos \phi),$$

para $\theta \in (0, 2\pi)$, $\phi \in (0, \pi)$. Curvas contenidas en ella son las circunferencias dada por

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t, \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} t, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \text{ para } t \in (0, 2\pi),$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} t, \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} t, \cos t \right), \text{ para } t \in (0, \pi).$$

Son un paralelo y un meridiano. Se representan en la siguiente figura



Un vector tangente a la curva es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= u'(t) \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t) \mathbf{x}_v(u(t), v(t)) \\ &= d\mathbf{x}(u, v) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 21. Consideramos de parte de la esfera dada por las ecuaciones paramétricas

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \operatorname{sen} \phi, \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \cos \phi)$$

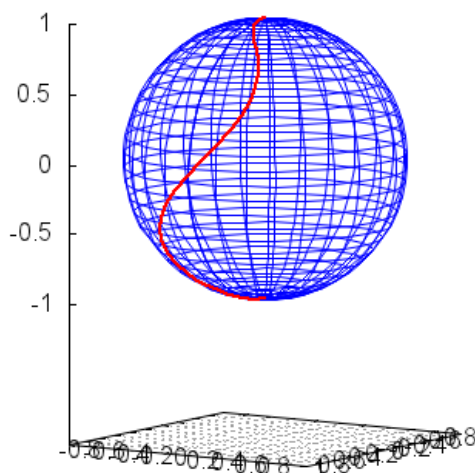
para $\theta \in (0, 2\pi)$, $\phi \in (0, \pi)$. Para $t \in (0, \pi)$ definimos:

$$(u(t), v(t)) = (\text{sen } t \cos t, t).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u(t), v(t)) &= (\cos u(t) \text{sen } v(t), \text{sen } u(t) \text{sen } v(t), \cos v(t)) \\ &= (\cos(\text{sen } t \cos t) \text{sen } t, \text{sen}(\text{sen } t \cos t) \text{sen } t, \cos t) \end{aligned}$$

es la ecuación de una curva contenida en la esfera. Se representa en la siguiente figura:



Vamos a determinar el vector tangente a la curva en un punto. Como

$$\begin{aligned} u'(t) &= \cos^2 t - \text{sen}^2 t, \quad v'(t) = 1, \\ \mathbf{x}_u(u, v) &= (-\text{sen } u \text{sen } v, \cos u \text{sen } v, 0), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (\cos u \cos v, \text{sen } u \cos v, -\text{sen } v), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= u'(t)\mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\mathbf{x}_v(u(t), v(t)) \\ &= (\cos^2 t - \text{sen}^2 t)(-\text{sen } u \text{sen } v, \cos u \text{sen } v, 0) \\ &\quad + 1(\cos u \cos v, \text{sen } u \cos v, -\text{sen } v). \end{aligned}$$



En una superficie hay varias curvas destacadas por sus propiedades. Un tipo de curvas destacadas son las **geodésicas**. Se pueden definir como curvas donde su aceleración $\mathbf{x}''(t)$ siempre es normal a la superficie, es decir, la proyección de $\mathbf{x}''(t)$ en el plano tangente es el vector $\mathbf{0}$. Intuitivamente, si nos movemos por una geodésica en la superficie no sentimos aceleración, sobre la superficie parece un movimiento de velocidad constante.

Nos preguntamos cómo obtener su ecuación. Suponemos que tenemos una superficie parametrizada regular, donde \mathbf{x} es dos veces diferenciable con continuidad. Sabemos que

$$\mathbf{x}'(t) = u'(t) \mathbf{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t) \mathbf{x}_v(u(t), v(t))$$

que escribimos simplificada como :

$$\mathbf{x}' = u' \mathbf{x}_u + v' \mathbf{x}_v,$$

pero teniendo siempre presente cuáles son los argumentos de cada una de las funciones que intervienen.

Derivamos de nuevo respecto a t y tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'' &= u'' \mathbf{x}_u + (u')^2 \mathbf{x}_{uu} + u'v' \mathbf{x}_{uv} + v'' \mathbf{x}_v + u'v' \mathbf{x}_{uv} + (v')^2 \mathbf{x}_{vv} \\ &= u'' \mathbf{x}_u + (u')^2 \mathbf{x}_{uu} + 2u'v' \mathbf{x}_{uv} + v'' \mathbf{x}_v + (v')^2 \mathbf{x}_{vv}. \end{aligned} \quad (1)$$

Además, para que la curva dada por $(u(t), v(t))$ sea una geodésica, debe ser

$$\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}_v = 0. \quad (2)$$

Esto significa, además, que la velocidad de la geodésica es constante, ya que la derivada del módulo de la velocidad es 0. En efecto, si llamamos

$$f(t) = \|\mathbf{x}'\|^2 = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}',$$

y derivamos f , tenemos

$$f'(t) = 2\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'' = 0$$

porque \mathbf{x}' está contenido en el plano generado por \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v . Como la derivada del módulo es 0, la velocidad es constante.

A partir de las condiciones 2 y de la expresión 1, resulta

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}_u = (u'' \mathbf{x}_u + (u')^2 \mathbf{x}_{uu} + 2u'v' \mathbf{x}_{uv} + v'' \mathbf{x}_v + (v')^2 \mathbf{x}_{vv}) \cdot \mathbf{x}_u \\ &= u'' \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + (u')^2 \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u + 2u'v' \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u + v'' \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u + (v')^2 \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u, \\ 0 &= \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}_v = (u'' \mathbf{x}_u + (u')^2 \mathbf{x}_{uu} + 2u'v' \mathbf{x}_{uv} + v'' \mathbf{x}_v + (v')^2 \mathbf{x}_{vv}) \cdot \mathbf{x}_v \\ &= u'' \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + (u')^2 \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + 2u'v' \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + v'' \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v + (v')^2 \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

Ahora introducimos los **coeficientes de la primera forma fundamental**, que son las funciones definidas mediante:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

Recordamos que E, F, G son evaluados en el punto $(u(t), v(t))$.

Ejemplo 22. Vamos a determinar los coeficientes de la primera forma fundamental de la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio R , que está dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (R \cos \theta \sen \phi, R \sen \theta \sen \phi, R \cos \phi),$$

para $\theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi]$.

En un punto $\mathbf{x}(\theta, \phi)$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\theta &= (-R \sen \theta \sen \phi, R \cos \theta \sen \phi, 0), \\ \mathbf{x}_\phi &= (R \cos \theta \cos \phi, R \sen \theta \cos \phi, -R \sen \phi). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\theta \\ &= (-R \sen \theta \sen \phi, R \cos \theta \sen \phi, 0) \cdot (-R \sen \theta \sen \phi, R \cos \theta \sen \phi, 0) \\ &= R^2 \sen^2 \theta \sen^2 \phi + R^2 \cos^2 \theta \sen^2 \phi \\ &= R^2 \sen^2 \phi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \mathbf{x}_\theta \cdot \mathbf{x}_\phi \\ &= (-R \sen \theta \sen \phi, R \cos \theta \sen \phi, 0) \cdot (R \cos \theta \cos \phi, R \sen \theta \cos \phi, -R \sen \phi) \\ &= -R^2 \sen \theta \sen \phi \cos \theta \cos \phi + R^2 \cos \theta \sen \phi \sen \theta \cos \phi = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \mathbf{x}_\phi \cdot \mathbf{x}_\phi \\ &= (R \cos \theta \cos \phi, R \sen \theta \cos \phi, -R \sen \phi) \cdot (R \cos \theta \cos \phi, R \sen \theta \cos \phi, -R \sen \phi) \\ &= R^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + R^2 \sen^2 \theta \cos^2 \phi + R^2 \sen^2 \phi \\ &= R^2. \end{aligned}$$



Con esta notación, la condición que cumplen las geodésicas es

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (u')^2 \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u + 2u'v' \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u + (v')^2 \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u \\ (u')^2 \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + 2u'v' \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + (v')^2 \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Además, como la superficie es regular, \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son linealmente independientes y la matriz

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

tiene inversa.

Entonces, obtener las geodésicas se reduce a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Este sistema, dada una condición inicial $u(t_0) = u_0, v(t_0) = v_0, u'(t_0) = u'_0, v'(t_0) = v'_0$ tiene solución única, ya que el lado derecho está expresado por funciones diferenciables en u, v, u', v' y t .

Intuitivamente, esto significa que dados una posición inicial, una velocidad inicial y un instante inicial, existe una única geodésica que pasa por la posición inicial en el instante inicial con esa velocidad. Pero esta curva no debe estar dada necesariamente para todo instante $t \in \mathbb{R}$.

Señalamos que aunque la geodésica es una curva de velocidad constante, no es cierto que cualquier curva de velocidad constante sobre una superficie sea una geodésica.

Ejemplo 23. (Ejercicio 220 de “Notas de geometría diferencial con aplicaciones”) Demuéstrese que las geodésicas del plano son las líneas rectas recorridas a velocidad constante.

Lo haremos en el plano $z = 0$, es decir, la ecuación de la superficie es

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, 0).$$

Una curva está dada por $(u(t), v(t))$. Entonces, calculamos los coeficientes de la primera forma fundamental para plantear la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = (1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0) = 1, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = (1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = (0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0) = 1. \end{aligned}$$

Además:

$$\mathbf{x}_{uu} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{x}_{uv} = (0, 0, 0), \quad \mathbf{x}_{vv} = (0, 0, 0),$$

por lo que

$$A = (u')^2 \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u + 2u'v' \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u + (v')^2 \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u = 0,$$

$$B = (u')^2 \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + 2u'v' \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v + (v')^2 \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v = 0.$$

Entonces, la ecuación de las geodésicas es

$$0 = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} 0 = u''(t), \\ 0 = v''(t). \end{cases}$$

Faltan las condiciones iniciales. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $t = t_0$ y que pasa por el punto $(0, 0)$, es decir

$$u(0) = 0, \quad v(0) = 0.$$

Además, suponemos que el vector tangente a la curva es (u_1, v_1) , es decir, que se cumple:

$$u'(0) = u_1, \quad v'(0) = v_1.$$

Resolvemos este sistema y resulta:

$$\begin{aligned} u'(t) &= a, & u(t) &= at + b, \\ v'(t) &= c, & v(t) &= ct + d, \end{aligned}$$

para a, b, c, d constantes. Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, es:


$$\begin{aligned} u'(0) &= a = u_1, & u(0) &= b = 0, \\ v'(0) &= c = v_1, & v(0) &= d = 0. \end{aligned}$$

Por eso, la ecuación de la curva es

$$(u(t), v(t)) = (u_1 t, v_1 t).$$

Es una recta, porque:

$$v = v_1 t = \frac{v_1}{u_1} u.$$

Además, está recorrida a velocidad constante. 

5.7. Primera forma fundamental

Importante: Se debe estudiar también en el apartado 6.1 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.

Para una superficie S dada por $\mathbf{x} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y sea $P = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ un punto de S . Ya hemos definido los coeficientes de la primera forma fundamental, que son:

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

Observamos que cada uno de estos coeficientes es una función de $D \subset \mathbb{R}^2$ en \mathbb{R} . Pero para un punto $P \in S$ estos coeficientes son un número. Podemos escribir la matriz

$$M = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

tal como hicimos al estudiar las geodésicas. Señalamos que esta matriz es simétrica.

Por otro lado, tenemos el plano (espacio) tangente a S por P , considerado como un espacio vectorial, y lo llamamos T_P . Sabemos que una base de este espacio vectorial, si la superficie es regular, es $\mathbf{x}_u(u_0, v_0), \mathbf{x}_v(u_0, v_0)$. Vamos a omitir (u_0, v_0) para simplificar. Entonces si consideramos dos vectores $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in T_P$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \lambda \mathbf{x}_u + \mu \mathbf{x}_v, \\ \mathbf{w}' &= \lambda' \mathbf{x}_u + \mu' \mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

Para estos vectores podemos definir una aplicación mediante:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}, \mathbf{w}' \rangle &\mapsto \mathbf{w} M (\mathbf{w}')^t = (\lambda, \mu) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} \\ &= \lambda \lambda' E^2 + \lambda \mu' F + \lambda' \mu F + \mu \mu' G^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Esta aplicación es una forma bilineal y como la matriz asociada es simétrica, entonces es una forma bilineal simétrica. Además es definida positiva, porque el determinante de la matriz asociada es mayor o igual que 0:

$$\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = EG - F^2 \geq 0.$$

La desigualdad anterior proviene de lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 0 \leq \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2 &= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 \sin^2 \theta \\
 &= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\
 &= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2 \\
 &= EG - F^2.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Entonces, es una forma bilineal simétrica definida positiva y por eso está asociada a un producto escalar en el espacio tangente a S en P , lo que quiere decir que a partir de esta forma bilineal se pueden estudiar distancias (longitudes), ángulos y áreas.

Por otro lado, esta forma bilineal tiene una forma cuadrática asociada, que es lo que se llama la **primera forma fundamental**. Si $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{x}_u + \mu \mathbf{x}_v$, entonces

$$I_p(\mathbf{w}) = \lambda^2 E^2 + 2\lambda\mu F + \mu^2 G.$$

Representa la norma asociada al producto escalar que nos da la forma bilineal.

Lo que vamos a ver a continuación es cómo podemos realizar medidas intrínsecas en la superficie (longitud o distancia, ángulos y áreas) con la primera forma fundamental, o más concretamente, con sus coeficientes.

Longitudes

Tenemos una curva $\mathbf{x}(t)$ para $t \in [a, b]$ que está contenida en la superficie $\mathbf{x}(u, v)$. Su longitud está dada por

$$L = \int_a^b \|\mathbf{x}'(t)\| dt = \int_a^b (\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}'(t))^{\frac{1}{2}} dt.$$

Como

$$\mathbf{x}' = u' \mathbf{x}_u + v' \mathbf{x}_v,$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' &= (u' \mathbf{x}_u + v' \mathbf{x}_v) \cdot (u' \mathbf{x}_u + v' \mathbf{x}_v) \\
 &= (u')^2 \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + 2u'v' \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + (v')^2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \\
 &= E (u')^2 + 2F u'v' + G (v')^2.
 \end{aligned}$$

Entonces la longitud es

$$L = \int_a^b (E (u')^2 + 2F u'v' + G (v')^2)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Relacionándolo con la geometría euclídea y la intuición, este resultado nos dice que si $ds^2 = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}' dt^2$ es un elemento de longitud de la curva, entonces si escribimos $du/dt = u'$, $dv/dt = v'$, se tiene que

$$ds^2 = Edu^2 + 2F dudv + Gdv^2.$$

Es decir, la primera forma fundamental relaciona un elemento de longitud con la variación de cada uno de los parámetros de la superficie, en las **curvas parámetro o curvas coordenadas** ($u = \text{constante}$, $v = \text{constante}$). Si los vectores tangentes a las curvas coordenadas son perpendiculares (es decir $dudv = 0$), entonces la geometría de la superficie será euclídea.

Ejemplo 24. Sea S la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ parametrizada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$$

para $v > 0$, $0 < u < \pi$. Vamos a calcular la longitud de la curva parámetro $v = 1$.

Necesitamos los coeficientes de la primera forma fundamental. De los ejercicios sabemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= (-v \sin u, v \cos u, 0), \\ \mathbf{x}_v &= (\cos u, \sin u, 1), \\ E &= v^2, \\ F &= 0, \\ G &= 2. \end{aligned}$$

Ahora, la curva parámetro $v = 1$ es la curva dada por

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, 1),$$

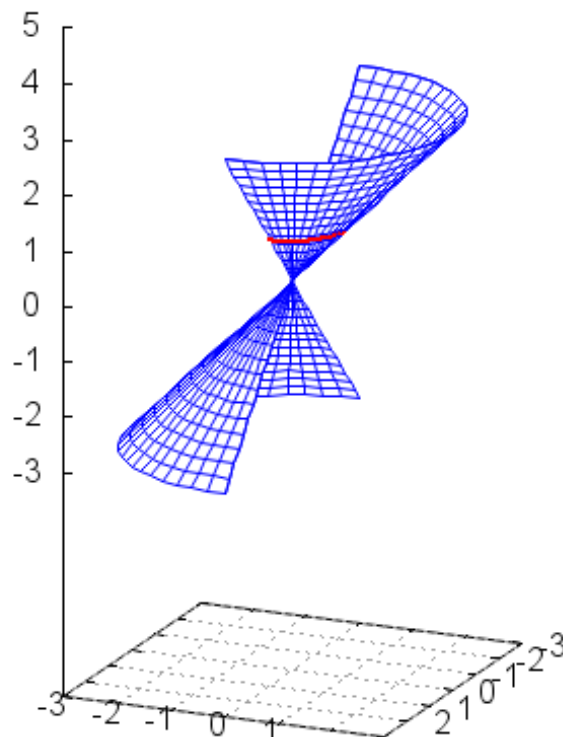
ya que $v = 1$, $u = t$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} E &= 1, \quad F = 0, \quad G = 2, \\ u' &= 1, \quad v' = 0. \end{aligned}$$

y la longitud de esta curva parámetro es:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi (1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^\pi dt = t \Big|_0^\pi = \pi. \end{aligned}$$

La representación gráfica de la superficie y la curva está en la siguiente figura:



Ángulos

Tenemos dos vectores \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 tangentes a la superficie en un punto de ella, $\mathbf{x}(u_0, v_0)$. Los vectores $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ y $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ son vectores del plano tangente y son linealmente independientes, y por eso son base del plano tangente. Por eso, podemos escribir \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 en función de ellos:

$$\mathbf{u}_i = u_i \mathbf{x}_u(u_0, v_0) + v_i \mathbf{x}_v(u_0, v_0)$$

para $i = 1, 2$. El coseno del ángulo α que forman nos lo da el producto escalar:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_1\| \|\mathbf{u}_2\|}.$$

Pero tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 &= (u_1 \mathbf{x}_u + v_1 \mathbf{x}_v) \cdot (u_2 \mathbf{x}_u + v_2 \mathbf{x}_v) \\ &= u_1 u_2 \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + (u_1 v_2 + u_2 v_1) \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + v_1 v_2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \\ &= u_1 u_2 E + (u_1 v_2 + u_2 v_1) F + v_1 v_2 G. \end{aligned}$$

Entonces, el ángulo que forman cumple:

$$\cos \alpha = \frac{u_1 u_2 E + (u_1 v_2 + u_2 v_1) F + v_1 v_2 G}{\|\mathbf{u}_1\| \|\mathbf{u}_2\|}$$

Determinar el ángulo entre dos vectores que conocemos es sencillo utilizando el producto escalar. Sin embargo queremos escribir esta relación porque nos va a permitir determinar el ángulo que forman las curvas parámetro de una superficie conociendo sólo los coeficientes de la primera forma fundamental de la superficie en un punto, como veremos después del siguiente ejemplo.

Ejemplo 25. Sea S la superficie dada por

$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = u^2.$$

Vamos a determinar el ángulo que forman los vectores $(1, 1, 2)$ y $(1, -2, 2)$, tangentes a la superficie en el punto $(1, 0, 1)$ utilizando la relación anterior con los coeficientes de la primera forma fundamental. Los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$\begin{aligned} E &= 1 + 4u^2, \\ F &= 0, \\ G &= u^2. \end{aligned}$$

No vamos a hacerlo aquí, está resuelto en los ejercicios. El punto $(1, 0, 1)$ se corresponde con los valores de $u = 1, v = 0$. Comprobamos que estos vectores son tangentes a la superficie en este punto. Como

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u, v) &= (\cos v, \sin v, 2u), & \mathbf{x}_u(1, 0) &= (1, 0, 2), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (-u \sin v, u \cos v, 0), & \mathbf{x}_v(1, 0) &= (0, 1, 0), \end{aligned}$$

son tangentes, y que

$$\begin{aligned} (1, 1, 2) &= \mathbf{x}_u(1, 0) + \mathbf{x}_v(1, 0), \\ (1, -2, 2) &= \mathbf{x}_u(1, 0) - 2\mathbf{x}_v(1, 0). \end{aligned}$$

Entonces $u_1 = 1, v_1 = 1, u_2 = 1, v_2 = -2, E = 5, F = 0, G = 1$ y

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_1\| &= \sqrt{1^1 + 1^1 + 2^2} = \sqrt{6}, \\ \|\mathbf{u}_2\| &= \sqrt{1^1 + (-2)^2 + 2^2} = 3. \end{aligned}$$

El coseno del ángulo que forman es

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{1 \cdot 1 \cdot 5 + (1(-2) + 1 \cdot 1)0 + 1(-2)1}{3\sqrt{6}} \\ &= \frac{5-2}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

El ángulo que forma es aproximadamente

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) \sim 1,1503.$$

Aunque lo hemos hecho utilizando la primera forma fundamental, podíamos haber determinado directamente el ángulo a partir del producto escalar. ☺

Así también podemos formar el ángulo que forman dos curvas contenidas en una superficie que se cortan en un punto P : es el ángulo que forman los vectores tangentes a las curvas en el punto P . Si tenemos dos curvas $\alpha(\mathbf{t})$ y $\beta(\mathbf{t})$ contenidas en una superficie S , podemos determinar el ángulo que forman, que es el mismo que el ángulo que forman los vectores tangentes en el punto donde se cortan. Si los vectores tangentes a la curva en un punto $\alpha(\mathbf{t}_0) = \beta(\mathbf{t}_1)$ son:

$$\begin{aligned}\mathbf{h} &= \alpha(\mathbf{t}_0) = h_1\mathbf{x}_u + h_2\mathbf{x}_v \\ \mathbf{k} &= \beta(\mathbf{t}_0) = k_1\mathbf{x}_u + k_2\mathbf{x}_v,\end{aligned}$$

entonces el ángulo que forman las curvas es:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{h}\| \|\mathbf{k}\|} = \frac{(h_1\mathbf{x}_u + h_2\mathbf{x}_v) \cdot (k_1\mathbf{x}_u + k_2\mathbf{x}_v)}{\|h_1\mathbf{x}_u + h_2\mathbf{x}_v\| \|k_1\mathbf{x}_u + k_2\mathbf{x}_v\|} \\ &= \frac{h_1k_1E + (h_1k_2 + k_1h_2)F + h_2k_2G}{(h_1^2E + 2h_1h_2F + h_2^2G)^{1/2} (k_1^2E + 2k_1k_2F + k_2^2G)^{1/2}}.\end{aligned}$$

En particular, si $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ son las curvas parámetro $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u_0, v)$, entonces

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

En efecto, las curva parámetro cumplen $\mathbf{u}_1 = \mathbf{x}_u$ y $\mathbf{u}_2 = \mathbf{x}_v$. Entonces

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{u_1u_2E + (u_1v_2 + u_2v_1)F + v_1v_2G}{\|\mathbf{u}_1\| \|\mathbf{u}_2\|} \\ &= \frac{1 \cdot 0 \cdot E + (1 \cdot 1 + 0 \cdot 0)F + 0 \cdot 1 \cdot G}{\sqrt{E}\sqrt{G}} \\ &= \frac{F}{\sqrt{EG}}.\end{aligned}$$

Además, dos curvas son ortogonales si y sólo si

$$Eh_1k_1 + 2F(h_1k_2 + h_2k_1) + Gh_2k_2 = 0.$$

Las curvas parámetro son ortogonales si y sólo si $F = 0$.

Ejemplo 26. Sea S la esfera de radio uno dada por

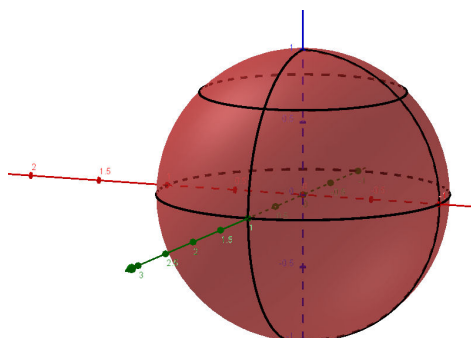
$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \sen \phi, \sen \theta \sen \phi, \cos \phi),$$

para $\theta \in (0, 2\pi), \phi \in (0, \pi)$. Vamos a determinar el ángulo que forman las curvas parámetro utilizando la relación anterior.

Solución: Las curvas parámetro que pasan por $P = \mathbf{x}(\theta_0, \phi_0)$ son:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(\theta, \phi) &= (\cos \theta_0 \sen \phi, \sen \theta_0 \sen \phi, \cos \phi), \\ \mathbf{x}_2(\theta, \phi_0) &= (\cos \theta \sen \phi_0, \sen \theta \sen \phi_0, \cos \phi_0). \end{aligned}$$

Son, respectivamente, un meridiano y un paralelo. Se representan en la siguiente figura:



Los coeficientes de la primera forma fundamental de la esfera son:

$$\begin{aligned} E &= \sen^2 \phi, \\ F &= 0, \\ G &= 1. \end{aligned}$$

En $P = \mathbf{x}(\theta_0, \phi_0)$ son:

$$E = \sen^2 \phi_0, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Entonces el ángulo que forman las curvas parámetro es:

$$\cos \alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{0}{\sqrt{\sen^2 \phi_0 \cdot 1}} = 0.$$

Son ortogonales. Observamos que no es necesario determinar los vectores tangentes a las curvas, sino que basta con tener los coeficientes de la primera forma fundamental.



Áreas

Podemos proceder igual a como se hizo para el cálculo de la longitud de una curva sobre una superficie, podemos determinar el área de una región R que está delimitada por las curvas coordenadas $\mathbf{x}(u_0, v)$, $\mathbf{x}(u_1, v)$, $\mathbf{x}(u, v_0)$, $\mathbf{x}(u, v_1)$ de una superficie S dada por $\mathbf{x}(u, v)$. Si consideramos un paralelogramo curvilínea con vértices suficientemente cercanos, $\mathbf{x}(u, v)$, $\mathbf{x}(u + du, v)$, $\mathbf{x}(u, v + dv)$, $\mathbf{x}(u + du, v + dv)$ se puede aproximar para du y dv suficientemente pequeños, por el paralelogramo determinado por los tres primeros vértices. Su área es

$$dA = \|(\mathbf{x}(u + du, v) - \mathbf{x}(u, v)) \times (\mathbf{x}(u, v + dv) - \mathbf{x}(u, v))\|.$$

Podemos seguir aproximando:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u + du, v) - \mathbf{x}(u, v) &\sim \mathbf{x}_u du, \\ \mathbf{x}(u, v + dv) - \mathbf{x}(u, v) &\sim \mathbf{x}_v dv.\end{aligned}$$

Entonces es

$$dA = \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv.$$

A partir de esta expresión, podemos determinar el área de R , mediante:

$$\begin{aligned}A &= \int \int_R \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv \\ &= \int_{v_0}^{v_1} \int_{u_0}^{u_1} \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv.\end{aligned}$$

Este área no coincide necesariamente con el área de $\mathbf{x}(R)$, porque \mathbf{x} no es necesariamente inyectiva.

Pero además, tenemos que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|^2 &= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 \sin^2 \theta \\ &= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\mathbf{x}_u\|^2 \|\mathbf{x}_v\|^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2 \\ &= EG - F^2.\end{aligned}$$

Entonces, el área de R es la siguiente integral doble

$$A = \int \int_W \sqrt{EG - F^2} dudv,$$

donde W es el conjunto de puntos que están en $[u_0, u_1] \times [v_0, v_1]$.

Ejemplo 27. Sea S la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ parametrizada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, v)$$

para $v > 0, 0 < u < 2\pi$. Vamos a determinar el área de la región delimitada por las curvas coordenadas $u_0 = \frac{\pi}{2}, u_1 = \pi$ y $v_0 = 1, v_1 = 2$.

Sabemos que los coeficientes de la primera forma fundamental son:

$$E = v^2, \quad F = 0, \quad G = 2.$$

Además, para la región considerada, es:

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{2v^2} = \sqrt{2}v.$$

Entonces:

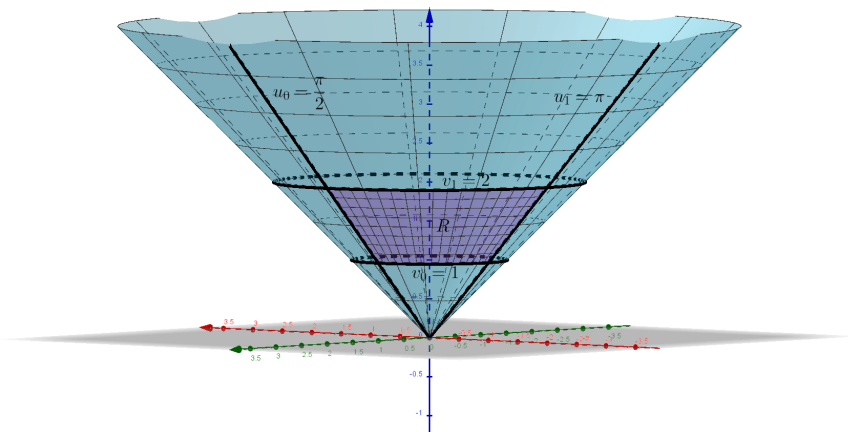
$$\begin{aligned} A &= \int_{v_0}^{v_1} \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{EG - F^2} dudv \\ &= \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{2}v dudv = \sqrt{2} \int_1^2 vu \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dv \\ &= \sqrt{2} \int_1^2 v \frac{\pi}{2} dv = \sqrt{2} \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} v^2 \Big|_1^2 \\ &= \sqrt{2} \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} 2^2 - \frac{1}{2} 1^2 \right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{4} \pi. \end{aligned}$$

En la figura se representan la superficie, las curvas parámetro y la región R que delimitan.



5.8. Segunda forma fundamental

Se debe estudiar, **además de por estos apuntes**, en los apartados 6.2 y 6.3 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.



Consideramos una superficie regular S . Como \mathbf{x}_u y \mathbf{x}_v son linealmente independientes y están contenidos en el plano tangente, entonces el vector unitario

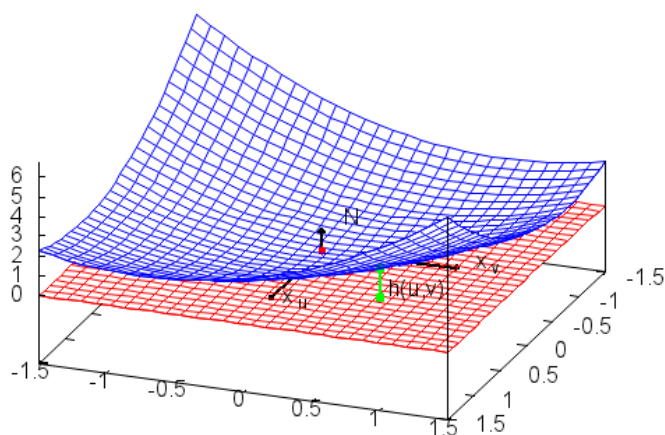
$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

es perpendicular al plano tangente, como ya vimos.

Parece natural estudiar la forma de la superficie cerca de un punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ a partir del plano tangente y de la altura (con signo) de un punto de la superficie con respecto al plano tangente en $\mathbf{x}(u_0, v_0)$, es decir, con:

$$h(u, v) = (\mathbf{x}(u, v) - \mathbf{x}(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0).$$

Esto se representa en la siguiente figura:



Igual que como hicimos para determinar la forma canónica de una curva, vamos a aproximar $h(u, v)$ utilizando el desarrollo de Taylor de $\mathbf{x}(u, v)$ cerca de (u_0, v_0) de orden 2. Resulta (véase “Notas de geometría diferencial con aplicaciones”, para $\Delta u = u - u_0$, $\Delta v = v - v_0$):

$$\begin{aligned}
 h(u, v) &= (\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \Delta u + \mathbf{x}_v(u_0, v_0) \Delta v \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{uu}(u_0, v_0) \Delta u^2 + 2\mathbf{x}_{uv}(u_0, v_0) \Delta u \Delta v + \mathbf{x}_{vv}(u_0, v_0) \Delta v^2)) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0) \\
 &\quad + O(\Delta u^2 + \Delta v^2) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{x}_{uu}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0) \Delta u^2 \\
 &\quad + \mathbf{x}_{uv}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0) \Delta u \Delta v \\
 &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{vv}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0) \Delta v^2 \\
 &\quad + O(\Delta u^2 + \Delta v^2).
 \end{aligned}$$

Recordamos que $O(\Delta u^2 + \Delta v^2)$ significa que la aproximación es de orden 2 o que

$$\lim_{\Delta u^2 + \Delta v^2 \rightarrow 0} \frac{O(\Delta u^2 + \Delta v^2)}{(\Delta u^2 + \Delta v^2)}$$

está acotado. En esta expresión, conocemos los valores de $\mathbf{x}_{uu}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0)$, $\mathbf{x}_{uv}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0)$ y $\mathbf{x}_{vv}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0)$. A partir de ellos definimos

los **coeficientes de la segunda forma fundamental**:

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{x}_{uu}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0), \\ f &= \mathbf{x}_{uv}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0), \\ g &= \mathbf{x}_{vv}(u_0, v_0) \cdot \mathbf{N}(u_0, v_0). \end{aligned}$$

A partir de estos coeficientes, podemos definir una aplicación que a cada vector $(\Delta u, \Delta v)$ le asigna

$$II_{(u,v)}(\Delta u, \Delta v) = e(u, v) \Delta u^2 + 2f(u, v) \Delta u \Delta v + g(u, v) \Delta v^2.$$

Obsérvese que $(\Delta u, \Delta v)$ representa un vector del espacio tangente, porque la superficie en ese punto está dada por coordenadas locales (u, v) . Por eso, podemos ver $II_{(u,v)}$ como una forma cuadrática definida sobre el espacio tangente a la superficie. Se llama **segunda forma fundamental**.

Ejemplo 28. Vamos a determinar la segunda forma fundamental de la parte de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio R , que está dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (R \cos \theta \sin \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \phi),$$

para $\theta \in (0, 2\pi)$, $\phi \in (0, \pi)$.

En un punto $\mathbf{x}(\theta, \phi)$ sabemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\theta &= (-R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta \sin \phi, 0), \quad \mathbf{x}_\phi = (R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \phi), \\ \mathbf{x}_{\theta\theta} &= (-R \cos \theta \sin \phi, -R \sin \theta \sin \phi, 0), \quad \mathbf{x}_{\theta\phi} = (-R \sin \theta \cos \phi, R \cos \theta \cos \phi, 0), \\ \mathbf{x}_{\phi\phi} &= (-R \cos \theta \sin \phi, -R \sin \theta \sin \phi, -R \cos \phi). \end{aligned}$$

Tenemos que calcular el vector normal unitario \mathbf{N} . El vector

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi &= (-R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta \sin \phi, 0) \times (R \cos \theta \cos \phi, R \sin \theta \cos \phi, -R \sin \phi) \\ &= R^2 (-\cos \theta \sin^2 \phi, -\sin \theta \sin^2 \phi, -\cos \phi \sin \phi), \end{aligned}$$

tiene la misma dirección y sentido que el vector normal a la superficie. Además:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi\| &= R^2 \sqrt{(-\cos \theta \sin^2 \phi)^2 + (-\sin \theta \sin^2 \phi)^2 + (-\cos \phi \sin \phi)^2} \\ &= R^2 \sin \phi. \end{aligned}$$

Por eso:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \frac{\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi}{\|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\phi\|} = \frac{R^2}{R^2 \sin \phi} (-\cos \theta \sin^2 \phi, -\sin \theta \sin^2 \phi, -\cos \phi \sin \phi) \\ &= (-\cos \theta \sin \phi, -\sin \theta \sin \phi, -\cos \phi). \end{aligned}$$

Ya podemos calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental:

$$e = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{\theta\theta} = (-\cos\theta \sin\phi, -\sin\theta \sin\phi, -\cos\phi) \cdot (-R \cos\theta \sin\phi, -R \sin\theta \sin\phi, 0) \\ = R \sin^2\phi$$

$$f = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{\theta\phi} = (-\cos\theta \sin\phi, -\sin\theta \sin\phi, -\cos\phi) \cdot (-R \sin\theta \cos\phi, R \cos\theta \cos\phi, 0) \\ = 0,$$

$$g = \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{\phi\phi} = (-\cos\theta \sin\phi, -\sin\theta \sin\phi, -\cos\phi) \cdot (-R \cos\theta \sin\phi, -R \sin\theta \sin\phi, -R \cos\phi) \\ = R.$$

Si $\mathbf{w} = (h, k)$ es un vector del plano tangente a S en P , expresado en la base $\{\mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\phi\}$, entonces

$$II_P(\mathbf{w}) = eh^2 + 2fhk + gk^2 = h^2 R \sin^2\phi + 2 \cdot 0 \cdot hk + Rk^2 = h^2 R \sin^2\phi + Rk^2.$$



Volviendo a $h(u, v)$, sabemos que

$$h(u, v) = \frac{1}{2} II_{(u,v)}(\Delta u, \Delta v) + O(\Delta u^2 + \Delta v^2).$$

Esto significa que la aproximación de orden 2 no nula en un entorno de $\mathbf{x}(u_0, v_0) \in S$, de la altura (con signo) sobre el plano tangente en el punto está dada por esta forma cuadrática, salvo el factor 1/2.

Si está familiarizado con las cuádricas (si no lo está, puede dejar este párrafo para una lectura posterior) sabrá que como es una forma cuadrática, su matriz asociada

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

define una cuádrlica. Esta será la cuádrlica a la que más se acerca la forma de la superficie en un entorno del punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$. Podemos determinar qué cuádrlica define a partir del determinante de su matriz asociada, es decir, a partir del valor de

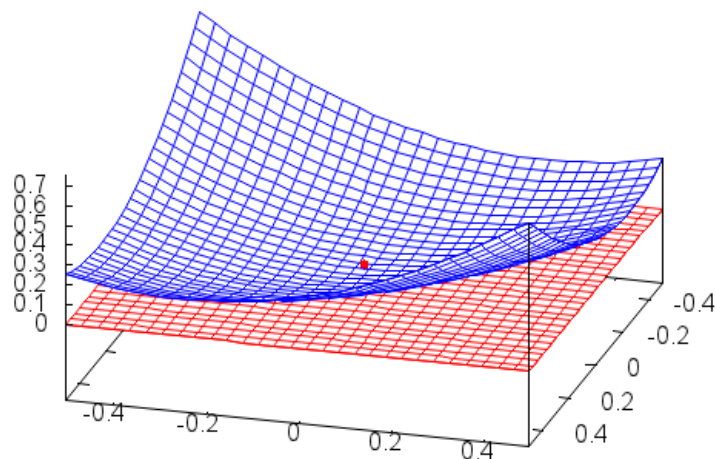
$$eg - f^2.$$

Este hecho nos da una justificación intuitiva a la segunda forma fundamental.

Si la segunda forma fundamental es definida, es decir, si

$$eg - f^2 > 0,$$

entonces en un entorno de $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ se tiene que la aproximación que hemos obtenido de $h(u, v)$ no cambia de signo, es decir, o es siempre positiva o es siempre negativa. Pero en cualquiera de los dos casos, la superficie está a un lado del plano tangente y sólo toca al plano tangente en el punto de tangencia, en $\mathbf{x}(u_0, v_0)$. Se dice que el **punto es elíptico**. Esta situación se representa en la siguiente figura:



Ejemplo 29. Para los puntos de la esfera, tenemos:

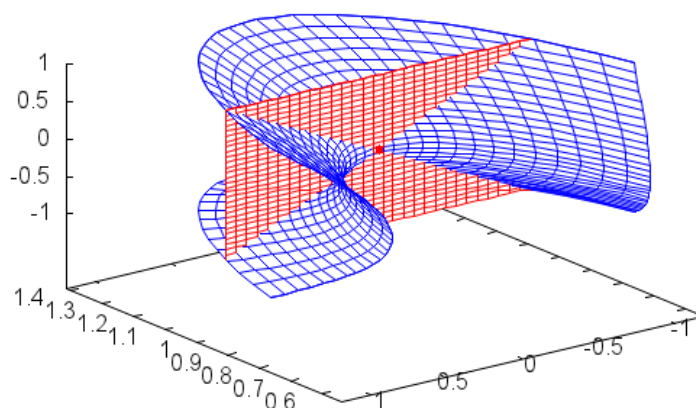
$$eg - f^2 = R^2 \sin^2 \phi - 0 > 0$$

y, por eso, todos los puntos de la esfera son elípticos. ☺

Puede suceder que la segunda forma fundamental sea no definida y no degenerada, es decir, que

$$eg - f^2 < 0.$$

Esto implica que cerca del punto $\mathbf{x}(u_0, v_0)$ la aproximación de $h(u, v)$ cambia de signo, es decir, que hay puntos que están a un lado del plano tangente y puntos que están al otro lado. Estos puntos se llaman **puntos hiperbólicos** y su posición respecto al plano tangente se representa en la siguiente figura:



Ejemplo 30. Vamos a clasificar el punto $(1, 0, 0)$ en la superficie dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = \left(\sqrt{1+u^2} \cos v, \sqrt{1+u^2} \operatorname{sen} v, u \right).$$

Sabemos que $\mathbf{x}(0, 0) = (1, 0, 0)$. Determinamos los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u(u, v) &= \left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \cos v, \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \operatorname{sen} v, 1 \right), & \mathbf{x}_u(0, 0) &= (0, 0, 1), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= \left(-\sqrt{1+u^2} \operatorname{sen} v, \sqrt{1+u^2} \cos v, 0 \right) & \mathbf{x}_v(0, 0) &= (0, 1, 0). \end{aligned}$$

Por eso, el vector $\mathbf{N} = (-1, 0, 0)$ es normal a la superficie en $(1, 0, 0)$. Además:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu}(u, v) &= \left(\frac{\cos v}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{\operatorname{sen} v}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}, 0 \right), & \mathbf{x}_{uu}(0, 0) &= (1, 0, 0), \\ \mathbf{x}_{uv}(u, v) &= \left(-\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \operatorname{sen} v, \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \cos v, 1 \right), & \mathbf{x}_{uv}(0, 0) &= (0, 0, 1), \\ \mathbf{x}_{vv}(u, v) &= \left(-\sqrt{1+u^2} \cos v, -\sqrt{1+u^2} \operatorname{sen} v, 0 \right), & \mathbf{x}_{vv}(0, 0) &= (-1, 0, 0). \end{aligned}$$

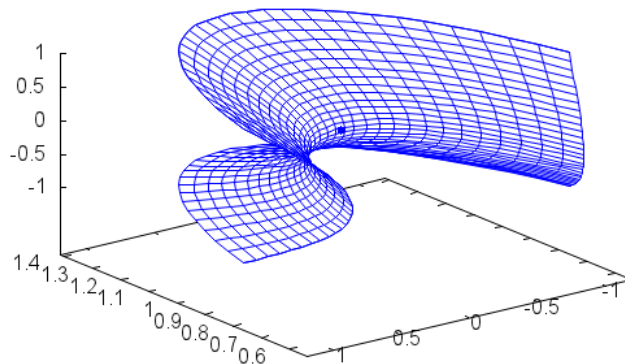
Entonces

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{x}_{uu}(0, 0) \cdot \mathbf{N}(0, 0) = (1, 0, 0) \cdot (-1, 0, 0) = -1, \\ f &= \mathbf{x}_{uv}(0, 0) \cdot \mathbf{N}(0, 0) = (0, 0, 1) \cdot (-1, 0, 0) = 0, \\ g &= \mathbf{x}_{vv}(0, 0) \cdot \mathbf{N}(0, 0) = (-1, 0, 0) \cdot (-1, 0, 0) = 1. \end{aligned}$$

Así:

$$eg - f^2 = -1 < 0$$

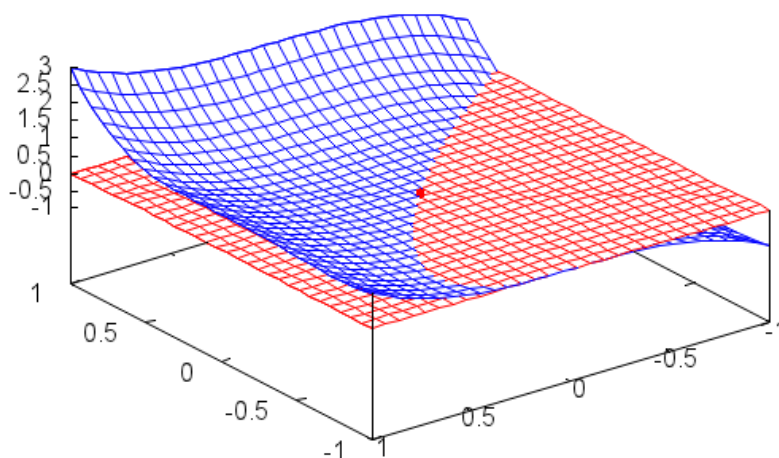
y todos los puntos son hiperbólicos. La gráfica de esta superficie, que se llama hiperboloide, es



Cuando $eg - f^2 = 0$ la segunda forma fundamental es degenerada. Aquí pueden ocurrir dos cosas. Puede ser que la segunda forma fundamental sea nula, es decir,

$$e = f = g = 0$$

y entonces el punto es plano (no implica que la superficie sea un plano). Un **punto plano** se representa en la siguiente figura:



Ejemplo 31. Sea la superficie $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^3 + u^6 + v^4)$ donde $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Vamos a estudiar qué clase de punto es $\mathbf{x}(0, 0)$.

Comenzamos determinando las derivadas parciales de $\mathbf{x}(u, v)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u, v) &= (1, 0, 3u^2 + 6u^5), & \mathbf{x}_u(0, 0) &= (1, 0, 0), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (0, 1, 4v^3), & \mathbf{x}_v(0, 0) &= (0, 1, 0).\end{aligned}$$

El vector normal unitario \mathbf{N} es

$$(1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1).$$

Calculamos ahora las derivadas segundas:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu}(u, v) &= (0, 0, 6u + 30u^4), & \mathbf{x}_{uu}(0, 0) &= (0, 0, 0), \\ \mathbf{x}_{vv}(u, v) &= (0, 0, 12v^2), & \mathbf{x}_{vv}(0, 0) &= (0, 0, 0), \\ \mathbf{x}_{uv}(u, v) &= (0, 0, 0), & \mathbf{x}_{uv}(0, 0) &= (0, 0, 0).\end{aligned}$$

Entonces los coeficientes son:

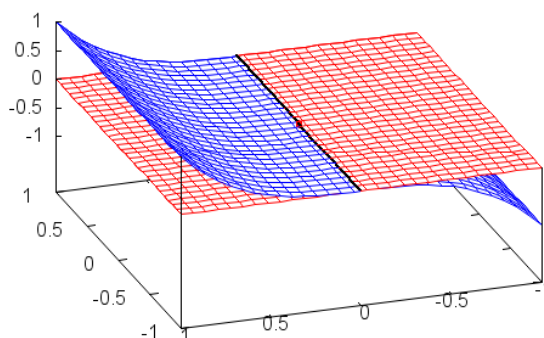
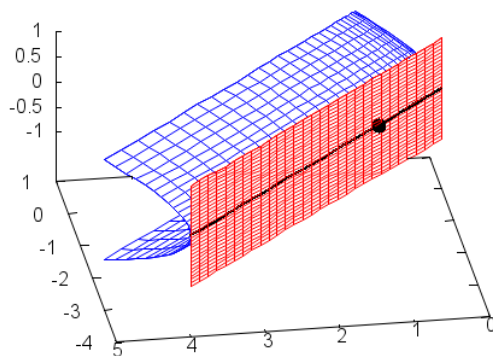
$$\begin{aligned}e &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uu} = (0, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0, \\ f &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{uv} = (0, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0, \\ g &= \mathbf{N} \cdot \mathbf{x}_{vv} = (0, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0.\end{aligned}$$

Entonces

$$eg - f^2 = 0$$

y el punto es plano. ☹

También puede ocurrir que aunque $eg - f^2 = 0$ no sean 0 todos los coeficientes de la segunda forma fundamental, es decir, que la forma cuadrática no sea nula. En ese caso, se dice que el **punto es parabólico**. Que $eg - f^2 = 0$ implica que hay una recta a lo largo de la cual se anula la segunda forma fundamental. Y no se puede asegurar nada sobre la posición del plano tangente, porque los términos de orden superior dominan. La situación se ilustra en las siguientes figuras:



Si tenemos una curva en el espacio dada por $\mathbf{x}(u(t), v(t))$, podemos determinar la altura respecto a un punto de parámetro t_0 . Entonces, repitiendo el proceso anterior, tenemos que $h(t_0) = h'(t_0) = 0$ y que se cumple

$$h(t) = \frac{1}{2} II(u'(t_0), u'(t_0)) (t - t_0)^2 + O((t - t_0)^2).$$

Además, podemos determinar los coeficientes de la segunda forma fundamental a partir de las derivadas del vector normal \mathbf{N} , ya que derivando $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N} = 0$

y $\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0}$, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}) &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}) &= \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v = 0, \\ \frac{\partial}{\partial u} (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}) &= \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}) &= \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v = 0.\end{aligned}$$

De aquí se deduce:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} &= -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u, \\ \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} &= -\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N}_v = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u, \\ \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} &= -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v.\end{aligned}$$

Y entonces se cumple:

$$\begin{aligned}e &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u, \\ f &= \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{N}_v = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u, \\ g &= \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{N} = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v.\end{aligned}$$

Observamos que como la segunda forma fundamental $II(u', v')$ es una forma cuadrática, utilizando lo que conocemos para ellas, podemos contestar a preguntas como ¿en qué dirección varía la función con mayor o menor rapidez? Se contesta en las secciones siguientes.

Curvatura normal y curvatura geodésica

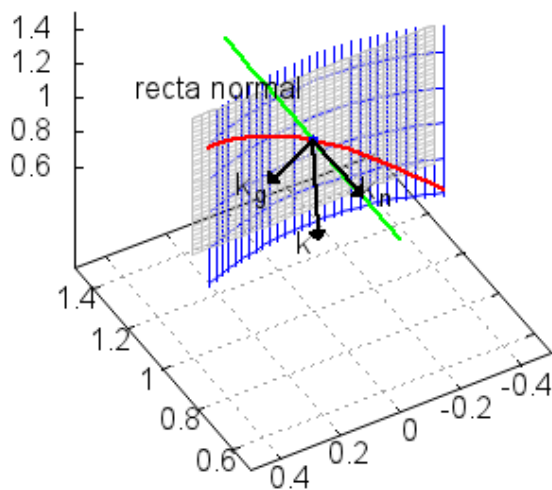
Partimos de una curva C parametrizada por la longitud de arco que está contenida en una superficie, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(u(s), v(s))$. Nótese que la curva $(u(s), v(s))$ no está parametrizada por el arco necesariamente. Como $\mathbf{x}(s)$ está parametrizada por el arco, sabemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(s) &= \mathbf{x}'(s), \\ \|\mathbf{x}'(s)\| &= 1, \\ \mathbf{k}(s) &= \mathbf{x}''(s).\end{aligned}$$

Además, podemos descomponer el vector curvatura $\mathbf{k}(s)$ como suma de dos vectores, uno tangente a la superficie, es decir, contenido en el espacio tangente a la superficie en cada punto dado (que llamaremos $\mathbf{k}_g(s)$) y otro perpendicular a ella, o que está en la recta normal a la superficie, que llamamos $\mathbf{k}_n(s)$:

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{k}_g(s) + \mathbf{k}_n(s).$$

Llamamos **vector curvatura geodésica** de la curva C en el punto $\mathbf{x}(s_0)$ al vector $\mathbf{k}_g(s_0)$ y **vector curvatura normal** de la curva C en el punto $\mathbf{x}(s_0)$ al vector $\mathbf{k}_n(s_0)$. La situación se representa en la siguiente figura:



Podemos calcular $\mathbf{k}_g(s)$ y $\mathbf{k}_n(s)$ a partir del vector normal \mathbf{N} . Observamos que si $\mathbf{N}(s) = \mathbf{N}(u(s), v(s))$, entonces $\mathbf{k}_n(s) = \kappa_n(s) \mathbf{N}(s)$ y:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(s) \cdot \mathbf{N}(s) &= (\mathbf{k}_g(s) + \mathbf{k}_n(s)) \cdot \mathbf{N}(s) \\ &= \mathbf{k}_g(s) \cdot \mathbf{N}(s) + \mathbf{k}_n(s) \cdot \mathbf{N}(s) \\ &= \mathbf{k}_n(s) \cdot \mathbf{N}(s) \\ &= \kappa_n(s) \mathbf{N}(s) \cdot \mathbf{N}(s). \end{aligned}$$

Por esto:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_n(s) &= \kappa_n(s) \mathbf{N}(s) = (\mathbf{x}''(s) \cdot \mathbf{N}(s)) \mathbf{N}(s), \\ \mathbf{k}_g(s) &= \mathbf{x}''(s) - \mathbf{k}_n(s) \\ &= \mathbf{x}''(s) - (\mathbf{x}''(s) \cdot \mathbf{N}(s)) \mathbf{N}(s). \end{aligned}$$

La **curvatura normal** es κ_n .

La **curvatura geodésica** κ_g es el módulo del vector curvatura geodésica.

Ejemplo 32. Sea el cilindro dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Vamos a determinar los vectores curvatura geodésica y curvatura normal en el punto $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 0)$ para la circunferencia dada por $\mathbf{x}(s) = (\cos s, \sin s, 0)$, contenida en él. Encontraremos también su curvatura normal.

Nótese que la ecuación de la curva y de la superficie es denotada como \mathbf{x} . Va a quedar claro a cuál nos referiremos tanto por el contexto como por el número de variables que utilicemos.

Primero determinamos los vectores tangentes y normal al cilindro. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u, v) &= (-\sin u, \cos u, 0), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (0, 0, 1).\end{aligned}$$

El vector normal a la superficie es

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(u, v) &= \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\|} \\ &= \frac{(-\sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1)}{\|(-\sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1)\|} \\ &= (\cos u, \sin u, 0).\end{aligned}$$

Como $(1, 0, 0) = \mathbf{x}(0, 0) = \mathbf{x}(0)$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(0, 0) &= (-\sin 0, \cos 0, 0) = (0, 1, 0), \\ \mathbf{x}_v(0, 0) &= (0, 0, 1), \\ \mathbf{N}(0, 0) &= (\cos 0, \sin 0, 0) = (1, 0, 0).\end{aligned}$$

La circunferencia está parametrizada por la longitud de arco. Entonces, el vector curvatura es la derivada segunda de \mathbf{x} respecto a s . Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(s) &= (-\sin s, \cos s, 0), & \mathbf{x}'(0) &= (0, 1, 0), \\ \mathbf{x}''(s) &= (-\cos s, -\sin s, 0), & \mathbf{x}''(0) &= (-1, 0, 0).\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathbf{k}(0) = \mathbf{x}''(0) = (-1, 0, 0).$$

Ahora lo escribimos a partir de los vectores curvatura geodésica y curvatura normal, $\mathbf{k}(s) = \mathbf{k}_g(s) + \mathbf{k}_n(s)$, que están en los planos tangente a la superficie

y en la recta normal. Como una base del espacio tangente es $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ y una base de la recta normal es $(1, 0, 0)$, tenemos que

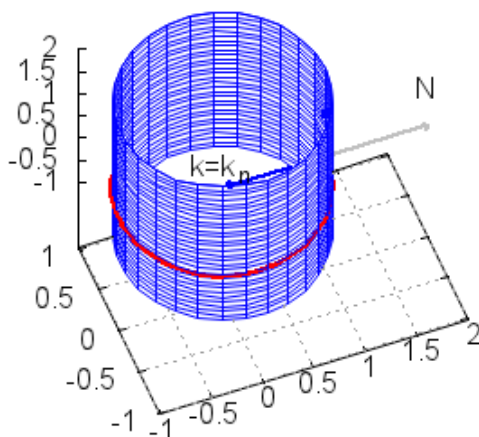
$$\begin{aligned} (-1, 0, 0) &= (0, 0, 0) + (-1, 0, 0) \\ \implies \mathbf{k}_g(s) &= (0, 0, 0), \quad \mathbf{k}_n(s) = (-1, 0, 0) = -1(1, 0, 0). \end{aligned}$$

En este caso, el vector curvatura geodésica es el vector nulo y

$$k(0) = 1 = -\kappa_n.$$

Entonces la curvatura normal vale $\kappa_n = -1$. Sus valores absolutos coinciden. Por otro lado, el plano tangente a la superficie es perpendicular al vector normal a la curva y, el vector tangente a la curva está contenido en él. Por eso, los planos osculador de la curva y tangente a la superficie son perpendiculares.

En la siguiente figura se representan el cilindro, la circunferencia, los vectores curvatura y curvatura normal, que coinciden, en azul y el vector normal a la superficie en gris



Ejemplo 33. Sea la elipse dada por $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, \cos t + \sin t)$, contenida en el cilindro de ecuación

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v).$$

Vamos a encontrar los vectores curvatura geodésica y curvatura normal y la curvatura normal en el punto $\mathbf{x}(0) = (1, 0, 1)$.

Sabemos que $(1, 0, 1) = \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(0, 1)$. Entonces:

$$\mathbf{x}_u(0, 1) = (-\operatorname{sen} 0, \operatorname{cos} 0, 0) = (0, 1, 0),$$

$$\mathbf{x}_v(0, 1) = (0, 0, 1),$$

$$\mathbf{N}(0, 1) = (\operatorname{cos} 0, \operatorname{sen} 0, 0) = (1, 0, 0).$$

Por otro lado, para la elipse tenemos:

$$\mathbf{x}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \operatorname{cos} t, -\operatorname{sen} t + \operatorname{cos} t), \quad \mathbf{x}'(0) = (0, 1, 1),$$

$$\mathbf{x}''(t) = (-\operatorname{cos} t, -\operatorname{sen} t, -\operatorname{cos} t - \operatorname{sen} t), \quad \mathbf{x}''(0) = (-1, 0, -1).$$

Sabemos que el vector $\mathbf{v} = (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0)$ tiene la misma dirección y sentido que el vector normal (y, por tanto, que el vector curvatura) y que el módulo del vector curvatura es

$$k(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3}.$$

Entonces, el vector \mathbf{v} es

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)) \times \mathbf{x}'(0) \\ &= ((0, 1, 1) \times (-1, 0, -1)) \times (0, 1, 1) \\ &= (-1, -1, 1) \times (0, 1, 1) \\ &= (-2, 1, -1). \end{aligned}$$

El vector normal unitario es

$$\mathbf{N}(0) = \frac{(-2, 1, -1)}{\|(-2, 1, -1)\|} = \frac{\sqrt{6}}{6} (-2, 1, -1).$$

Por otro lado, la curvatura es

$$\begin{aligned} k(0) &= \frac{\|\mathbf{x}'(0) \times \mathbf{x}''(0)\|}{\|\mathbf{x}'(0)\|^3} = \frac{\|(0, 1, 1) \times (-1, 0, -1)\|}{\|(0, 1, 1)\|^3} \\ &= \frac{\|(-1, -1, 1)\|}{\sqrt{2}^3} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(0) &= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{6}}{6} (-2, 1, -1) \\ &= \frac{3}{4} (-2, 1, -1). \end{aligned}$$

Lo podemos escribir a partir de los vectores curvatura geodésica y curvatura normal, $\mathbf{k}(s) = \mathbf{k}_g(s) + \mathbf{k}_n(s)$, que están en los planos tangente a la superficie y en la recta normal. Como una base del espacio tangente es $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ y una base de la recta normal es $(1, 0, 0)$, tenemos que

$$\frac{3}{4}(-2, 1, -1) = \frac{3}{4}(0, 1, -1) + \frac{-3}{2}(1, 0, 0),$$

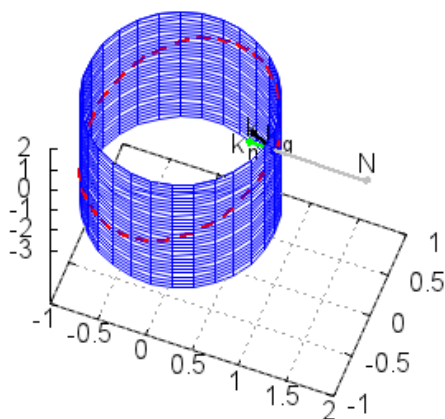
donde

$$\mathbf{k}_g(0) = \frac{3}{4}(0, 1, -1), \quad \mathbf{k}_n(0) = \frac{-3}{2}(1, 0, 0).$$

La curvatura normal es

$$\kappa_n = \frac{-3}{2}.$$

En la siguiente figura se representan el cilindro, la elipse, los vectores curvatura (en azul), curvatura geodésica (en rojo) y curvatura normal (en verde) y normal a la superficie (en gris).



Para determinar los vectores curvatura geodésica y curvatura normal no hemos parametrizado la curva por la longitud del arco, porque obtenemos una integral elíptica, que no tiene solución a partir de funciones elementales.



Detengámonos en la curvatura geodésica. Como una curva es geodésica si y sólo si el vector curvatura es proporcional al vector normal, a partir de

esta definición, observamos que una curva es geodésica si y sólo si su vector curvatura geodésica es el vector nulo.

Estudiemos ahora la curvatura normal. Podemos derivar la igualdad $\mathbf{x}'(s) \cdot \mathbf{N}(s) = 0$ y tenemos:

$$\mathbf{x}''(s) \cdot \mathbf{N}(s) = -\mathbf{x}'(s) \cdot \mathbf{N}'(s) \implies \kappa_n(s) = -\mathbf{x}'(s) \cdot \mathbf{N}'(s).$$

Vamos a obtener \mathbf{N}' . Sabemos que \mathbf{N} y \mathbf{x} dependen de u y v y, por eso, derivando implícitamente respecto a s , resulta:

$$\mathbf{N}' = \mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v', \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \kappa_n(s) &= -\mathbf{x}'(s) \cdot \mathbf{N}'(s) \\ &= -(\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v') \cdot (\mathbf{N}_u u' + \mathbf{N}_v v') \\ &= -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_u u' u' - \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_u u' v' - \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{N}_v v' u' - \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{N}_v v' v' \\ &= e(u')^2 + 2f u' v' + g(v')^2 \\ &= II(u', v'). \end{aligned}$$

Esta expresión es la segunda forma fundamental aplicada al vector unitario del plano tangente (u', v') . Esto significa, que podemos ver la segunda forma fundamental en un vector unitario como la curvatura normal de una curva de la superficie cuyo vector tangente es ese vector unitario.

Si la curva no está parametrizada por la longitud de arco, sustituimos (u', v') por $(u'/\|\mathbf{x}'(t)\|, v'/\|\mathbf{x}'(t)\|)$. Entonces, estas coordenadas ya son las del vector unitario de la curva parametrizada por el arco y tenemos:

$$\begin{aligned} \kappa_n(s) &= e \left(\frac{u'}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \right)^2 + 2f \frac{u'}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \frac{v'}{\|\mathbf{x}'(t)\|} + g \left(\frac{v'}{\|\mathbf{x}'(t)\|} \right)^2 \\ &= \frac{II(u', v')}{\|\mathbf{x}'(t)\|^2} = \frac{II(u', v')}{I(u', v')}. \end{aligned}$$

Ejemplo 34. Los coeficientes de la forma fundamental de una superficie S en un punto P son $E = 2, F = -1, G = 4; e = 1, f = 0, g = 1$. Vamos a determinar la curvatura normal en la dirección $(1, -1)$.

Sabemos que la expresión de la curvatura normal es

$$\begin{aligned} \kappa_n(h, k) &= \frac{II_P(h, k)}{I_P(h, k)} = \frac{eh^2 + 2fhk + gk^2}{Eh^2 + 2Fhk + Gk^2} = \frac{h^2 + k^2}{2h^2 - 2hk + 4k^2} \\ &= \frac{1^2 + (-1)^2}{2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 4(-1)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Obsérvese que se determina la curvatura normal en una dirección, porque la curvatura normal sólo depende de la dirección del vector tangente a la curva.



La expresión de la curvatura normal a partir de las formas fundamentales nos dice que el valor de la curvatura normal es el cociente de las formas fundamentales en el vector $(u'(t), v'(t))$. Por eso, $\kappa_n(t)$ sólo depende de la dirección de este vector o, lo que dicho de otro modo es el siguiente resultado.

Teorema 3 (Teorema de Meusnier). *Todas las curvas de una superficie con la misma dirección tangente tienen la misma curvatura normal.*

Así se puede hablar de curvatura normal según una dirección.

Un resultado interesante es que si el plano tangente a la superficie coincide con el plano osculador de la curva en un punto, la curvatura normal en ese punto cumple $\kappa_n(s) = 0$. Demostremoslo. Partimos de una curva parametrizada por la longitud de arco. Si el plano tangente a la superficie coincide con el plano osculador a la superficie (determinado por $\mathbf{x}' = \mathbf{t}$ y por $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{x}''}{\|\mathbf{x}''\|} = \frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|}$), entonces el vector $\mathbf{k}(s) = \mathbf{k}_g(s) + \mathbf{k}_n(s)$ está en el espacio tangente, lo que significa que

$$\mathbf{k}(s) = \mathbf{k}_g(s), \quad \mathbf{k}_n(s) = \mathbf{0}.$$

Por eso, la curvatura normal cumple

$$\kappa_n(s) = 0.$$

Otro resultado interesante, que nos ayuda a entender geoméricamente el vector curvatura normal, es el siguiente. Si la curvatura normal κ_n de una curva en una superficie y la curvatura k de una curva son iguales en valor absoluto, entonces los planos osculador a la curva y tangente a la superficie son perpendiculares. En efecto, tenemos:

$$\begin{aligned} k(s) &= \|\mathbf{x}''(s)\| \\ &= |\kappa_n(s)| \\ &= |\mathbf{x}''(s) \cdot \mathbf{N}(s)| \\ &= \|\mathbf{x}''(s)\| |\cos \alpha|, \end{aligned}$$

si α es el ángulo que forman $\mathbf{x}''(s)$ y $\mathbf{N}(s)$. Para que se cumpla la igualdad, debe ser $\alpha = 0, \pi$. Esto significa que $\mathbf{x}''(s)$ (o $\mathbf{k}(s)$) y $\mathbf{N}(s)$ tienen la misma dirección. Pero como $\mathbf{x}''(s)$ y $\mathbf{x}'(s)$ determinan el plano osculador a la curva,

entonces $\mathbf{N}(s)$ es paralelo al plano osculador y, por eso, el plano tangente a la superficie (con vector normal $\mathbf{N}(s)$) es perpendicular al plano osculador a la curva en el punto considerado.

Una consecuencia de esto es que la curvatura y la curvatura normal son iguales en cada una de las curvas intersección de la superficie con un plano perpendicular al plano tangente.

Además, todas las curvas de una superficie que pasan por un punto P y que tienen el mismo plano osculador, tienen la misma curvatura k , suponiendo que el plano osculador no coincide con el plano tangente a la superficie en P .

Ejemplo 35. El plano osculador de la circunferencia contenida en un cilindro y que es paralela a su eje es perpendicular al plano tangente al cilindro. Además, la curvatura y la curvatura normal son iguales en valor absoluto, como vimos en un ejemplo anterior.

Por otro lado, si consideramos la hélice de ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$$

contenida en el cilindro de ecuación

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$$

tiene, en el punto $(1, 0, 0) = \mathbf{x}(0)$ los mismos vectores tangente y normal que la circunferencia de ecuación $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$. Por eso, la curvatura va a ser la misma en ambas curvas.



Secciones normales

Una forma de obtener una curva en una superficie es determinarla a partir de la intersección de un plano con la superficie. La razón está en que al añadir la restricción de que los puntos estén en el plano, pasamos de los dos grados de libertad de la superficie a uno.

Ejemplo 36. Vamos a determinar la intersección de la superficie dada por $\mathbf{x}(u, v) = (u, v^2, 2u - v^3)$ con el plano dada por $x + y - z = 2$.

Por la ecuación de la superficie sabemos que:

$$x = u, \quad y = v^2, \quad z = 2u - v^3.$$

Pero como los puntos además están en el plano, tenemos:

$$\begin{aligned} 2u - v^3 = z = x + y - 2 = u + v^2 - 2 \\ \implies u = v^3 + v^2 - 2.. \end{aligned}$$

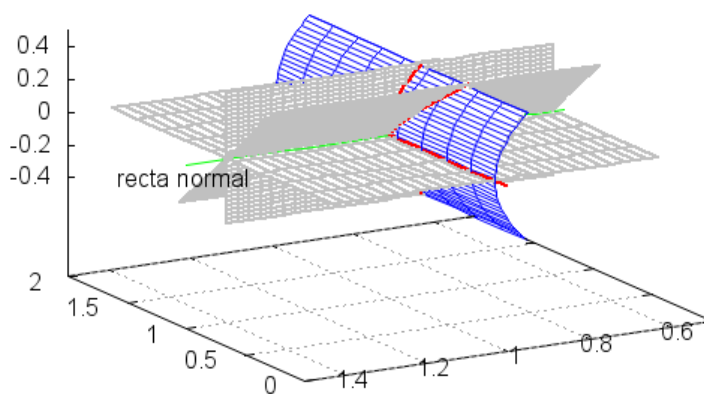
Si llamamos $v = t$, podemos escribir la curva en función de t , ya que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (t^3 + t^2 - 2, t^2, 2(t^3 + t^2 - 2) - t^3) \\ \implies \mathbf{x}(t) &= (t^3 + t^2 - 2, t^2, t^3 + 2t^2 - 4). \end{aligned}$$



Por otro lado, sabemos que todas las curvas de una superficie con una misma recta tangente (o vector tangente) tienen la misma curvatura normal. Dicho de otra forma, si consideramos el plano que contiene a N , el vector normal a la superficie en el punto P , y al vector (v_1, v_2, v_3) , que es tangente a una curva C contenida en la superficie que pasa por el punto P , tenemos un plano normal a la superficie S . La intersección de este plano con la superficie es una curva, y esta curva tiene la misma curvatura normal que C .

Podemos considerar ahora todos los planos normales a la superficie para cada (v_1, v_2, v_3) (es decir, sus vectores directores son N y vector (v_1, v_2, v_3)). Entonces, a partir de este haz de planos tenemos un haz de curvas que resultan de la intersección de los planos con la superficie. Los vectores tangentes a las curvas resultantes tienen todas las direcciones posibles (dadas por (v_1, v_2, v_3)). Estas curvas se llaman **secciones normales**. En la siguiente figura se representa una sección de un cilindro, con la recta normal (en verde), plan



Ejemplo 37. Sea el cilindro dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = (v, \cos u, \sin u).$$

Vamos a determinar las secciones normales en el punto $(1, 1, 0) = \mathbf{x}(0, 1)$.

Primero determinamos los vectores tangentes y normal al cilindro. Tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u(u, v) &= (0, -\operatorname{sen} u, \cos u), \\ \mathbf{x}_v(u, v) &= (1, 0, 0).\end{aligned}$$

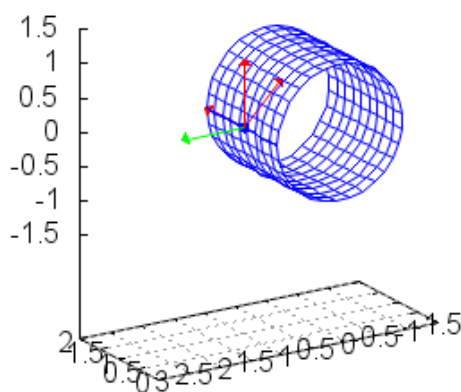
En $(1, 0, 1) = \mathbf{x}(1, 0)$ es

$$\mathbf{x}_u(0, 1) = (0, 0, 1), \quad \mathbf{x}_v(0, 1) = (1, 0, 0).$$

El vector normal a la superficie es

$$\begin{aligned}\mathbf{N}(0, 1) &= \frac{\mathbf{x}_u(0, 1) \times \mathbf{x}_v(0, 1)}{\|\mathbf{x}_u(0, 1) \times \mathbf{x}_v(0, 1)\|} \\ &= \frac{(0, 0, 1) \times (1, 0, 0)}{\|(0, 0, 1) \times (1, 0, 0)\|} \\ &= (0, 1, 0).\end{aligned}$$

Esta superficie es un cilindro cuyo eje es el eje x . Entonces, en el punto



Tenemos que considerar ahora los planos normales al cilindro, es decir, planos que contienen al vector normal en $(1, 1, 0) = \mathbf{x}(0, 1)$, $\mathbf{N}(0, 1) = (0, 1, 0)$. Vamos a tomar como el otro vector director del plano a (v_1, v_2, v_3) ,

suponiendo que sea proporcional al vector tangente a la curva. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $v_1 = 1$, $v_1 = -1$ o $v_1 = 0$. Además, como los vectores tangentes a la curva son perpendiculares al vector normal \mathbf{N} , tenemos que $v_2 = 0$.

Si $v_1 = 0$, la ecuación paramétrica del plano es

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (1, 1, 0) + \lambda(0, 1, 0) + \mu(0, 0, v_3) \\ &= (1, 1 + \lambda, \mu v_3).\end{aligned}$$

Para determinar la intersección de estos planos con la superficie hacemos:

$$(v, \cos u, \operatorname{sen} u) = (1, 1 + \lambda, \mu v_3).$$

Tenemos que $v = 1$ y llamando $u = t$, obtenemos una ecuación de la curva:

$$\mathbf{x}(t) = (1, \cos t, \operatorname{sen} t).$$

Es una circunferencia y es lo que podíamos esperar, ya que el vector tangente que hemos tomado es de la forma $(0, 0, v_3)$, perpendicular al eje del cilindro.

Vamos a suponer ahora que $v_1 = 1$ y el vector tangente que consideramos es $(1, 0, v_3)$. El caso $v_1 = -1$ no daría un vector tangente opuesto al que tiene $v_1 = 1$, y la curva sería la misma, en tal caso obtendríamos otra ecuación de la curva.

La ecuación paramétrica del plano es

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (1, 1, 0) + \lambda(0, 1, 0) + \mu(1, 0, v_3) \\ &= (1 + \mu v_1, 1 + \lambda, \mu v_3).\end{aligned}$$

Para determinar la intersección de estos planos con la superficie hacemos:

$$(v, \cos u, \operatorname{sen} u) = (1 + \mu, 1 + \lambda, \mu v_3).$$

Obsérvese que esto nos da restricciones a los valores de λ y μ , ya que debe ser $-1 \leq 1 + \lambda \leq 1$, $-1 \leq \mu v_3 \leq 1$. Podemos hacer:

$$\begin{aligned}v = 1 + \mu &\implies \mu = v - 1, \\ \operatorname{sen} u = \mu v_3 &= (v - 1) v_3, \\ \cos u &= \pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u} = \pm \sqrt{1 - (v - 1)^2 v_3^2}.\end{aligned}$$

Si llamamos $v = t$, tenemos la ecuación de la curva:

$$\mathbf{x}(t) = \left(t, \sqrt{1 - v_3^2 (t - 1)^2}, (t - 1) v_3 \right),$$

porque como el punto $(1, 1, 0)$ corresponde a un valor del coseno positivo, podemos considerar sólo los valores positivos de la raíz cuadrada.

Pero, además, obtenemos un vector tangente a la curva en $(1, 1, 0) = \mathbf{x}(1)$:

$$\mathbf{x}'(t) = \left(1, -(t-1)v_3^2 \frac{1}{\sqrt{1-v_3^2(t-1)^2}}, v_3 \right),$$

$$\mathbf{x}'(1) = (1, 0, v_3),$$

Obsérvese que si $v_3 = 0$, tenemos una recta, de ecuación

$$\mathbf{x}(t) = (t, 1, 0).$$

Es la recta paralela al eje del cilindro.

En la figura 37 se han representado además, en rojo, algunos vectores tangentes.

En la figura 5.8 se representan las secciones normales en $(1, 1, 0)$ del cilindro de este ejemplo tomando $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$ y $(-1, 0, 1)$ como vector (v_1, v_2, v_3) . ☹

Podemos considerar que las secciones normales (es decir, las curvas resultantes de la intersección de los planos normales en un punto P con la superficie) es una familia de curvas. Y no es complicado determinar la curvatura de cada una de las curvas de la familia en el punto base P . Para cada curva, el vector curvatura \mathbf{k} es perpendicular al vector tangente a la curva. Y además, como las curvas son planas, \mathbf{k} debe estar en el plano normal correspondiente. Esto significa que el vector curvatura geodésica en P es nulo, o que

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_n = \kappa_n \mathbf{N}.$$

Por lo tanto, la curvatura de la sección normal $\|\mathbf{k}\| = k$ coincide con el valor absoluto de la curvatura normal $|\kappa_n|$. Obsérvese que aunque la curva sea plana la consideramos como curva espacial y hemos tomado su curvatura positiva siempre. Podríamos haber considerado una orientación en el plano para considerar que la curvatura k tiene signo, como vimos con curvas planas, pero para simplificar no lo vamos a hacer.

Ejemplo 38. Tenemos el cilindro dado por

$$\mathbf{x}(u, v) = (v, \cos u, \sin u).$$

Vamos a determinar la curvatura en las secciones normales en el punto $(1, 1, 0) = \mathbf{x}(0, 1)$.

Sabemos que en $(1, 1, 0)$ el vector normal a la superficie es

$$\mathbf{N}(0, 1) = (0, 1, 0).$$

Si el otro vector director del plano normal es $(0, 0, v_3)$ entonces una ecuación de la sección normal es:

$$\mathbf{x}(t) = (1, \cos t, \operatorname{sen} t).$$

En este caso, como la curva está parametrizada por la longitud de arco, el vector curvatura $\mathbf{k}(t)$ es la derivada segunda

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{x}''(t) = (0, -\cos t, -\operatorname{sen} t).$$

Particularizando en $\mathbf{x}(0) = (1, 1, 0)$, tenemos:

$$\mathbf{k}(0) = (0, -1, 0) = -\mathbf{N}(0, 1).$$

Entonces, la curvatura normal es -1 .

Estudiamos el otro caso, cuando el otro vector director del plano normal es $(1, 0, v_3)$. Entonces la ecuación de la sección normal es:

$$\mathbf{x}(t) = \left(t, \sqrt{1 - v_3^2 (t-1)^2}, (t-1)v_3 \right).$$

$$\mathbf{x}'(t) = \left(1, -(t-1)v_3^2 \frac{1}{\sqrt{1 - v_3^2 (t-1)^2}}, v_3 \right),$$

$$\mathbf{x}'(1) = (1, 0, v_3) = (1, 0, v_3),$$

$$\mathbf{x}''(t) = \left(0, -v_3^2 \frac{1}{\sqrt{1 - v_3^2 (t-1)^2}} - v_3^4 \frac{(t-1)^2}{\left(\sqrt{1 - v_3^2 (t-1)^2}\right)^3}, 0 \right),$$

$$\mathbf{x}''(1) = (0, -v_3^2, 0).$$

Sabemos que un vector en la dirección y sentido del vector curvatura es el vector

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)) \times \mathbf{x}'(1) \\ &= ((1, 0, v_3) \times (0, -v_3^2, 0)) \times (1, 0, v_3) \\ &= (v_3^3, 0, -v_3^2) \times (1, 0, v_3) = (0, -v_3^2 - v_3^4, 0), \end{aligned}$$

que tiene la misma dirección y sentido que $(0, -1, 0)$. Además, la curvatura es

$$\begin{aligned} k(1) &= \frac{\|\mathbf{x}'(1) \times \mathbf{x}''(1)\|}{\|\mathbf{x}'(1)\|^3} = \frac{\|(v_3^3, 0, -v_3^2)\|}{\|(1, 0, v_3)\|^3} \\ &= \frac{v_3^2 \sqrt{1+v_3^2}}{(v_3^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{v_3^2}{(v_3^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Entonces, el vector curvatura es

$$\mathbf{k}(1) = \frac{v_3^2}{(v_3^2+1)^2} (0, -1, 0).$$

Observamos que entonces

$$\kappa_n = -\frac{v_3^2}{(v_3^2+1)^2} = k.$$

Si recorremos la curva en sentido contrario, es decir, si tomamos como ecuación de la curva a

$$\mathbf{x}(t) = \left(t, \sqrt{1 - v_3^2 (t-1)^2}, (1-t)v_3 \right),$$

entonces ambos coeficientes coinciden. 

Direcciones principales y curvaturas principales

Hemos visto que la segunda forma fundamental es una forma cuadrática definida para los vectores del plano tangente a una superficie en un punto P . Llamamos c a la circunferencia de centro P y radio 1 que está contenida en el plano tangente. Suponemos que la superficie está dada por $\mathbf{x}(u, v)$. Entonces, la restricción de la segunda forma fundamental a la circunferencia:

$$II_{(u,v)}|_c : c \rightarrow \mathbb{R}$$

es una función definida sobre un conjunto de \mathbb{R}^3 que está acotado y es cerrado. por eso, en este conjunto alcanza un máximo y un mínimo. Suponemos que alcanza el máximo en el vector unitario $\mathbf{e}_1 \in c$. Entonces, existe un vector \mathbf{e}_2 de tal forma que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una base ortonormal.

Vamos a expresar la segunda forma fundamental en esta base, $II_{(u,v)}(\mathbf{x}')$, si \mathbf{x}' es un vector del espacio tangente a la superficie dada por \mathbf{x} en el punto $\mathbf{x}(u, v)$. Como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una base del espacio tangente, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2, \\ II_{(u,v)}(\mathbf{x}') &= II_{(u,v)}(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \\ &= \alpha \cos^2\theta + 2\beta \cos\theta \sin\theta + \gamma \sin^2\theta.\end{aligned}$$

para un ángulo θ y para unos coeficientes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Consideramos ahora, para los parámetros $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, la función dependiente de θ :

$$f(\theta) = \alpha \cos^2\theta + 2\beta \cos\theta \sin\theta + \gamma \sin^2\theta.$$

Sabemos que esta función, definida para $\theta \in [0, 2\pi]$, es continua y derivable y por tanto, alcanza en este conjunto un máximo y un mínimo, que están entre los puntos donde $f'(\theta) = 0$. Además, como el máximo se alcanza en $\mathbf{x}' = \mathbf{e}_1$, o $\theta = 0$, entonces tenemos:

$$\begin{aligned}f'(\theta) &= -2\alpha \cos\theta \sin\theta + 2\beta(-\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 2\gamma \sin\theta \cos\theta, \\ f'(0) &= 2\beta = 0.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$II_{(u,v)}(\mathbf{x}') = \alpha x^2 + \gamma y^2.$$

Esto significa que la matriz que da la segunda forma cuadrática, expresada en esta base, es diagonal. Pero vamos a ir más allá y a seguir utilizando que en \mathbf{e}_1 se alcanza un máximo absoluto. Esto significa que

$$\alpha = II_{(u,v)}(\mathbf{e}_1) \geq II_{(u,v)}(\mathbf{e}_2) = \gamma.$$

Quedándonos con $\alpha \geq \gamma$, tenemos entonces que se cumple:

$$\alpha(x^2 + y^2) \geq \alpha x^2 + \gamma y^2 \geq \gamma(x^2 + y^2)$$

y para $\mathbf{x}' \in c$ (o $x^2 + y^2 = 1$), resulta

$$\alpha \geq \alpha x^2 + \gamma y^2 = II_{(u,v)}(\mathbf{x}') \geq \gamma.$$

Por tanto, la segunda forma fundamental alcanza el mínimo absoluto de c en \mathbf{e}_2 , que es la dirección ortogonal a la dirección en la que alcanza el máximo absoluto.

Si $\alpha = \gamma$, entonces la segunda forma fundamental es constante en la circunferencia unidad c . Pero si $\alpha \neq \gamma$, entonces los extremos absolutos sólo se alcanzan en \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 .

Recordamos que la segunda forma fundamental aplicada a un vector unitario del espacio tangente (es decir, a $\mathbf{x}' \in c$) coincide con la curvatura normal de una curva con ese vector tangente. Entonces, vemos que la curvatura normal en un punto de una superficie o es constante o alcanza un máximo y un mínimo absoluto.

Las direcciones en las que la curvatura normal alcanza el máximo y el mínimo absoluto se llaman **direcciones principales** y los valores de la curvatura en estas direcciones se llaman **curvaturas principales**. Es habitual denotar como κ_1 y κ_2 a los valores máximos y mínimo de la curvatura.

Si la segunda forma fundamental en un punto $\mathbf{x}(u, v)$ es constante en todos los vectores de la circunferencia unidad c , entonces las curvaturas principales son constantes ($\kappa_1 = \kappa_2$) y no existen direcciones principales. En ese caso, se dice que el punto $\mathbf{x}(u, v)$ es un **punto umbilical**.

Volvamos a la segunda forma fundamental. Sabemos que en la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una matriz diagonal de la forma

$$\begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, su determinante es

$$K = \kappa_1 \kappa_2,$$

que se llama **curvatura de Gauss**. En el apartado 6.4 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014, se da una interpretación geométrica a esta curvatura.

Su traza es la **curvatura media**:

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Más adelante veremos la interpretación geométrica de estos dos importantes parámetros.

Ahora vamos a encontrar cómo determinar las direcciones principales y las curvaturas principales de una superficie.

Tenemos que $\mathbf{x}' = u'\mathbf{x}_u + v'\mathbf{x}_v$ es una dirección del plano tangente. Buscando la dirección para la que la curvatura normal es máxima, es decir, la dirección que maximiza

$$\kappa_n = \frac{II(u', v')}{I(u', v')} = \frac{e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2}{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}.$$

Vamos a suponer que ni \mathbf{x}_u ni \mathbf{x}_v son direcciones principales y que no estamos en un punto umbilical. Llamando $m = \frac{u'}{v'}$, resulta:

$$\kappa_n = \frac{e \left(\frac{u'}{v'}\right)^2 + 2f \frac{u'}{v'} + g}{E \left(\frac{u'}{v'}\right)^2 + 2F \frac{u'}{v'} + G} = \frac{em^2 + 2fm + g}{Em^2 + 2Fm + G}.$$

De nuevo, debe ser

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\kappa_n(m)}{dm} = 2 \frac{(em + f)(E + 2Fm + Gm^2) - (Em + F)(e + 2fm + gm^2)}{(E + 2Fm + Gm^2)^2} \\ &= 2 \frac{em + f}{E + 2Fm + Gm^2} - 2 \frac{(Em + F)\kappa_n}{E + 2Fm + Gm^2}. \end{aligned}$$

Por esto, se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} 0 &= em + f - (Em + F)\kappa_n \\ \implies 0 &= eu' + fv' - (Eu' + Fv')\kappa_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Si hacemos lo mismo, pero con $m = \frac{v'}{u'}$, tenemos:

$$\kappa_n(m) = \frac{e + 2f \frac{v'}{u'} + g \left(\frac{v'}{u'}\right)^2}{E + 2F \frac{v'}{u'} + G \left(\frac{v'}{u'}\right)^2} = \frac{e + 2fm + gm^2}{E + 2Fm + Gm^2}.$$

Entonces, en la dirección principal, al alcanzarse un extremo, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\kappa_n(m)}{dm} = \frac{(2f + 2gm)(E + 2Fm + Gm^2) - (2F + 2Gm)(e + 2fm + gm^2)}{(E + 2Fm + Gm^2)^2} \\ &= 2 \frac{f + gm}{E + 2Fm + Gm^2} - 2 \frac{(F + Gm)\kappa_n}{E + 2Fm + Gm^2} \\ \implies 0 &= fu' + gv' - (Fu' + Gv')\kappa_n. \end{aligned} \quad (6)$$

Ahora tenemos dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, que escribimos de forma matricial, para tener:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} - \kappa_n \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \\ &= (II - \kappa_n I) \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Como la primera forma fundamental cumple que su determinante es distinto de 0, podemos hacer

$$II \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \kappa_n I \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \iff I^{-1} II \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \kappa_n \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Esto significa que (u', v') es un autovector de $I^{-1}II$, con autovalor κ_n . Observamos que las curvaturas principales son los autovalores de

$$I^{-1}II = k\mathbf{Id} \iff II = kI \iff II - kI = \mathbf{0}.$$

Por eso, buscamos k tal que

$$\begin{aligned} 0 = \det(II - kI) &= \det\left(\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\right) \\ &= k^2(EG - F^2) - (Eg - 2Ff + Ge)k - f^2 + eg. \end{aligned} \quad (8)$$

Esta ecuación se llama **ecuación de las curvaturas principales**.

Observemos de nuevo la ecuación 7: si las dos formas fundamentales son proporcionales, entonces $\kappa_1 = \kappa_2$ y el punto es umbilical. Si el punto es plano, entonces la segunda forma fundamental es nula, y $\kappa_n = 0$ en cualquier dirección, por lo que $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$.

Ejemplo 39. La ecuación de un plano es $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{a} + \mathbf{b}u + \mathbf{c}v$, con $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ constantes. Entonces

$$\mathbf{x}_{uu} = \mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vv} = \mathbf{0},$$

y entonces

$$e = f = g = 0.$$

Por eso, $\kappa_n = 0$ y todos los puntos son umbílicos. ☹

Ejemplo 40. Vamos a determinar las curvaturas principales de un punto de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio R , dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (R \cos \theta \sen \phi, R \sen \theta \sen \phi, R \cos \phi),$$

para $\theta \in (0, 2\pi), \phi \in (0, \pi)$.

La ecuación de las curvaturas principales es:

$$\begin{aligned} (EG - F^2)k^2 - (Eg + Ge - 2Ff)k + (eg - f^2) &= 0 \iff \\ R^4 \sen^2 \phi k^2 + 2R^3 \sen^2 \phi k + R^2 \sen^2 \phi &= 0. \end{aligned}$$

Es una ecuación de segundo grado, por lo que su solución es:

$$k = \frac{-2R^3 \operatorname{sen}^2 \phi \pm \sqrt{(2R^3 \operatorname{sen}^2 \phi)^2 - 4R^4 \operatorname{sen}^2 \phi R^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}{2R^4 \operatorname{sen}^2 \phi}$$

$$= \frac{-2R^3 \operatorname{sen}^2 \phi}{2R^4 \operatorname{sen}^2 \phi} = -\frac{1}{R}.$$

Entonces la esfera tiene única curvatura principal:

$$\kappa_1 = -\frac{1}{R}$$

y todas las direcciones son principales. Observamos que las formas fundamentales son proporcionales, la curvatura normal es constante y todos los puntos son umbilicales. ☺

Volvamos a la ecuación 8. Sabemos que $EG - F^2 = \det(I) \neq 0$ y, entonces, podemos buscar las soluciones de:

$$k^2 - \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}k + \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0.$$

Analizamos esta ecuación de segundo grado. Sabemos que si tiene dos soluciones reales, κ_1 y κ_2 , entonces se cumple que

$$\frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2} = \kappa_1 + \kappa_2 \implies H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)},$$

$$\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \kappa_1 \kappa_2 \implies K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}.$$

Hemos encontrado una expresión de las curvatura de Gauss y media a partir de los coeficientes de las formas fundamentales.

Ejemplo 41. Vamos a determinar la curvatura de Gauss y la curvatura media de la esfera.

Tenemos que la curvatura normal es constante y vale $\kappa_1 = -\frac{1}{R}$. Entonces la curvatura de Gauss K y la curvatura normal H son:

$$K = \left(-\frac{1}{R}\right)\left(-\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R^2},$$

$$H = -\frac{1}{R}.$$

☺

Nos queda por saber cómo calcular las direcciones principales. Sabemos que son los autovectores de las direcciones principales, es decir, son los vectores (u', v') para los que

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \kappa_i \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix},$$

para $i = 1, 2$. Como nos interesa la dirección, vamos a suponer que es de la forma (h, mh) , con $h = u', m = \frac{v'}{u'}$, supuesto $u' \neq 0$. Esta restricción no supone ninguna restricción, ya que las dos direcciones principales son ortogonales y, entonces, al menos una de las coordenadas u', v' es distinta de 0.

Esta condición es equivalente a:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} &= \kappa_i \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \iff \\ \begin{pmatrix} e + fm \\ f + gm \end{pmatrix} &= \kappa_i \begin{pmatrix} E + Fm \\ F + Gm \end{pmatrix} \iff \\ &\begin{cases} e + fm = \kappa_i (E + Fm), \\ f + gm = \kappa_i (F + Gm). \end{cases} \end{aligned}$$

Recordamos que queremos calcular el valor de m , y a ser posible, sin tener que determinar antes κ_i . por eso, hacemos:

$$\kappa_i = \frac{e + fm}{E + Fm} = \frac{f + gm}{F + Gm}.$$

A partir de la última igualdad, tenemos:

$$\begin{aligned} (e + fm)(F + Gm) &= (f + gm)(E + Fm) \iff \\ (fG - gF)m^2 + (eG - gE)m + eF - fE &= 0. \end{aligned}$$

Se puede escribir en forma del determinante:

$$\begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0,$$

que es la **ecuación de las direcciones principales**.

Ejemplo 42. Vamos a determinar las direcciones principales en el punto $(1, 0, 1)$ de la superficie dada por la ecuación $z^2 = x^2 - y^2$.

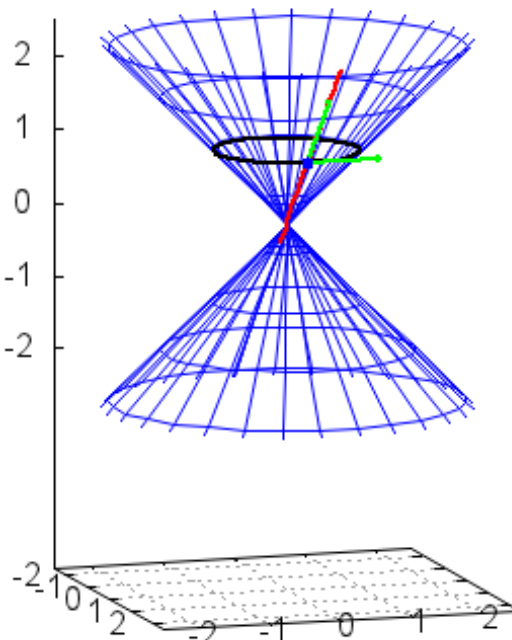
La superficie es un cono. En un entorno de $(1, 0, 1)$ la superficie está dada por la ecuación $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 - v^2})$. Entonces (se hace en los ejercicios), los coeficientes de las formas fundamentales en $(1, 0, 1)$ son:

$$\begin{aligned} E &= 2, & F &= 0, & G &= 1, \\ e &= 0, & f &= 0, & g &= -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

La dirección (h, hm) es principal si verifica la ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \\ &= -m\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Por tanto, una dirección principal es $(1, 0)$. La otra dirección principal es perpendicular a ella y es la dirección $(0, 1)$. En la siguiente figura se representan (en verde) estas direcciones principales, que son las direcciones, por ejemplo, de una circunferencia y una recta.



Líneas de curvatura y líneas asintóticas

El último ejemplo muestra un cono y las direcciones principales en él en el punto $(1, 0, 1)$. En la figura, hemos representado una circunferencia, cuya tangente en este punto coincide con una de las direcciones principales. Puede haber otras curvas que tengan esta dirección en $(1, 0, 1)$. Sin embargo, la circunferencia cumple que en cada uno de sus puntos, el vector tangente coincide con la dirección principal. En este apartado, nos vamos a ocupar de curvas con esta propiedad. Estas curvas se llaman **líneas de curvatura**.

Suponemos que no tenemos puntos umbilicales. Para determinar la ecuación de las líneas de curvatura en P , partimos de las ecuaciones de las direcciones principales, 5 y 6. Si despejamos κ_n en ambas igualdades e igualamos los valores que obtenemos, resulta:

$$\frac{eu' + fv'}{Eu' + Fv'} = \frac{fu' + gv'}{Fu' + Gv'}.$$

Operando llegamos a

$$(eu' + fv')(Fu' + Gv') = (fu' + gv')(Eu' + Fv') \implies \\ eF(u')^2 + eGu'v' + fFu'v' + fG(v')^2 = fE(u')^2 + fFu'v' + gEv'u' + gF(v')^2.$$

Esto es lo mismo que escribir

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)dudv + (fG - gF)(dv)^2 = 0.$$

Es la **ecuación diferencial de las líneas de curvatura** y su solución es una línea de curvatura. Por cada punto no umbilical pasan dos líneas de curvaturas que son, obviamente, ortogonales.

Ejemplo 43. Vamos a determinar las líneas de curvatura en el punto $(1, 0, 1)$ de la superficie dada por la ecuación $z^2 = x^2 - y^2$.

Como ya vimos, es un cono y cerca de $(1, 0, 1)$ la superficie está dada por la ecuación $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 - v^2})$ y los coeficientes de las formas fundamentales en $(1, 0, 1)$ son:

$$E = 2, \quad F = 0, \quad G = 1, \\ e = 0, \quad f = 0, \quad g = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La ecuación diferencial de las líneas de curvatura es:

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)dudv + (fG - gF)(dv)^2 = 0 \iff \\ \frac{1}{\sqrt{2}}2dudv = 0.$$

Esto es lo mismo que $dudv = 0$ y entonces debe ser

$$du = 0 \text{ o } dv = 0.$$

Si $du = 0$, entonces $u = c \in \mathbb{R}$. Como la curva pasa por $(1, 0, 1) = \mathbf{x}(1, 0)$, se cumple $u = 1$ y la ecuación de la línea de curvatura es

$$\mathbf{x}(t) = \left(1, t, \sqrt{1^2 - t^2}\right).$$

Es la ecuación de una circunferencia.

La condición $dv = 0$ implica que debe ser constante v . Como en este punto $v = 0$, la ecuación de la línea de curvatura es

$$\mathbf{x}(t) = (u, 0, u),$$

que es una recta.

Las líneas de curvatura son las curvas representadas en la figura 42. ☹

Hay otro tipo de direcciones destacadas. En un punto P de una superficie una **dirección asintótica** es aquella en donde la curvatura normal en el punto es 0. Una **línea asintótica** es una curva contenida en una superficie si la curvatura normal de cada punto es 0. Observamos que podemos asegurar que hay direcciones asintóticas, para puntos no umbilicales, si la curvatura de Gauss es negativa,. En ese caso:

$$K = \kappa_1 \kappa_2 < 0 \implies \kappa_1 < 0 < \kappa_2.$$

Entonces, hay dos direcciones perpendiculares donde la curvatura normal tiene distinto signo, en particular, entre dos vectores que llamamos \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 que forma un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes. Entonces, en un vector (u', v') que forma un ángulo menor que $\frac{\pi}{2}$ radianes con los anteriores, se anula la segunda forma fundamental, porque

$$\kappa_n = \frac{II(u', v')}{I(u', v')} = \frac{e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2}{E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2}.$$

Pero la segunda forma fundamental, también se anula en un vector que forma un ángulo menor de $\frac{\pi}{2}$ radianes con \mathbf{u}_2 y $-\mathbf{u}_1$. Es decir, hay dos direcciones independientes donde se anula la segunda forma fundamental.

La segunda forma fundamental nos da una ecuación diferencial cuya solución son las líneas asintóticas, y que se llama **ecuación diferencial de las líneas asintóticas**:

$$e(du)^2 + 2fdudv + g(dv)^2 = 0.$$

Ejemplo 44. Vamos a determinar las líneas asintóticas, si las hay, en el punto $(1, 0, 1)$ de la superficie dada por la ecuación $z^2 = x^2 - y^2$.

Sabemos que cerca de $(1, 0, 1)$ la superficie está dada por la ecuación $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 - v^2})$ y los coeficientes de las formas fundamentales en $(1, 0, 1)$ son:

$$\begin{aligned} E &= 2, & F &= 0, & G &= 1, \\ e &= 0, & f &= 0, & g &= -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial de las líneas asintóticas es:

$$\begin{aligned} e(du)^2 + 2fdudv + g(dv)^2 &= 0 \iff \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(dv)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Para que se cumpla, debe ser:

$$dv = 0 \implies v = c$$

para constantes c . Como se busca la línea asintótica que pasa por $(1, 0, 1) = \mathbf{x}(1, 0)$, se cumple $v = 0$ y la ecuación de la línea de curvatura es

$$\mathbf{x}(t) = (t, 0, t).$$

Es la ecuación de una recta, y coincide con una línea de curvatura. ☹

Vamos a terminar relacionando las direcciones asintóticas con el tipo de punto que tenemos. Observando la ecuación diferencial de las líneas asintóticas, vemos que se puede reescribir como

$$e\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2f\frac{du}{dv} + g = 0.$$

Ahora consideramos la ecuación de segundo $ex^2 + 2fx + g = 0$. A partir del signo del discriminante de esta ecuación, sabemos que la ecuación tiene dos soluciones si $f^2 - eg > 0$, una solución si $f^2 - eg = 0$ y ninguna si $f^2 - eg < 0$. Lo mismo ocurre para la ecuación diferencial.

En un punto elíptico, la segunda forma fundamental está definida positiva y la curvatura normal nunca es 0. por eso, no hay líneas asintóticas. La ecuación diferencial no tiene solución.

Si un punto es hiperbólico, la forma cuadrática es definida negativa, es decir, $eg - f^2 < 0$. Entonces la ecuación diferencial de las líneas asintóticas se puede descomponer en dos ecuaciones de la forma

$$Adu + Bdv = 0, \quad Cdu + Ddv = 0$$

y hay dos direcciones asintóticas.

En un punto parabólico, $eg - f^2 = 0$. Por ese punto pasa una única dirección asintótica. Su ecuación se reduce a

$$(Adu + Bdv)^2 = 0.$$

Si el punto es plano, entonces $e = f = g = 0$ y todas las direcciones son asintóticas.

Ejemplo 45. Sabemos, por un ejemplo anterior, que el punto $\mathbf{x}(0,0) = (1,0,0)$ es hiperbólico en la superficie dada por la parametrización

$$\mathbf{x}(u, v) = (\sqrt{1+u^2} \cos v, \sqrt{1+u^2} \operatorname{sen} v, u).$$

Además, sabemos que

$$e = \mathbf{x}_{uu}(0,0) \cdot \mathbf{N}(0,0) = (1,0,0) \cdot (1,0,0) = 1,$$

$$f = \mathbf{x}_{uv}(0,0) \cdot \mathbf{N}(0,0) = (0,0,1) \cdot (1,0,0) = 0,$$

$$g = \mathbf{x}_{vv}(0,0) \cdot \mathbf{N}(0,0) = (-1,0,0) \cdot (1,0,0) = -1.$$

Vamos a determinar las direcciones asintóticas. La ecuación diferencial es:

$$(du)^2 - g(dv)^2 = 0.$$

Podemos escribirla como

$$(du - dv)(du + dv) = 0.$$

Tenemos pues dos ecuaciones diferenciales:

$$du - dv = 0,$$

$$du + dv = 0.$$

Las soluciones son:

$$u = v + c_1,$$

$$u = -v + c_2.$$

Como se cumple $u = v = 0$, la dirección de las líneas asintóticas es:

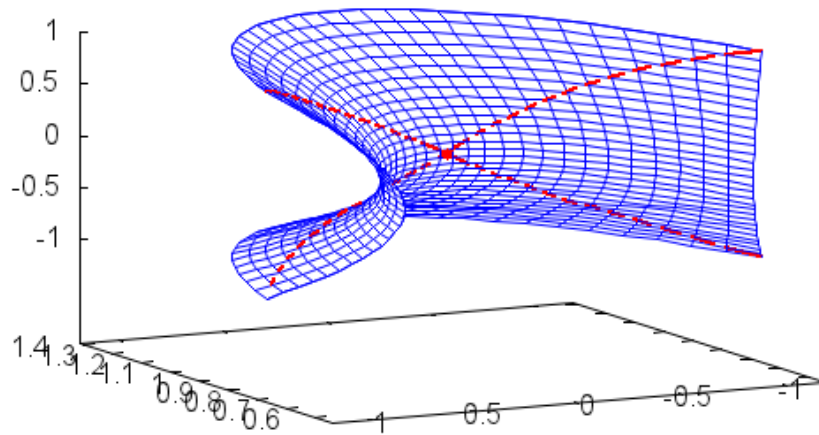
$$u = v, u = -v.$$

Las curvas resultantes son:

$$\mathbf{x}(t) = (\sqrt{1+u^2} \cos t, \sqrt{1+t^2} \operatorname{sen} t, t),$$

$$\mathbf{x}(t) = (\sqrt{1+u^2} \cos t, -\sqrt{1+t^2} \operatorname{sen} t, t).$$

Se representan en la siguiente gráfica en rojo.



5.9. Teorema egregio de Gauss

Se debe estudiar en el apartado 6.5 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés, enero 2014.

Bibliografía

- [1] Costa, A. F. ; Gamboa, J. M. ; 1997. Notas de Geometría diferencial de curvas y superficies. Ed. Sanz y Torres.
- [2] Do Carmo, M.P., 1995. Geometría Diferencial de Curvas y Superficies, Alianza Editorial, Madrid.
- [3] Farin, G., 2002. Curves and Surfaces for CAGD. 5a ed. Academic Press, San Diego.
- [4] Rodríguez Marín, L. 2008. Ampliación de Cálculo, primera parte. 3^o Edición. Ed. UNED.
- [5] Struik, D. J. ; 1973. Geometría diferencial clásica, Aguilar, Madrid.
- [6] Valdés, A.; 2014. Notas de Geometría diferencial con aplicaciones. Consultado el 29 de junio de 2014 en <http://www.mat.ucm.es/aval-des/GDA.pdf>, difundido bajo una licencia Creative Commons.