AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

Anillos y cuerpos. Polinomios y cuerpos finitos I

1.- Indica si los siguientes conjuntos tienen estructura de anillo, indicando en su caso si son conmutativos, unitarios, íntegros o cuerpos.

(a) Los enteros positivos.

(b) Los enteros múltiplos de 7.

(c) $\{0, 1, -1, i, -i\}$.

(d) $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

(e) $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)$.

(f) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3 \times 2\mathbb{Z}$.

(g) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(h) El conjunto de polinomios $\{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}[x]$.

2.- Prueba que un subconjunto B no vacío de un anillo A es un *subanillo* si para todo $b, b' \in B$ se tiene $b - b' \in B$ y $bb' \in B$. Además, prueba que B es un *ideal* de A si para todos $b, b' \in B$, $a \in A$, se tiene que $b - b'$, ab y ba pertenecen a B.

3.- Prueba que el conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ es un subanillo de $\mathbb{Z}_{10}$. ¿Es A un ideal de $\mathbb{Z}_{10}$? Calcula la tabla de A para el producto y estudia si A tiene un elemento neutro para el producto. ¿Es A un cuerpo?

4.- Muestra que el conjunto $B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ es un subanillo de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Prueba que el conjunto I de matrices de la forma $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es un ideal de B. ¿Es I un ideal de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

5.- Un elemento b de un anillo B es **divisor de cero** si $b \neq 0$ y existe $0 \neq a \in B$ tal que $ab = 0$. Decimos que $a \in B$ es **nilpontente** si $a \neq 0$ y existe un entero $n > 1$ tal que $a^n = 0$. Prueba que si a es nilpontente, entonces es divisor de cero.

(a) Consideramos el anillo B del ejercicio 4. Prueba que todo elemento no nulo en el ideal I del ejercicio 4 es nilpotente.

(b) Halla los elementos nilpotentes del anillo $\mathbb{Z}_{12}$.

6.- Muestra que el conjunto B de matrices de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ es un subanillo unitario de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Sea $f : B \to \mathbb{C}$ la aplicación definida por $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mapsto a + bi$. Prueba que f es un isomorfismo de anillos. Deduce que B es un cuerpo.

7.- Calcula el cociente y el resto de dividir:

(a) $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 4$ por $3x^2 + 2x$ en $\mathbb{Z}_5[x]$.

(b) x^{10} por $x^2 + 1$ en $\mathbb{Z}_2[x]$.

(c) $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 4$ por $x^2 + 2x$ en $\mathbb{Z}[x]$.

(d) $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 4$ por $3x^2 + 2x$ en $\mathbb{Q}[x]$.

8.- Dados $m, n, p \in \mathbb{N}$, prueba que son equivalentes:

(a) $m|n$.

(b) $p^m - 1 \,|\, p^n - 1$.

(c) $x^{p^m-1} - 1 \,|\, x^{p^n-1} - 1$.

9.- Calcula el máximo común divisor de cada uno de los siguientes pares de polinomios y expresarlo en la forma $a(x)f(x) + b(x)g(x)$

(a) $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x - 2$, en $\mathbb{Q}[x]$;

(b) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^3 + 2x - i$, en $\mathbb{C}[x]$;

(c) $f(x) = x^3 + x + 1$, $g(x) = x + 1$ en $\mathbb{Z}_3[x]$;

(d) $f(x) = x^3 + x + 1$, $g(x) = x + 1$ en $\mathbb{Z}_5[x]$;

(e) $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$, $g(x) = x^3 + 6x^2 + x + 1$ en $\mathbb{Q}[x]$;

(f) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$, $g(x) = x^2 + x - 1$ en $\mathbb{Z}_3[x]$;

(g) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 2x + 1$, $g(x) = x^4 + 3$ en $\mathbb{Z}_7[x]$;

10.- Encuentra todos los ceros en $\mathbb{Z}_5$ de los polinomios $f(x) = x^5 + 3x^3 + x^2 + 2x \in \mathbb{Z}_5[x]$ y $g(x) = x^5 - x \in \mathbb{Z}_5[x]$.

11.- ¿Cuáles de los siguientes polinomios tienen raíces múltiples?

(a) $g(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x - 2$, en $\mathbb{Q}[x]$;

(b) $g(x) = x^3 + 2x - i$, en $\mathbb{C}[x]$;

(c) $f(x) = x^3 + x + 1$ en $\mathbb{Z}_3[x]$;

(d) $f(x) = x^3 + x + 1$ en $\mathbb{Z}_5[x]$;

(e) $f(x) = 3x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 4x + 2$ en $\mathbb{Q}[x]$;

(f) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$ en $\mathbb{Z}_3[x]$;

(g) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 2x + 1$ en $\mathbb{Z}_7[x]$;