$$\left(\overline{u}_1,\overline{u}_2\right)+\left(\overline{v}_1,\overline{v}_2\right)=\left(\overline{u}_1+\overline{v}_1,\overline{u}_2+\overline{v}_2\right);\ \forall\overline{u}_1,\overline{v}_1\in E;\ \ \forall\overline{u}_2,\overline{v}_2\in F$$

$$\lambda\left(\overline{u},\overline{v}\right)=\left(\lambda\overline{u},\lambda\overline{v}\right);\ \forall\lambda\in K;\ \forall\overline{u}\in E;\ \forall\overline{v}\in F$$

Dicho espacio vectorial se denomina espacio vectorial producto de E y F .

Siendo $\left\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n\right\}$ una base de E y $\left\{\overline{w}_1,\overline{w}_2,\ldots,\overline{w}_m\right\}$ una base de F , la dimensión $E\times F$ es $n+m$ y una base de $E\times F$ puede ser:

$$\left\{(\overline{e}_1,0),(\overline{e}_2,0),\ldots,(\overline{e}_n,0),(0,\overline{w}_1),(0,\overline{w}_2),\ldots,(0,\overline{w}_m)\right\}$$

8. APLICACIONES LINEALES

8.1. Aplicación Lineal

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K y $f:E \longrightarrow F$ una aplicación.

f es una aplicación lineal si verifica:

$$f\left(\overline{x}+\overline{y}\right)=f\left(\overline{x}\right)+f\left(\overline{y}\right),\forall\ \overline{x},\overline{y}\in E$$

$$f\left(\lambda\overline{x}\right)=\lambda f\left(\overline{x}\right),\ \forall\lambda\in K,\ \forall\ \overline{x}\in E$$

8.2. Propiedad

f es un homomorfismo o aplicación lineal si y sólo si:

$$f\left(\lambda\overline{x}+\mu\overline{y}\right)=\lambda f\left(\overline{x}\right)+\mu f\left(\overline{y}\right),\ \forall\lambda,\mu\in K,\ \forall\overline{x},\overline{y}\in E$$

8.3. Propiedades de las Aplicaciones Lineales

Sea $f: E \longrightarrow F$ una aplicación lineal entre los espacios vectoriales E y F, entonces:

$f\left(\overline{0}\right) = \overline{0}$

$\forall \overline{x} \in E,\ f(-\overline{x}) = -f(\overline{x})$

Si V es un espacio vectorial de E, entonces $f(V)$ es un subespacio vectorial de F. En particular, $f(E)$ recibe el nombre de subespacio imagen de f. Se suele denotar por $Im(f)$.

Si S es un sistema de generadores de un subespacio vectorial V de E, entonces $f(S)$ es un sistema de generadores del subespacio vectorial $f(V)$. Por lo tanto, f es sobreyectiva si y sólo si, la imagen de una base B de E, $f(B)$, es un sistema generador de F.

Si V es un subespacio de F, $f^{-1}(V)$ es un subespacio de E.

9. NOMENCLATURA

Sea $f: E \longrightarrow F$ un homomorfismo:

Si $E = F$, a f se le denomina endomorfismo.

Si f es inyectivo, se denomina monomorfismo.

Si f es biyectivo recibe el nombre de isomorfismo

Un endomorfismo biyectivo se llama automorfismo.

9.1. Núcleo

Se llama núcleo de una aplicación lineal f, designándose $Ker(f)$ ó $N(f)$, al siguiente subconjunto de E:

$Ker(f)=\left\{\overline{x}\in E\ /\ f(\overline{x})=\overline{0}\right\}$.

9.2. Propiedades del Núcleo

Las principales propiedades del núcleo son las siguientes:

$Ker(f)$ es un subespacio vectorial de E.

f es un homomorfismo inyectivo si y sólo si $Ker(f)=\left\{\overline{0}\right\}$

$Ker(f)=\left\{\overline{0}\right\}$ si y sólo si la imagen de cualquier sistema libre de E es un sistema libre de F.

9.3. Propiedad.

Si la restricción de f a un subespacio V de E es inyectivo y S es un sistema libre de V entonces $f(S)$ es un sistema libre del subespacio $f(V)\subset F$.

9.4. Rango de una aplicación lineal

Una aplicación lineal queda determinada conociendo las imágenes de los vectores de una base de E.

Si $B=\left\{\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n\right\}$ es una base de E y conocemos $\left\{f(\overline{e}_1), f(\overline{e}_2),\ldots, f(\overline{e}_n)\right\}$, vectores de F, la imagen de cualquier vector $\overline{x}$ de coordenadas $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ en la base B será:

$f(\overline{x}) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \; f(\overline{e}_i).$

IMPORTANTE: Podría parecer que no siempre se expresa el homomorfismo por medio de las imágenes de una base, pero dicha información siempre se puede obtener y esto será de utilidad para enlazar homomorfismos y matrices como veremos a continuación.

10. MATRIZ ASOCIADA A UNA APLICACIÓN LINEAL

Sean E y F dos espacios vectoriales de dimensiones n y m, $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n\}$ una base de E, $B'_F = \{\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_m\}$ una base de F.

Sea $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{e}_i$, $\quad f(\overline{x}) \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \; f(\overline{e}_i) \overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{m} y_j \overline{u}_j$. Si:

$$\left.\begin{array}{lllll} f(\overline{e}_1) = & a_{11}\overline{u}_1 & +a_{21}\overline{u}_2 & +\ldots+ & a_{m1}\overline{u}_m \\ f(\overline{e}_2) = & a_{12}\overline{u}_1 & +a_{22}\overline{u}_2 & +\ldots+ & a_{m2}\overline{u}_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f(\overline{e}_n) = & a_{1n}\overline{u}_1 & +a_{2n}\overline{u}_2 & +\ldots+ & a_{mn}\overline{u}_m \end{array}\right\}.$$

(1) Por las propiedades de aplicación lineal.

(2) Ya que $f(\overline{x})$ es un vector de F se podrá poner como combinación lineal de la base B'_F.

Se tiene que: $\overline{y} = P\overline{x}$, siendo:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde:

$\overline{y}$ es la matriz columna que representa las coordenadas de $f(\overline{x})$ en la base $B_F^{'}$;

$\overline{x}$ es la matriz columna que representa las coordenadas de $\overline{x}$ en la base B;

P es la matriz del homomorfismo en las bases B y $B_F^{'}$ (o con respecto a las bases B y $B_F^{'}$).

Las columnas de la matriz A son las coordenadas de los vectores $f(\overline{e}_i)$, $i=1,2,\ldots,n$ respecto de la base $B_F^{'}$. P es una matriz de orden $m\times n$.

Fijadas las bases B y $B_F^{'}$, la matriz del homomorfismo es única.

NOTA: Si utilizamos matrices fila para las componentes de $\overline{x}$ y de $f(\overline{x})$, la matriz del homomorfismo sería la traspuesta de la obtenida anteriormente.

11. OPERACIONES CON HOMOMORFISMOS Y SUS MATRICES ASOCIADAS.

Sean E y F dos espacios vectoriales, B una base de E, $B^{'}$ una base de F. Sean f y g dos homomorfismos de E en F, siendo sus matrices sociadas (respecto a las bases B y $B^{'}$), A y C respectivamente.

Al homomorfismo $f+g:E \longrightarrow F$ definido por:

$(f+g)\left(\overline{x}\right)=f\left(\overline{x}\right)+g\left(\overline{x}\right),\ \forall\overline{x}\in E$,

le corresponde la matriz $A+C$.

Al homomorfismo $\lambda \cdot f : E \longrightarrow F$,(producto escalar), definido por:

$$\left(\lambda \cdot f\right)\left(\overline{x}\right) = \lambda \ f\left(\overline{x}\right), \ \forall \overline{x} \in E,$$

le corresponde la matriz λA.

Con estas dos operaciones, el conjunto de homomorfismos entre los espacios vectoriales E y F, denotado por $L(E,F)$, tiene estructura de espacio vectorial, isomorfo al espacio vectorial de las matrices $M_{m\times n}$.

Por tanto, la dimensión del espacio $L(E,F)$ es $m \cdot n$.

NOTA: Fijada una matriz $A \in M_{m\times n}$, siempre es posible encontrar una base B_E en E y una base B_F en F, respecto de las cuales la matriz asociada a la aplicación linea $f : E \longrightarrow F$ es A.

Sean E un espacio vectorial de dimensión n y B una base de E, F un espacio vectorial de dimensión m y B_F una base de F, y G un espacio vectorial de dimensión p y B_G una base de G.

Se consideran las aplicaciones lineales siguientes: $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ y sean A la matriz asociada a f, y C la matriz asociada a g, en las bases dadas. Entonces la aplicación compuesta $g \circ f : E \longrightarrow G$, definida por $\left(g \circ f\right)\left(\overline{x}\right) = g\left[f\left(\overline{x}\right)\right]$, tiene como matriz asociada a $C \cdot A$, en las bases B_E y B_G.

Si un homomorfismo $f : E \longrightarrow E$, de matriz asociada A, tiene inverso, la matriz asociada a $f^{-1} : E \longrightarrow E$ es A^{-1}.

12. CAMBIOS DE BASES

Al efectuarse cambios de base en E, en F o en ambos, la matriz del homomorfismo queda modificada obteniéndose la nueva matriz por medio de las fórmulas del cambio de base.

Si tenemos una aplicación lineal $f : E \longrightarrow F$ de matriz asociada A respecto a una base B_E en E y una base B_F en F, veamos cómo queda la matriz asociada a la aplicación lineal si en E considero una nueva base $B_E^{'}$ y en F una nueva base $B_F^{'}$.

Sea P la matriz cambio de base de $B_E^{'}$ en B_E en el espacio E.

Sea Q la matriz cambio de base de $B_F^{'}$ en B_F en el espacio F.

Tenemos entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E_{B_E} & \xrightarrow{A} & F_{B_F} \\ P\uparrow & & \downarrow Q^{-1} \\ E_{B'_E} & \xrightarrow{A'} & F_{B'_F} \end{array}$$

Se cumple que: $A' = Q^{-1}AP$

Si sólo se realizara el cambio de base en el espacio vectorial E, tendríamos:

$$\begin{array}{ccc} E_{B_E} & \xrightarrow{A} & F_{B_F} \\ P\uparrow & & \downarrow \mathbf{I} \\ E_{B'_E} & \xrightarrow{A'} & F_{B_F} \end{array}$$

En este caso se cumple que: $A' = AP$

Si sólo se realizara el cambio de base en el espacio vectorial F, tendríamos:

$$\begin{array}{ccc} E_{B_E} & \xrightarrow{A} & F_{B_F} \\ \mathbf{I}\uparrow & & \downarrow Q^{-1} \\ E_{B_E} & \xrightarrow{A'} & F_{B'_F} \end{array}$$

En este caso se cumple que: $A' = Q^{-1}A$.