AMPLIACIÓN DE CÁLCULO

Problemas propuestos

Departamento de Matemáticas

del Área Industrial

INDUSTRIALES

ETSII | UPM

Programa de Ampliación de Cálculo. Curso 2014/15

1. **Cálculo de integrales múltiples**

   Integrales dobles en rectángulos; triples en paralelepípedos. Integración reiterada: teorema de Fubini. Integración de funciones continuas en dominios proyectables de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Cambio de variables. Coordenadas polares en el plano; esféricas y cilíndricas en el espacio. Propiedades de simetría. Áreas, volúmenes y masas. Centroides y centros de gravedad. Momentos de inercia.

2. **Curvas en $\mathbb{R}^n$ e integrales curvilíneas. Teorema de Green**

   Ecuaciones implícitas, representación paramétrica. Arcos de curva y curvas cerradas. Vector tangente a una curva. Longitud de una curva. Integración de un campo escalar a lo largo una curva. Integración de un campo vectorial sobre una curva: circulación. Independencia del camino: campos conservativos y campos de gradientes. Teorema de Green en dominios simplemente conexos de $\mathbb{R}^2$. Campos conservativos en el plano: condición suficiente. Potencial escalar de un campo conservativo. Teorema de Green en dominios más generales de $\mathbb{R}^2$.

3. **Teoría de campos en $\mathbb{R}^3$**

   Rotacional de un campo vectorial: campos irrotacionales y campos de gradientes. Dominios simplemente conexos. Condición suficiente para que un campo sea conservativo. Potencial escalar de un campo conservativo. Divergencia de un campo vectorial: campos solenoidales y campos de rotores. Potencial vector. Dominios estrellados. Condición suficiente para que un campo sea solenoidal. Potencial vector de un campo solenoidal.

4. **Superficies e integrales de superficie**

   Ecuaciones implícitas, representación paramétrica. Superficies de revolución y superficies regladas. Plano tangente y vector normal a una superficie. Superficies orientables. Superficies cerradas y superficies con borde. Área de una superficie. Integración de un campo escalar sobre una superficie. Flujo de un campo vectorial a través de una superficie.

5. **Teoremas de Gauss y Stokes**

   Teorema de la divergencia de Gauss. Teorema de Stokes. Aplicaciones.

1. Cálculo de integrales múltiples

1.1.– Se considera el rectángulo $D = [0,1] \times [0,2]$. Se pide calcular

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy$$

en los siguientes casos:

1. $f(x,y) = e^{x+y}$.
2. $f(x,y) = xy^2$.
3. $f(x,y) = \sqrt{x+y}$.

1.2.– Calcular

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (x^2+2y)e^{xy}dxdy$$

1.3.– En las siguientes integrales el dominio D está proyectado sobre el eje OY; proyectarlo sobre el eje OX (es decir, invertir el orden de integración) y calcular su valor:

1. $\displaystyle\iint_D (x+y)^2\,dxdy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{|y|}^{1}(x+y)^2\,dx\right)dy\,;$
2. $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x+3}\,dxdy = \int_0^2\left(\int_0^{3\sqrt{1-(y^2/4)}}\frac{y}{x+3}\,dx\right)dy\,.$

1.4.– Calcular la integral

$$\iint_D f(x,y)\ dxdy$$

en los siguientes casos:

1. $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+y\le\pi,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}\,,\ f(x,y) = (x+y)\cos x\ \cos y$.
2. $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |x|+|y|\le 1\}\,,\ f(x,y) = x^2+2xy-5y^2$.

1.5.– Calcular la integral $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy$, siendo D la región del primer cuadrante del plano limitada por las parábolas $y=x^2$ y $x=y^2$. Razonar si la integral anterior se podría interpretar como la masa de un cierto cuerpo plano.

1.6.– Sean a y b números reales positivos con $a>1$. Sea D la región del primer cuadrante limitada por las rectas $y=x$, $y=ax$ y la hipérbola $xy=b$. Considérese la integral

$$I = \iint_D xy\,dxdy.$$

1. Plantear el cálculo de I en cartesianas expresando D como recinto proyectable respecto de x.

2. Encontrar un cambio que transforme la región D en un rectángulo.

3. Calcular I.

1.7.– Se considera el sólido plano definido por $x^2 + y^2 - x \leq 0$ sobre el cual hay una distribución de masa. La densidad en cada punto es $\rho(x, y) = 1+d^2$ donde d es la distancia del punto al origen. Se pide calcular la masa del sólido.

1.8.– Sea $a > 0$ y sea A el dominio definido por $x^2 + y^2 - ax \leq 0$. Se pide:

1. Calcular $\displaystyle\iint_A \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,\mathrm{sen}\, y \; dxdy$.

2. Calcular $\displaystyle\iint_A \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\; dxdy$.

1.9.– Calcular el área del recinto limitado por las curvas:

$$y^2 = x \;\; ; \;\; y^2 = 2x \;\; ; \;\; x^2 = 3y\,.$$

1.10.– Sean a y b números positivos y sea A el recinto definido por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

Sobre A hay definida una densidad superficial de masa (unidades de kg/m^2) dada por

$$\rho(x, y) = e^{b^2x^2 + a^2y^2}$$

Se pide calcular la masa de A.

1.11.– Sea A la región acotada del primer octante limitada por las superficies $x = 0$, $z = 2$, $y = 0$ y $z = 2x^2 + y^2$. Calcular $\displaystyle\iiint_A x \; dxdydz$ y encontrar alguna interpretación geométrica-física de dicha integral.

1.12.– Sea Q el cubo $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Se pide:

1. Calcular la integral $\displaystyle\iiint_Q |x - y| \; dxdydz$.

2. Calcular la integral $\displaystyle\iiint_Q (|x - y| + |y - z| + |z - x|)\, dxdydz$.

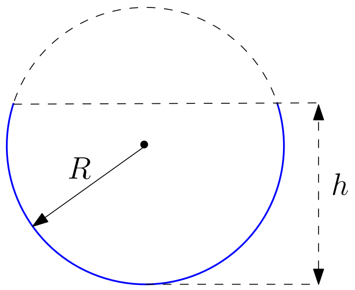
1.13.– Calcular la integral triple

$$\iiint_D z\,\cos(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz, \qquad D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2\le R^2,\ z\ge 0\}.$$

1.14.– Calcular el volumen del sólido definido por:

$$x^2+y^2\le 2x\,, \quad x^2+y^2\le 2y\,, \quad x^2+y^2+z^2\le 4\,.$$

1.15.– Un casquete esférico es la porción de esfera limitada por la superficie esférica y un plano que la corta. Calcular su volumen en función del radio R de la esfera y de la altura h del casquete.



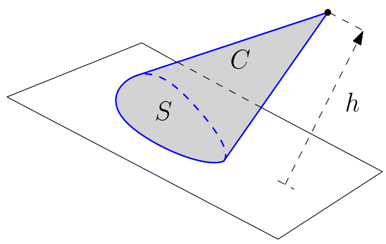
1.16.– Calcular las coordenadas del centroide de los recintos que se describen a continuación.

1. Porción del plano interior a la elipse de semiejes a y b y centro el origen, situada en el primer cuadrante.
2. Un semicírculo.
3. Una semiesfera.
4. Sólido definido por $x^2+y^2\le z\le 4$.

1.17.– Un elipsoide de semiejes a, b, c tiene en cada punto una densidad de masa proporcional al cuadrado de la distancia de dicho punto al centro del elipsoide, con constante de proporcionalidad k.

Determinar los valores de k para los que el elipsoide flota en el agua.

1.18.– Sea S una superficie plana acotada y sea P un punto del espacio que no pertenezca al plano que contiene a S. Se considera el cono C formado por los segmentos de recta que comienzan en P y cuyo punto final está en S, con lo que la base del cono es S. Se pide:



1. Calcular el volumen de C en función del área de su base y su altura, es decir, la distancia de P al plano que contiene a S.
2. Calcular el centroide de C así como su distancia al plano que contiene a S.
3. Como aplicación, calcular el volumen y el centroide del cono de vértice $(0,0,6)$ y base $4x^2+(y-6)^2 \leq 4$, $z=0$.

1.19.– Sea A el recinto del semiespacio $z \geq 0$ que cumple $z^2 \geq 3x^2+3y^2$ y que está limitado por las superficies de ecuaciones $z=1$ y $x^2+y^2+z^2=8$.

Sea $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función continua. Se desea calcular la integral $\iiint_A f(x,y,z)dxdydz$ mediante un cambio a coordenadas esféricas:

$$x = r\cos\theta \operatorname{sen}\varphi \ \ ; \ \ y = r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \ \ ; \ z = r\cos\varphi$$

Se pide calcular los límites de integración, es decir, las cantidades denotadas con $*$ en la siguiente expresión

$$\iiint_A f(x,y,z)dxdydz =$$
$$= \int_*^* \left(\int_*^* \left(\int_*^* f\left(r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, r\cos\varphi\right) r^2 \operatorname{sen}\varphi dr \right) d\varphi \right) d\theta$$

2. Curvas en $\mathbb{R}^n$ e integrales curvilíneas. Teorema de Green

2.1.– Se consideran las siguientes curvas en $\mathbb{R}^3$, dadas a través de sus ecuaciones implícitas:

1. $\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x - z = 0\}$
2. $\Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 6\}$
3. $\Gamma_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 = 1,\ x + y + z = 1\}$
4. $\Gamma_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 = z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$
5. $\Gamma_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ (x-1)^2 + y^2 = 1\}$

Calcular las longitudes de las que sean circunferencias y parametrizar las restantes; decidir asimismo cuáles de ellas son planas.

2.2.– Se pide calcular la longitud del arco de curva

$$x(t) = \int_1^t \frac{\cos u}{u^2}\, du\ , \qquad y(t) = \int_1^t \frac{\operatorname{sen} u}{u^2}\, du$$

desde el punto $(0, 0)$ hasta el punto más próximo que tenga tangente vertical.

2.3.– Sea Γ la curva definida por las ecuaciones cartesianas

$$2x - y = 0, \quad z - x^{3/2} = 0 \quad (x, y, z \geq 0)$$

Hallar la longitud del arco de Γ determinado por los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 2, 1)$.

2.4.– En este ejercicio se trata de obtener algunos resultados relacionados con la *astroide*, que es la curva plana definida por:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\}, \qquad (a > 0).$$

Denotaremos A^+ el arco de curva situado en el primer cuadrante.

1. Sea $(x, y) \in A^+$. Expresar $y = f(x)$, dibujar la gráfica de f y calcular $\displaystyle\int_0^a f$.
2. Calcular el área del dominio D limitado por el arco A^+ y los ejes coordenados. Deducir el área encerrada por la astroide A.
3. Hallar el centroide (x_D, y_D) del dominio D. Obviamente, por simetría, se verifica $x_D = y_D$.

   Indicación: Tanto para el área como para el centroide es conveniente utilizar la función beta.

4. Parametrizar el arco A^+ como $\varphi(t) = (t, f(t))$. Utilizar –de ser posible– esta parametrización para calcular la longitud de A^+. ¿Surge algún inconveniente? ¿Insuperable?

5. Si el inconveniente no ha sido insuperable, deducir la longitud A, replicando A^+ sobre los cuadrantes restantes. Si el inconveniente ha sido insuperable, pasar al siguiente problema.

2.5.– Sea $a > 0$ constante, hallar la longitud del arco Γ de ecuaciones paramétricas

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cos^3 t \\ y = a\,\mathrm{sen}^3\, t \end{array}\right. ; \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Determinar asimismo el área delimitada por Γ y los ejes coordenados.

2.6.– Dado $a > 0$, sea Γ la curva llamada *cardioide,* de ecuación polar $\rho = a(1 + \cos\theta)$. Sea D el dominio limitado por Γ. Se pide:

1. Hallar la longitud de Γ.

2. Hallar el área y el centroide de D.

2.7.– Determínese la masa de un alambre que es la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 0$, sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de la distancia al plano YZ.

2.8.– Se considera una curva Γ en coordenadas polares $\rho = h(\theta)$, $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$. Entonces:

1. Una parametrización de la curva es

   a) $x(\theta) = h(\theta)\cos\theta,\ \ y(\theta) = h(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$

   b) $\varphi(\theta) = (\theta, h(\theta)),\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$

   c) $x(\theta) = h(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta,\ \ y(\theta) = h(\theta)\cos\theta,\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]$

2. La longitud L de la curva es

   a) $L = \displaystyle\int_\Gamma ds$

   b) $L = \displaystyle\int_\Gamma d\theta$

   c) $L = \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{h(\theta)^2 + h'(\theta)^2}\, d\theta$

   d) $L = \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} |h'(\theta)|\, d\theta$

e) $L = \displaystyle\int_\Gamma \sqrt{h(\theta)^2 + h'(\theta)^2}\, d\theta$

3. Sea L la longitud de la curva y (x_0, y_0) las coordenadas cartesianas de su centroide. Decidir cuáles de las fórmulas siguientes son válidas:

   a) $x_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_\Gamma x\, ds\ , \qquad y_0 = \dfrac{1}{L}\int_\Gamma y\, ds$

   b) $x_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} x\, dx\ , \qquad y_0 = \dfrac{1}{L}\int_{\theta_1}^{\theta_2} y\, dy$

   c) $x_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} x\, d\theta\ , \qquad y_0 = \dfrac{1}{L}\int_{\theta_1}^{\theta_2} y\, d\theta$

   d) $x_0 = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} h(\theta)\cos\theta\, d\theta\ , \qquad y_0 = \dfrac{1}{L}\int_{\theta_1}^{\theta_2} h(\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta$

4. Sea f un campo escalar definido sobre Γ. Decidir cuáles de las fórmulas siguientes son válidas para calcular la integral curvilínea $I = \displaystyle\int_\Gamma f\, ds$

   a) $I = \displaystyle\int_\Gamma f(x(\theta), y(\theta))\sqrt{h(\theta)^2 + h'(\theta)^2}\, d\theta$

   b) $I = \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta, h(\theta))\sqrt{h(\theta)^2 + h'(\theta)^2}\, d\theta$

   c) $I = \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(x(\theta), y(\theta))\sqrt{h(\theta)^2 + h'(\theta)^2}\, d\theta$

   d) $I = \displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(x(\theta), y(\theta))h(\theta)\, d\theta$

Nota: algunas de la expresiones pueden no tener sentido.

2.9.– Determínese una función continua h con $h(0) = 0$ que haga conservativo el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x, y) = (2x^2 + 4xh(y), 2x^2 - y^2)$$

En ese caso, hállese la circulación de $\boldsymbol{F}$ sobre una curva arbitraria que una el punto $(0, 0)$ con el $(1, 2)$.

2.10.– Sea $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (f_1(x), f_2(y), f_3(z))$ un campo vectorial continuo; probar que es conservativo.

2.11.– Calcular

$$\int_\Gamma -y^3dx + x^3dy - z^3dz$$

donde Γ es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con el plano $x + y + z = 1$ recorrida de forma que la proyección de Γ sobre el plano XY se recorre en sentido contrario a las agujas del reloj.

2.12.– Dados tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ de $\mathbb{R}^3$, se consideran el campo vectorial definido mediante

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r} \quad , \quad \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$$

y la curva cerrada $\gamma : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\gamma(\theta) = \boldsymbol{b} \cos\theta + \boldsymbol{c} \operatorname{sen}\theta$$

Calcúlese la circulación del campo $\boldsymbol{F}$ sobre γ y dedúzcase la condición que han de cumplir los vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ para que esa circulación se anule. ¿Es el campo $\boldsymbol{F}$ conservativo en $\mathbb{R}^3$?

2.13.– Decidir sobre la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones, intentando justificar las consideradas ciertas y dando un contraejemplo de las falsas. En lo sucesivo, D es un conjunto abierto conexo de $\mathbb{R}^2$, Γ es una curva de clase 1 a trozos contenida en D, $\boldsymbol{F} = (P, Q) : D \to \mathbb{R}^2$ es de clase 1.

1. Si $\boldsymbol{F}$ es ortogonal a Γ en todos sus puntos entonces $\displaystyle\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$.
2. Si $\displaystyle\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$, entonces $\boldsymbol{F}$ es idénticamente nulo sobre Γ.
3. Si Γ es una curva cerrada y $\displaystyle\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$, entonces $\boldsymbol{F}$ es conservativo en D.
4. Si $\boldsymbol{F}$ admite un potencial escalar en D entonces $\boldsymbol{F}$ es conservativo en D.
5. Si $\boldsymbol{F}$ es conservativo en D entonces $\boldsymbol{F}$ admite un potencial escalar en D.
6. Si $\boldsymbol{G}$ es un campo continuo en D que coincide con $\boldsymbol{F}$ sobre Γ entonces $\displaystyle\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_\Gamma \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{s}$.
7. Si $\boldsymbol{G}$ es un campo continuo en D y $\displaystyle\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_\Gamma \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{s}$, entonces $\boldsymbol{G}$ coincide con $\boldsymbol{F}$ sobre Γ.

2.14.– Calcúlese la integral curvilínea

$$\oint_\Gamma (xy + x + y)\, dx + (xy + x - y)\, dy$$

siendo Γ la circunferencia $x^2 + y^2 = ax$ con orientación positiva.

2.15.– Sea D el recinto del plano acotado por las curvas de ecuaciones $x = y^2$ y $2x - 1 = |y|$. Sea Γ su curva frontera recorrida positivamente.

1. Calcular el área de D.
2. Calcular $\displaystyle\int_\Gamma (x + y^2)\; dx + x^2 y\; dy$.

2.16.– Calcular el trabajo del campo

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \big(2xy^2 + ye^y, 2yx^2 + x(y+1)e^y + 1\big)$$

cuando una partícula se mueve recorriendo la curva de ecuación

$$\big(x^2+y^2\big)^2 + 2(x+y)^2 = \frac{5}{4},\ x \geq 0,\ y \geq 0$$

desde el punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ hasta el punto $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

2.17.– Sea

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\frac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}, \frac{-xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right).$$

Estudiar si $\boldsymbol{F}$ es conservativo en su dominio de definición y calcular $\displaystyle\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$, con Γ recorrida una vez en sentido positivo en los casos:

1. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$
2. $\dfrac{(x-3)^2}{2} + \dfrac{(y-4)^2}{4} = 1.$
3. Γ es una curva de Jordan de clase C^1 a trozos que no pasa por el origen. ¿Qué sucede en el caso de que la curva Γ pase por el origen?

2.18.– Sea $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ un campo de clase 1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(3,0)\}$ y que verifica

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

en su dominio de definición. Se consideran las siguientes curvas, orientadas de forma positiva

$$\Gamma_1 : x^2+y^2 = 1\ ;\ \Gamma_2 : (x-3)^2 + y^2 = 1\ ;$$
$$\Gamma_3 : (x+3)^2 + y^2 = 1\ ;\ \Gamma_4 : \frac{4x^2}{9} + y^2 = 1\ ;$$
$$\Gamma_5 : \frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1\ .$$

Se sabe, además, que

$$\int_{\Gamma_1} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = 4,\ \int_{\Gamma_5} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = 1.$$

1. Estudiar si existen abiertos de $\mathbb{R}^2$ en los cuales el campo $\boldsymbol{F}$ es conservativo. En caso afirmativo mostrar algún ejemplo.

2. Calcular $\int_{\Gamma_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$, $\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$ e $\int_{\Gamma_4} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}$.

2.19.– El campo $\boldsymbol{F} = (P, Q)$ es de clase 1 en el conjunto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega'$. Estudiar si se verifican las hipótesis para poder afirmar que

$$\int_\Gamma P dx + Q dy = \iint_{\mathrm{int}(\Gamma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

en las siguientes situaciones:

1. Ω' y Γ están dados en la figura 1.
2. Ω' y Γ están dados en la figura 2.

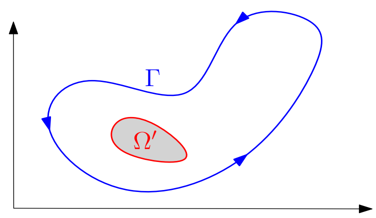


Figura 1

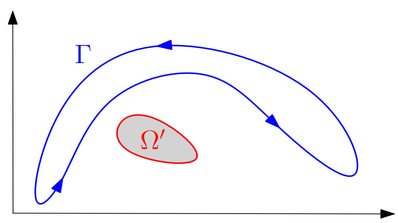


Figura 2

2.20.– Estudiar si se verifican las hipótesis para afirmar que

$$\int_{\partial\Omega} P dx + Q dy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

donde $\partial\Omega$ es la frontera de Ω orientada de manera adecuada, en las siguientes situaciones:

1. $P(x,y) = \dfrac{1}{x}$, $Q(x,y) = x + y$, $\quad \partial\Omega \equiv 4x^2 + y^2 = 8x$.
2. $P(x,y) = \dfrac{x^2 + 2y}{x^2 + y^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$, $\quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 2y^2 \leq 10\}$.
3. El campo $(P(x,y), Q(x,y)) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - 2y^2}}(x, y)$, y los recintos:

   a) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   b) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 10 \geq x^2 + y^2 \geq 1\}$.
   c) $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-3)^2 + (y-4)^2 \leq 1\}$.

3. Teoría de campos en $\mathbb{R}^3$

3.1.– Calcular el campo escalar u de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$ para que el campo vectorial $\boldsymbol{F}$ definido por:

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (xy^2z^2 - 2xy,\ u(x,y,z),\ x^2y^2z + 1), \quad \boldsymbol{F}(0,y,z) = (0,y,1),$$

sea conservativo en $\mathbb{R}^3$.

3.2.– Sea $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un vector no nulo, y sea $k > 0$. Considérese el campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{(a_1x, a_2y, a_3z)}{(24x^2 + 4y^2 + 2z^2)^k}.$$

Determínense razonadamente todos los valores posibles del vector $\boldsymbol{a}$ y de la constante k para los que el campo $\boldsymbol{F}$ es irrotacional, indicando el mayor dominio posible en el que posee esta propiedad.

3.3.– Se considera un campo vectorial $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ de clase $C^1(\mathbb{R}^3)$. Se construye a partir de él un campo escalar V de la manera siguiente:

$$V(x,y,z) = \int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$$

donde Γ es la poligonal determinada por los puntos $(0,0,0)$, $(x,0,0)$, $(x,y,0)$ y (x,y,z).

1. Exprésese V como una suma de integrales definidas simples.
2. Enúnciese y demuéstrese una condición necesaria y suficiente que debe cumplir $\boldsymbol{F}$ para que grad $V = \boldsymbol{F}$.
3. Determínense los valores de p, q y r para que el campo $\boldsymbol{F}$ de componentes:

$$\begin{aligned} P(x,y,z) &= -2xy\left(x^2+z^2+1\right)^p \\ Q(x,y,z) &= \left(x^2+z^2+1\right)^q \\ R(x,y,z) &= -2yz\left(x^2+z^2+1\right)^r \end{aligned}$$

   cumpla la condición anterior y constrúyase V en este caso.

3.4.– Compruébese cada una de las siguientes igualdades:

1. $\operatorname{div}(f\mathbf{V}) = (\operatorname{grad} f)\cdot\mathbf{V} + f\operatorname{div}\boldsymbol{V}$,
2. $\operatorname{rot}(f\boldsymbol{V}) = \operatorname{grad} f \times \boldsymbol{V} + f\operatorname{rot}\boldsymbol{V}$,
3. $\operatorname{div}(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{W}$,
4. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$,

5. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$,
6. $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{V}) = 0$.

3.5.– Calcúlese el valor del parámetro α para que el campo $\boldsymbol{F(r)} = \|\boldsymbol{r}\|^{\alpha}\, \boldsymbol{r}$ sea solenoidal en $\Omega = \{\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3,\ 1 \leq \|\boldsymbol{r}\| \leq 2\}$.

3.6.– Fijado un vector $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$, calcúlense los valores de $p \in \mathbb{R}$ para los cuales el campo vectorial $\boldsymbol{F(r) = (a \cdot r)}^p\, \boldsymbol{r}$ es solenoidal en un cierto subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que se especificará.

3.7.– Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 y $\boldsymbol{V}$ el campo vectorial definido por

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) \;=\; yz\, \boldsymbol{i} \;+\; xz\, \boldsymbol{j} \;+\; y\, f(x)\, \boldsymbol{k}.$$

Determinar las funciones f para las cuales el campo $\boldsymbol{V}$ es solenoidal. En tal caso, hallar todos los potenciales vectores de $\boldsymbol{V}$ que sean de la forma $L(x,y,z)\, \boldsymbol{i} \;+\; M(y,z)\, \boldsymbol{j}$.

3.8.– Se consideran los siguientes campos vectoriales, definidos en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$:

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(0,-z,y) \qquad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = \frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})}{\|\boldsymbol{r}\|^2}\boldsymbol{r}$$

siendo $\boldsymbol{a}$ un vector fijo del espacio. Determinar el vector $\boldsymbol{a}$ para el cual $\boldsymbol{G}$ es potencial vector de $\boldsymbol{F}$ en un dominio de $\mathbb{R}^3$ que se especificará.

3.9.– Campos centrales. Sea dice que un campo definido en un subconjunto de $\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ es central cuando en cada punto el campo lleva la dirección del radio vector en ese punto y cuando el módulo del campo en cada punto solo depende de la distancia a un punto denominado *centro* y que nosotros supondremos que es el origen. Por tanto, un campo central tiene la expresión

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = g(\|\boldsymbol{r}\|)\boldsymbol{r}$$

donde $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ y supondremos que g es una función de clase 1 en $(0,\infty)$. En tal caso el campo está $\boldsymbol{F}$ definido en $\mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$, y es de clase 1 en dicho dominio.

1. En el caso $n = 3$.

   1.1. Demostrar que todo campo central es conservativo, y determinar la expresión de un potencial escalar del mismo (Sugerencia: ensayar como potencial un campo que solo dependa de la distancia al origen).

   1.2. Como ejemplo, calcular un potencial escalar del campo $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \exp(-\|\boldsymbol{r}\|^2)\boldsymbol{r}$.

   1.3. Determinar todos los campos centrales que son solenoidales y, para cada uno de ellos, calcular un potencial escalar.

2. Ídem de (1) pero para el caso $n = 2$.

4. Superficies e integrales de superficie

4.1.– Hallar los planos tangentes al elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$ que sean paralelos al plano $2x + 4y - z = 0$.

4.2.– Hallar unas ecuaciones paramétricas y una ecuación implícita de la superficie cónica engendrada por las rectas que pasan por el punto $(1, 0, 1)$ y cortan a la elipse $4x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

4.3.– Se considera el sólido de $\mathbb{R}^3$ limitado por las superficies

$$x^2 + y^2 = 1 \,, \quad 2z + y = 4 \,, \quad z = 0 \,.$$

1. Calcular su volumen.
2. Calcular el área total (lateral y bases) de su superficie. Calcular la longitud de los semiejes de la elipse determinada por la intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 = 1 \,, \quad 2z + y = 4 \,.$$

4.4.– Calcular el área de la superficie esférica delimitada por un casquete esférico de radio R y altura h (definido en el problema 1.15).

4.5.– Calcular la integral

$$I = \int_\Sigma x^2 y^2 z^2 d\sigma$$

en los casos que se indican:

1. Σ es la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.
2. Σ es la porción del plano $z = 1$ con $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.

4.6.– Calcúlese $\displaystyle\int_T xyz \, d\sigma$, siendo T:

1. El triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$;
2. El triángulo esférico, con los mismos vértices, situado en una esfera con centro el origen.

4.7.– Una superficie metálica Σ tiene forma de semiesfera $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ y su densidad superficial de masa en cada punto (x, y, z) es $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$. Calcúlese la masa de la superficie Σ.

4.8.– Sea C una curva simple y acotada del plano $\mathbb{R}^2$. Sea f un campo escalar positivo y de clase 1 a trozos en un dominio que contiene a C. Sea S la superficie regular definida por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ (x, y) \in C,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. Se pide:

1. Demostrar la igualdad $A(S) = \int_C f ds$ donde $A(S)$ denota el área de la superficie S.
2. Calcular explícitamente el área $A(S)$ cuando la curva C viene parametrizada por $\varphi(t) = (t, \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$ y la función $f(x, y) = |y \cos x|$.

4.9.– Calcular el área de la porción de una superficie cilíndrica recta situada en el interior de una esfera cuyo centro está en la superficie cilíndrica, siendo además el radio de la esfera el doble del de la superficie cilíndrica.

4.10.– Una masa fluida tiene un campo de velocidades $\boldsymbol{V}(x, y, z) = \sqrt{|y|}\ \boldsymbol{j}\ (m/s)$. Calcular el caudal de fluido que atraviesa la superficie $y = x^2 + z^2$; $0 \leq y \leq 1$.

4.11.– Calcular el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{F}(x, y, z) = 3x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$ a través de la porción del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ que se encuentra en el primer octante, orientada de forma que el vector normal tenga tercera componente positiva.

4.12.– Calcúlese el flujo del campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{k}}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{k}\|}$$

a través del triángulo esférico situado sobre la esfera de centro 0 y radio 1, de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, orientado según la normal saliente de la esfera.

4.13.– Se considera un elipsoide en el que las longitudes de los semiejes son a, b y c. A cada punto de la superficie del elipsoide se le asocia la distancia del centro del elipsoide al plano tangente al elipsoide en ese punto. Calcúlese la integral de la función así definida sobre la superficie del elipsoide.

5. Teoremas de Gauss y de Stokes

5.1.– Calcular el flujo del campo $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(\operatorname{sen}^2(y^2+z^2)+zy, 2e^{x^2z}, x^2+y^2\right)$ a través de la semiesfera $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z \geq 0$, orientada según la normal que tiene tercera componente positiva.

5.2.– Calcular el flujo del campo

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$$

a través de la cara exterior del tetraedro de vértices

$$(0,0,1)\,, \quad (1,0,-1)\,, \quad (-1,1,-1)\,, \quad (-1,-1,-1)\,.$$

¿Se puede calcular el flujo sin necesidad de parametrizar la superficie del tetraedro?

5.3.– En $\mathbb{R}^3$ se considera la superficie parametrizada:

$$\Phi(u,v) = (u\cos v,\ u\operatorname{sen} v,\ v), \quad (u,v) \in [0,1]\times[2\pi,4\pi]$$

y el campo vectorial definido por

$$\mathbf{V}(x,y,z) = \frac{y\,\boldsymbol{i} - x\,\boldsymbol{j}}{x^2+y^2+z^2}\,.$$

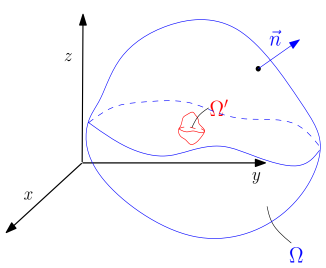
Estudiar si puede aplicarse el teorema de Stokes. En caso afirmativo parametrizar de forma coherente el borde $\mathcal{B}$ de la superficie y calcular la circulación de $\boldsymbol{V}$ a lo largo de $\mathcal{B}$.

5.4.– Sea $\boldsymbol{F}$ un campo vectorial de clase 1 en el conjunto $\mathbb{R}^3\setminus\Omega'$. Estudiar si se verifican las hipótesis para poder afirmar que

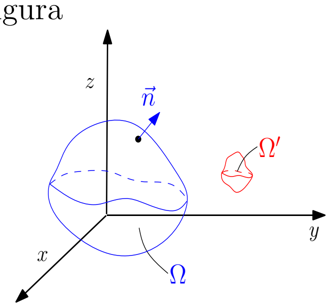
$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{F}(x,y,z)\; dxdydz = \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

en las tres situaciones siguientes.

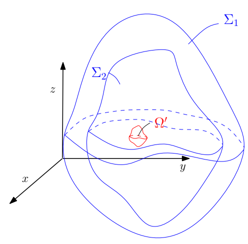
1. Ω y Ω' son los conjuntos representados en la siguiente figura



2. Ω y Ω' son los conjuntos representados en la siguiente figura



3. Ω es el conjunto limitado por las superficies Σ_1 y Σ_2 de la figura y Ω' el conjunto también representado en la figura



5.5.– Estudiar si se verifican las hipótesis para poder afirmar que

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}(x,y,z)\; dxdydz = \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

en las siguientes situaciones:

1. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{x}, y+z, \dfrac{e^z}{x}\right)$ y Ω es el conjunto definido por

$$4x^2 + y^2 + z^2 \leq 8x.$$

2. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2+z^2}, y, \dfrac{x+z}{x^2+y^2+z^2}\right)$ y Ω es el conjunto definido por

$$x^2+y^2+z^2 \geq 1, \quad 2x^2+2y^2+z^2 \leq 10\,.$$

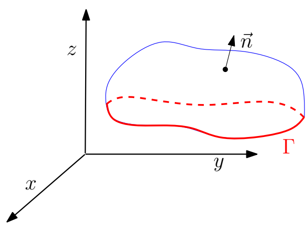
3. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-2y^2-z^2}}(x,y,z)$ y Ω es el conjunto definido por

$$x^2+y^2+z^2 \leq 1\,.$$

4. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-2y^2-z^2}}(x,y,z)$ y Ω es el conjunto definido por

$$10 \geq x^2+y^2+z^2 \geq 1\,.$$

5. $\boldsymbol{F}$ es de clase 1 en $\mathbb{R}^3$ y $\partial\Omega$ es la superficie cuyo borde es la curva Γ que muestra la siguiente figura



6. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-2y^2-z^2}}(x,y,z)$ y Ω es el conjunto definido por

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 \leq 1\,.$$

5.6.– Sea $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ y sea S la superficie esférica de centro $\boldsymbol{c}$ y radio $R > 0$, orientada según su normal saliente.

1. Calcúlese el flujo a través de S del campo $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{c}$.

2. Calcúlese el flujo a través de S del campo

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{c}}{\|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{c}\|^3} \,.$$

3. Calcúlese el flujo de $\boldsymbol{G}$ a través del elipsoide de ecuaciones

$$\frac{(x - c_1)^2}{a^2} + \frac{(y - c_2)^2}{b^2} + \frac{(z - c_3)^2}{c^2} = 1 \,.$$

orientado según la normal saliente $(a, b, c > 0)$.

4. Sea Σ una superficie cerrada de clase 1 que no pasa por el punto $\boldsymbol{c}$. Calcular razonadamente los posibles valores que puede tomar el flujo de $\boldsymbol{G}$ sobre Σ. ¿Qué sucede si Σ pasa por el punto $\boldsymbol{c}$?

5.7.– Sea la curva definida por

$$2x^2 + 3y^2 = 1 \,, \quad z = 1 \,,$$

orientada de forma que su proyección sobre el plano XY se recorre en sentido contrario a las agujas del reloj y sea

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} \,(x, y, z) \;.$$

Estudiar si se puede elegir alguna superficie Σ cuyo borde sea Γ tal que se verifiquen las hipótesis del teorema de Stokes aplicado a $\boldsymbol{F}$ y a Σ y que por tanto se cumpla

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \,.$$

5.8.– Sea

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{1}{2x^2 + 3y^2 + z^2} \,(x + 1, y - 2, z) \,.$$

Estudiar si se puede asegurar que se cumple

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint_\Sigma \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\sigma},$$

donde Γ es el borde orientado de Σ (con lo que Σ y Γ están orientadas de forma coherente entre sí) en los siguientes casos:

1. Γ es la curva $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z = 0$ y Σ la superficie definida por

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \,, \\ z &\geq 0 \,. \end{aligned}$$

2. Γ es la curva

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1\,, \\ z &= 0 \end{aligned}$$

y Σ la superficie definida por

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &\leq 1\,, \\ z &= 0\,. \end{aligned}$$

3. Γ la curva

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x\,, \\ z &= 0 \end{aligned}$$

y Σ la superficie definida por

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= x\,, \\ z &\geq 0\,. \end{aligned}$$

5.9.– Calcular todos los valores posibles que puede tomar el flujo del campo vectorial

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = 2\,z^2\,x\,\boldsymbol{i} \;+\; z^2\,y\,\boldsymbol{j} \;-\; z^3\,\boldsymbol{k}$$

a través de una superficie regular cuyo borde orientado es la curva que resulta de la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y el cilindro $x^2+z^2=1/4$, situado en el semiespacio $y \geq 0$.

5.10.– Sea $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función de clase uno, sea $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo no nulo y sea el campo $\boldsymbol{F}:\mathbb{R}^3\setminus\{\boldsymbol{0}\} \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = f(\|\boldsymbol{r}\|)\,\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}.$$

Se pide:

1. Calcular la divergencia del campo $\boldsymbol{F}$.
2. Sea Γ la curva definida por las ecuaciones: $x^2+y^2+z^2=1$, $x-z=0$. Calcular

$$I = \int_\Gamma \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^2} \cdot d\boldsymbol{s}\,,$$

donde la orientación de Γ es tal que su proyección sobre el plano XY está orientada en sentido contrario a las agujas del reloj.

5.11.– Sean $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un vector constante y no nulo y k una constante real estrictamente positiva. Considérese el campo vectorial $\boldsymbol{F}$ definido por:

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{(a_1 x, a_2 y, a_3 z)}{(24x^2 + 4y^2 + 2z^2)^k}.$$

1. Determínense razonadamente todos los valores posibles del vector $\boldsymbol{a}$ y de la constante k para los que el campo $\boldsymbol{F}$ es irrotacional, indicando el mayor dominio posible en el que posee esta propiedad.

2. Sea Σ una superficie regular con borde orientado Γ que no contiene el origen. Para los valores de $\boldsymbol{a}$ y k obtenidos en 1., calcúlese la circulación del campo $\boldsymbol{F}$ sobre el borde Γ.

3. Determínense razonadamente todos los valores posibles del vector $\boldsymbol{a}$ y de la constante k para los que el campo $\boldsymbol{F}$ es solenoidal, indicando el dominio en el que posee esta propiedad.

4. Sean Σ_1 y Σ_2 las superficies esféricas de ecuaciones cartesianas $(x-1)^2+y^2+z^2 = 9$ y $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1/4$, respectivamente. Para $\boldsymbol{a} = (2, 2, 2)$ y $k = 3/2$, calcúlese el flujo del campo $\boldsymbol{F}$ a través de las caras exteriores de Σ_1 y de Σ_2.

5.12.– Considérese la curva Γ definida por las ecuaciones

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9\,, \quad (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 6\,,$$

con una orientación tal que su proyección sobre el plano YZ se recorre con orientación positiva. Se pide:

1. Hallar unas ecuaciones paramétricas de Γ.

2. Sea $\boldsymbol{G}$ el campo en $\mathbb{R}^3$ definido por

   $$\boldsymbol{G}(x, y, z) = (\operatorname{sen}^2(x+y)\,,\, -z^3, y^3)\,.$$

   Calcúlese la circulación de $\boldsymbol{G}$ a lo largo de Γ.

3. Sea $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo. Calcúlense los valores reales de p para los cuales el campo vectorial $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})^p\, \boldsymbol{r}$ es solenoidal en un cierto subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que se especificará.

4. Se considera la superficie Σ formada por los segmentos que unen el punto $(1, 0, 0)$ y los puntos de Γ, orientada de forma que los vectores normales a la misma tienen la primera componente negativa. Calcúlese el flujo del campo $\boldsymbol{H}(x, y, z) = (1/x^2, y/x^3, z/x^3)$ a través de Σ.