Apuntes de Complementos Matemáticos de la Ingeniería Industrial

Ejercicios del tema 2. Inicio al estudio de curvas.

26 de julio de 2020

Departamento de Matemática Aplicada I. UNED

Índice general

1. Ejemplos de curvas.

1. **Ejercicio 18 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Escríbase una curva parametrizada que recorra una recta pero a velocidad no constante. Dibújese, usando `Maxima`.

   Solución. Puede ser, por ejemplo

   $$x = 1 + \cos t,$$
   $$y = -1 + 3\cos t$$

   Se representa con `wxplot2d([['parametric, 1+cos(t), -1+3*cos(t), [t, -6, 6], [nticks, 300]]], [x,-5,5], [gnuplot_preamble, "set size ratio 1; set zeroaxis;"])$`

2. **Ejercicio 19 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Demuéstrese que los puntos de una curva están contenidos en una recta, es decir, satisfacen una ecuación lineal del tipo $ax + by + c = 0$, si y sólo si su velocidad $\mathbf{v}(t)$ es de la forma $\mathbf{v}(t) = f(t)\mathbf{v}_0$ para alguna función diferenciable $f(t)$ y un vector constante $\mathbf{v}_0$.

3. **Ejercicio 36 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Demuéstrese que las afinidades preservan la razón simple, es decir, si f es una afinidad y $\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y}$ son puntos alineados, entonces

   $$(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y}) = (f(\mathbf{x}), f(\mathbf{p}), f(\mathbf{y})).$$

   Nota: Si $\mathbf{x}, \mathbf{p}$ y $\mathbf{y}$ son puntos alineados y $\mathbf{p}$ está en el segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, entonces existen λ, μ, con $\lambda + \mu = 1$, $\lambda, \mu \geq 0$, de tal forma que

   $$\mathbf{p} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}.$$

   Se puede escribir

   $$\mathbf{p} = \mathbf{x} + \mu\overrightarrow{\mathbf{xy}},$$

   o

   $$\overrightarrow{\mathbf{xp}} = \mu\overrightarrow{\mathbf{xy}} = \mu\left(\overrightarrow{\mathbf{xp}} + \overrightarrow{\mathbf{py}}\right) \iff \overrightarrow{\mathbf{xp}} - \mu\overrightarrow{\mathbf{xp}} = \mu\overrightarrow{\mathbf{py}}$$
   $$\iff \lambda\overrightarrow{\mathbf{xp}} = \mu\overrightarrow{\mathbf{py}} \iff \overrightarrow{\mathbf{xp}} = \frac{\mu}{\lambda}\overrightarrow{\mathbf{py}},$$

suponiendo que $\mathbf{p}$ sea distinto de $\mathbf{y}$, o que $\lambda \neq 0$. Este número $\frac{\mu}{\lambda}$ se llama razón simple de los puntos y se denota como $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y})$.

Solución.

Vamos a demostrar que la afinidad conserva la razón simple, es decir que si r es la razón simple $(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{y})$, entonces también es $(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{p}), f(\mathbf{y}))$. Como podemos escribir

$$\mathbf{p} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, \text{ para } \lambda + \mu = 1, \lambda, \mu \geq 0,$$

entonces $r = \frac{\mu}{\lambda}$. Además,

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b},\ \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{b},\ \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}.$$

Entonces:

$$\mathbf{f}(\mathbf{p}) = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{b} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) + (\lambda + \mu)\mathbf{b} = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}),$$

y por eso, la razón simple

$$(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{p}), f(\mathbf{y})) = \frac{\mu}{\lambda}.$$

4. **Ejercicio 38 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Demuéstrese con un ejemplo que las afinidades no preservan ni distancias, ni ángulos, ni áreas.

Solución. Tomamos la afinidad

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y los puntos $\mathbf{x} = (1,1), \mathbf{y} = (1,0)$ y $\mathbf{z} = (0,2)$. En ese caso, llamamos $\mathbf{u} = \overrightarrow{\mathbf{xy}} = (0,-1)$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathbf{xz}} = (-1,1)$. Los tres puntos forman un triángulo de área $\frac{1}{2}$.

Entonces:

$$f(1,1) = (1,-1),\ f(1,0) = (0,1),\ f(0,2) = (1,-3).$$

Se cumple

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) &= \sqrt{(0-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}, \\
d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{z})) &= \sqrt{(1-1)^2 + (-3-(-1))^2} = 2 \neq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \\
\overrightarrow{\mathbf{xy}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{xz}} &= (0,-1) \cdot (-1,1) = -1, \\
\overrightarrow{f(\mathbf{x})f(\mathbf{y})} \cdot \overrightarrow{f(\mathbf{x})f(\mathbf{z})} &= (-1,2) \cdot (0,2) = 4 \neq \overrightarrow{\mathbf{xy}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{xz}}.
\end{aligned}$$

El área del triángulo, si $\mathbf{n} = (-2, 0)$ es un vector perpendicular a $\overrightarrow{f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{z})}$ y de su mismo módulo

$$S\left(f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{y})\, f(\mathbf{z})\right) = \frac{1}{2}\left|\, \overrightarrow{f(\mathbf{x})\, f(\mathbf{y})} \cdot \mathbf{n}\right| = 1 \neq \frac{1}{2} = S(\mathbf{xyz}).$$

Explicamos este cálculo: si tenemos un triángulo cuyos lados son los vectores $\backepsilon,$ con inicio en el origen. Entonces su área es $\frac{1}{2}|\backepsilon|\cdot||\cdot|\operatorname{sen}(\alpha)|$, si α es el ángulo que forman $\backepsilon,$. Pero este seno en valor absoluto es igual al coseno en valor absoluto del ángulo $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Entonces, si tenemos un vector perpendicular a , con su mismo módulo, que llamamos $'$, resulta:

$$\frac{1}{2}|\backepsilon|\cdot||\cdot|\operatorname{sen}(\alpha)| = \frac{1}{2}|\backepsilon|\cdot||\cdot|\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)| = \frac{1}{2}|\backepsilon|\cdot|'|\cdot|\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)| = \backepsilon\cdot$$

que es el producto escalar que aparece en los apuntes.

5. **Adaptado del Ejercicio 41 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Prográmese en `Maxima` una animación que dibuje el segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ y, dada una razón simple r dibuje el punto correspondiente $\mathbf{p}$ y los segmentos $[\mathbf{x}, \mathbf{p}]$y $[\mathbf{p}, \mathbf{y}]$. Prográmese una animación que dibuje el punto $\mathbf{p}$ según va variando la razón simple.

   Solución. En el documento Ejercicios-resueltos-con-Maxima-tema2.

6. **Ejercicio 42.** Prográmese en `Maxima` una función que dibuje el segmento $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ y, dado un escalar λ dibuje el punto correspondiente $\mathbf{p} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, \lambda + \mu = 1$.

   Solución. En el documento Ejercicios-resueltos-con-Maxima-tema2.

7. **Adaptado del Ejercicio 46 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.** Impleméntese, usando `Maxima`, el algoritmo de Jarvis.

   Solución. En el documento Ejercicios-resueltos-con-Maxima-tema2.

8. Considermos curvas polinómicas dadas por los punto $\mathbf{v}_i$, para $i = 0, \ldots n$ y cualquier transformación afín $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, donde A es una matriz $(n+1) \times (n+1)$ y $\mathbf{b}$ es un vector de dimensión $n+1$. Encuéntrense las curvas para las que la curva transformada mediante una afinidad coincida con la curva asociada al polígono transformado.

En general, se cumple que

$$f(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=0}^{n} f(\mathbf{v}_i)\, t^i \iff \sum_{i=0}^{n} \mathbf{A}\mathbf{v}_i t^i + \mathbf{b} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{A}\mathbf{v}_i t^i + \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b} t^i$$
$$\iff \mathbf{b} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b} t^i,$$

para todo t. Esto sólo es cierto cuando $n = 0$, es decir, cuando la curva es un punto.

Realice los ejercicios 11 a 17 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.

Realice los ejercicios 19 a 23 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.

2. Curvas de Bézier

Realice el ejercicio 43 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.

Realice los ejercicios 47 a 66 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.

3. Curva regular

1. Estudie si la curva $\mathbf{x} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{x}(t) = (t, t^3, \cos t)$ tiene todos sus puntos regulares.

   Solución. Sí, porque $\mathbf{x}'(t) \neq (0, 0, 0)$ para todo t :

   $$\mathbf{x}'(t) = \left(1, 3t^2, -\operatorname{sen} t\right) \neq (0, 0, 0)\,.$$

2. Sea la curva $\mathbf{x} : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{x}(t) = (t, t^3, t^2)$. Estudie si la siguientes opciones son correctas.

   a. Todos sus puntos son regulares.

   b. El vector tangente a la curva en un punto $\mathbf{x}(t_0)$ puede ser perpendicular al plano xy.

   Solución. La opción **a**. es correcta, porque $\mathbf{x}'(t) = (1, 3t^2, t) \neq (0, 0, 0)$.

   La opción **b** no es correcta, porque esta condición significa que

   $$\frac{\mathbf{x}'(t)}{\mathbf{x}'(t)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 9t^4 + t^2}} \left(1, 3t^2, t\right)$$

vale $(0,0,k)$ y esto no ocurre para ningún valor de t.

3. Determine los puntos múltiples de la curva regular dada por las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = t\cos t, \quad y(t) = t \operatorname{sen} t$$

Solución: Estudiamos cuándo es $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ sobreyectiva para encontrar los puntos múltiples. Lo dividimos en 2 casos:

a) Si $x(t) = t\cos t = 0$, pero $t \neq 0$. Esto ocurre cuando $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$. Observamos que

$$\begin{aligned} y\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) &= \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \\ y\left(-\frac{\pi}{2} - k\pi\right) &= \left(-\frac{\pi}{2} - k\pi\right) \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2} - k\pi\right) \\ &= (-1)^{-k+1}(-1)\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ &= (-1)^{-k}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = y\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right). \end{aligned}$$

Por eso, estos puntos son múiltiples.

b) Vamos a intentar determinar otros puntos múltiples suponiendo que los hay, encontrando así los valores de t (si es que existen). Si $x(t) = t\cos t \neq 0$ pero $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t')$ entonces debe ser:

$$\begin{aligned} t\cos t &= t'\cos t', \\ t \operatorname{sen} t &= t' \operatorname{sen} t'. \end{aligned}$$

Como $t \neq 0$, entonces

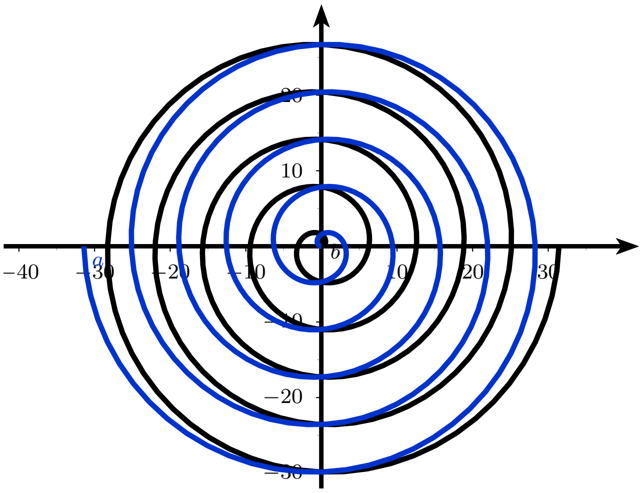
$$\begin{aligned} &\operatorname{sen} t = \frac{t'}{t}\operatorname{sen} t', \quad \cos t = \frac{t'}{t}\cos t' \\ &\quad \Longrightarrow 1 = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 \operatorname{sen}^2 t' + \left(\frac{t'}{t}\right)^2 \cos^2 t' = \left(\frac{t'}{t}\right)^2 \\ &\quad \Longrightarrow \left(\frac{t'}{t}\right)^2 = 1 \Longrightarrow t' = \pm t. \end{aligned}$$

Si $t' = -t$, entonces

$$x(t') = t'\cos t' = -t\cos(-t) = -t\cos t \neq x(t)$$

si $x(t) = t\cos t \neq 0$. Podemos afirmar que no hay más puntos múltiples.

En la siguiente figura se ha representado esta curva, en azul para $t \in [-10, 0]$ y en negro para $t \in [0, 10]$.



4. Señale el ángulo que forman los vectores tangentes a la curva $\mathbf{x}(t) = (2t, 3t^3, 3t^2)$ con el vector $(1, 1, 0)$.

   Solución. El vector tangente a la curva tiene la misma dirección y sentido que

$$\mathbf{x}'(t) = \left(2, 9t^2, 6t\right).$$

   Podemos calcular el ángulo que forman dos vectores a partir del producto escalar

$$\cos\theta = \frac{(2, 9t^2, 6t) \cdot (1, 1, 0)}{\sqrt{2}\sqrt{2^2 + 9^2t^4 + 6^2t^2}} \frac{2 + 9t^2}{\sqrt{2}\sqrt{4 + 81t^2 + 36t^4}} = \frac{2 + 9t^2}{\sqrt{2}\sqrt{(2 + 9t^2)^2}}$$

$$= \frac{2 + 9t^2}{\sqrt{2}\,(2 + 9t^2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

   Entonces

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

5. Sea C la la curva dada por

$$x = \lambda^3 - \lambda, y = \lambda^4 - 1, z = \operatorname{sen}^2 \pi\lambda.$$

   para $\lambda \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Se pide estudiar si $(0, 0, 0)$ es un punto múltiple.

   Solución. Para que sea punto múltiple debe ser

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

para dos valores distintos de λ. Buscamos si existen estos valores en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned}
x &= \lambda^3 - \lambda = 0 &\iff& \quad \lambda\left(\lambda^2 - 1\right) = 0 &\iff& \quad \lambda = \pm 1, \lambda = 0,\\
y &= \lambda^4 - 1 = 0 &\iff& \quad \lambda^2 = 1 &\iff& \quad \lambda = \pm 1,\\
z &= \operatorname{sen}^2 \pi\lambda = 0 &\iff& \quad \operatorname{sen}^2 \pi\lambda = 0 &\iff& \quad \lambda = \pm 1.
\end{aligned}$$

Como $\lambda = -1$ y $\lambda = 1$, que están en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y los dos hacen que $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, entonces este punto es múltiple de multiplicidad 2.

6. Sea C la curva dada por la representación paramétrica $(I, \mathbf{x})$, para $I = (-10, 10)$ y
$$\mathbf{x}(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, -t).$$
Encuentre una representación paramétrica natural de esta curva.

Solución. Una representación paramétrica $\mathbf{x}(t)$ es natural si su parámetro es la longitud de arco, es decir, si $1 = \|\mathbf{x}'(s)\|$ o si la longitud de arco entre 0 y s es:
$$s = \int_0^s \|\mathbf{x}'(s)\|\, ds.$$
En esta curva tenemos:
$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'(t) &= (-4\operatorname{sen} t, 4\cos t, -1),\\
\|\mathbf{x}'(t)\| &= \sqrt{(-4\operatorname{sen} t)^2 + (4\cos t)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}.
\end{aligned}$$
Por eso, la longitud de arco es:
$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt = \int_0^t \sqrt{17} dt = \sqrt{17} t.$$
Si hacemos el cambio de parámetro $t = \frac{s}{\sqrt{17}}$, la curva queda con la representación natural:
$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(t) = \left(4\cos\frac{s}{\sqrt{17}}, 4\operatorname{sen}\frac{s}{\sqrt{17}}, -\frac{s}{\sqrt{17}}\right).$$

7. Consideramos la curva dada por la trayectoria de un punto de una circunferencia de radio 1 que rueda sobre otra circunferencia de radio 1 (cardioide). Calcule la longitud de un arco de cardioide entre 0 t t_0 sabiendo que está dado por las ecuaciones
$$\mathbf{x}(t) = (2\cos t - \cos 2t, 2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$$

para $t \in (0, 2\pi)$. ¿Cuál es la longitud del cardioide?

Solución: Como $\mathbf{x}'(t) = (-2 \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen} 2t, 2\cos t - 2\cos 2t)$, tenemos que la longitud entre 0 y t_0 será:

$$\begin{aligned}
I(t_0) &= \int_0^{t_0} \sqrt{(-2 \operatorname{sen} t + 2 \operatorname{sen} 2t)^2 + (2\cos t - 2\cos 2t)^2} dt \\
&= \int_0^{t_0} \sqrt{4 \operatorname{sen}^2 t - 8 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t + 4 \operatorname{sen}^2 2t + 4\cos^2 t - 8\cos t \cos 2t + 4\cos^2 2t} dt \\
&= \int_0^{t_0} 2\sqrt{2 - 2 \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t - 2\cos t \cos 2t} dt = 2\int_0^{t_0} \sqrt{2 - 2\cos t} dt \\
&= 2\int_0^{t_0} 2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} dt = 8 - 8\cos \frac{1}{2} t_0.
\end{aligned}$$

La longitud del cardioide es:

$$I(2\pi) = 8 - 8\cos\pi = 16.$$

Realice los ejercicios 76, 78, 79, 80, 81, 85, 86, 91, 92, 99, 100 y 101 del documento Notas de Geometría Diferencial con aplicaciones de Antonio Valdés.