AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS
E.D.O. lineales de primer orden

1.- Halla la curva que pasa por el punto $(0,2)$ y cuya tangente en cualquier de sus puntos tiene pendiente igual a la ordenada del punto aumentada en tres unidades.

2.- DESCENSO DEL PARACAIDISTA. Admitiendo que la resistencia que el aire opone a un paracaidista es función exclusiva de la velocidad v; y teniendo en cuenta que una aproximación razonable de dicha fuerza de rozamiento es Kv^2, donde K es una constante, halla la ley que regula el descenso del paracaidista. (**Indicación:** la Segunda Ley de Newton asegura que la resultante (o suma) de las fuerzas de un sistema es igual al producto de la masa por la aceleración del mismo; $\overrightarrow{F}(t) = m\overrightarrow{x}''(t)$).

3.- Un gamberro dió una patada a un cochecito de niño que estaba parado en una acera a 5m de la calzada. El cochecito salió disparado hacia la calzada con una velocidad de 2m/sg. en defensa del crío salió una fuerza de rozamiento igual a -Km donde $K = 1/3$ y m es la masa del cochecito. Sabiendo que en la calzada había un intenso tráfico ¿se salvo el niño? ¿Por qué la situación que plantea el problema no es real?

4.- La presencia de cierta toxina en un cierto medio destruye una variadad de bacterias a una velocidad que es directamente proporcional al producto del número de bacterias presentes y a la cantidad de toxina. Si no hubiese presencia de toxina, las bacterias podrían crecer a una velocidad proporcional al número de ellas en cada momento. Se supone que la cantidad de toxina se incrementa de forma constante y que la producción toxina enpezo en el momento inicial. Si $y(t)$ denota el número de bacterias en cada instante t,
a) encuentra la ecuación diferenial de primer orden para la cuál $y(t)$ es una solución.
b) resuelve la ecuación. ¿ Qué sucede cuando $t \to \infty$?

5.-VARIABLES SEPARADAS. a) Integra las ecuaciones:
1) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ 2) $\frac{dy}{dx} = y - y^2$ 3) $\frac{dy}{dx} = y^2 senx$
4) $(1+e^t)x(t)x'(t) = e^t$ 5) $y' = 2y^2 - 2y$

b) Resuelve los siguientes problemas de valor inicial y de frontera.
I) $\frac{dy}{dt} = 2y^2 - 2y,\ y(0) = 2$ II) $\frac{dy}{dt} = (1-2t)y^2,\ y(0) = -\frac{1}{6}$
III) $y' = y^2 \operatorname{sen} x,\ y(0) = \frac{1}{2}$ IV) $y'x^3 \operatorname{sen} y = 2,\ \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \dfrac{\pi}{3}.$

6.- E.D.O. lineales de primer orden. a) Integra las ecuaciones:
1)$\frac{dy}{dx} + 2y = x$ 2) $\frac{dy}{dx} + 2y = \cos x$ 3) $\frac{dy}{dx} - 3y = -2e^{-2x}$ 4) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3-2y}{x}$
5) $x' + 5x = t^2$ 6) $tx' + \frac{t}{1+t^2} = x$

b) Resuelve los siguientes problemas de valor inicial.
I) $\frac{dy}{dt} = 2y,\ y(0) = 4$ II) $\frac{dy}{dt} - 3y = -2e^{-2t},\ y(0) = 5$ III) $\frac{dy}{dt} = 3y + \cos t,\ y(\pi) = 4$
IV) $x' = (\tan t)x + \cos t,\ x(0) = 1$ V) $x' + 2tx = t^3,\ x(0) = 1$

7.- Se sabe que la población de una ciudad crece a tasa constante. Si la población se ha doblado en 3 años, y en 5 años ha alcanzado la cifra de 40.000 habitantes ¿ cuántas personas vivían en la ciudad al comienzo de ese periodo de cinco años?

(*)8.- a) Si f_1 y f_2 son dos soluciones de la ecuación $y' + p(x)y = 0$, prueba que $c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$ también es solución de la ecuación para todo par $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

b) Si f es solución de la ecuación $y' + p(x)y = g(x)$, prueba que $f(x) + c_1f_1(x) + c_2f_2(x)$ también es solución para todo par $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.