TEMA 1

LOS NÚMEROS COMPLEJOS, ESTRUCTURA ALGEBRAICA Y TOPOLOGÍA

1. El cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos
2. El espacio vectorial normado de los números complejos
3. Forma polar y exponencial de un número complejo
4. Potencias y raíces de un número complejo
5. Topología del plano complejo
6. El plano ampliado y la esfera de Riemann

1. El cuerpo de los números complejos

Estructura de cuerpo de los números complejos

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Operación suma

$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ como

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Propiedades de la suma

1. Asociatividad: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.
2. Elemento neutro, nulo o cero: $\exists\, (0, 0) \in \mathbb{C}$ t.q. $(0, 0) + z = z + (0, 0) = z, \forall z \in \mathbb{C}$.
3. Elemento simétrico u opuesto: $\forall\, z = (x, y) \in \mathbb{C}$ el elemento $(-x, -y) =: -z \in \mathbb{C}$ verifica $z + (-z) = -z + z = (0, 0)$.
4. Conmutatividad: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \ \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$(\mathbb{C}, +)$ es un grupo conmutativo o abeliano

Operación producto

$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definida para $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ como

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Propiedades del producto

1. Asociatividad: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \ \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.
2. Elemento neutro, elemento unidad o uno: $\exists\, (1, 0) \in \mathbb{C}$ t.q. $(1, 0) \cdot z = z \cdot (1, 0) = z, \ \forall\, z \in \mathbb{C}$.
3. Elemento simétrico o inverso: $\forall\, z = (x, y) \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$ el elemento $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right) =: z^{-1}$ verifica $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = (1, 0)$.
4. Conmutatividad: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \ \forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$(\mathbb{C}^*, \cdot)$ es un grupo conmutativo o abeliano

Distributividad del producto respecto a la suma

$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ se tiene que $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo

Propiedades de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

1. El cero y el uno son únicos.
2. El opuesto de $z \in \mathbb{C}$ es único y el inverso de $z \in \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}$ es único.
3. El producto de cualquier número complejo por cero es cero.
4. Para todo $z \in \mathbb{C}$ su opuesto $-z$ es el producto de z por el opuesto de la unidad.
5. Si el producto de dos números complejos es el cero, alguno de los dos es el cero.

División de números complejos

Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y z_2 no es el cero, se define $\boxed{\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}}$

División compleja: propiedades semejantes al caso real. La propiedad 5 se reformula: $\mathbb{C}$ no tiene divisores de cero.

Relación entre números reales y complejos

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longrightarrow (x, 0) \end{aligned}$$

1. ϕ es un **homomorfismo de cuerpos**: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\phi(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0) = \phi(x_1) + \phi(x_2),$$
$$\phi(x_1 \cdot x_2) = (x_1 \cdot x_2, 0) = (x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = \phi(x_1) \cdot \phi(x_2).$$

2. $\phi(\mathbb{R}) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ es un **subcuerpo de $\mathbb{C}$**:

   Si $z_1, z_2 \in \phi(\mathbb{R})$ entonces $z_1 = (x_1, 0)$, $z_2 = (x_2, 0)$ con $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ y se verifica

$$z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2, 0) \in \phi(\mathbb{R})$$
$$z_1 \cdot z_2^{-1} = (x_1, 0) \cdot (1/x_2, 0) = (x_1/x_2, 0) \in \phi(\mathbb{R}) \setminus \{(0,0)\} \quad \text{si } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

3. ϕ es una aplicación **inyectiva**.

ϕ es un isomorfismo de cuerpos entre $\mathbb{R}$ y $\phi(\mathbb{R})$

El isomorfismo ϕ entre los cuerpos $\mathbb{R}$ y $\phi(\mathbb{R})$ y definiendo la **unidad imaginaria** $i = (0, 1)$ se puede identificar

$$x \equiv (x, 0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) \equiv x + iy$$

Forma binómica de z: $x + iy$ $\begin{cases} x = \operatorname{Re} z \text{ parte real de } z \\ y = \operatorname{Im} z \text{ parte imaginaria de } z \end{cases}$

Teorema. El cuerpo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es **algebraicamente cerrado**[1].

Proposición. En $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ **no** existe ningún orden total compatible con su estructura de cuerpo.

[1] Este resultado es el teorema fundamental del Álgebra y se podrá demostrar cuando se exponga la teoría integral de Cauchy.

El cuerpo $(\mathbb{C},+,\cdot)$ *versus* el cuerpo $(\mathbb{R},+,\cdot)$

- $(\mathbb{R},+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo ordenado y completo, pero no es algebraicamente cerrado.
- $(\mathbb{C},+,\cdot)$ es un cuerpo conmutativo completo y algebraicamente cerrado.
- $(\mathbb{C},+,\cdot)$ es el menor cuerpo algebraicamente cerrado que contiene a un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{R}$.
- $(\mathbb{C},+,\cdot)$ no es un cuerpo ordenado.

1. El cuerpo de los números complejos

Conjugado de un número complejo

Dado $z = x + iy$, el **conjugado** de z es $\bar{z} = x - iy$.

Propiedades

1. Es un isomorfismo en $\mathbb{C}$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 / z_2} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2 \end{array}\right\} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

2. $\bar{\bar{z}} = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
3. $\bar{z} = z$ si y sólo si $z \in \mathbb{R}$.
4. $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ y $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$, $\quad \forall z \in \mathbb{C}$

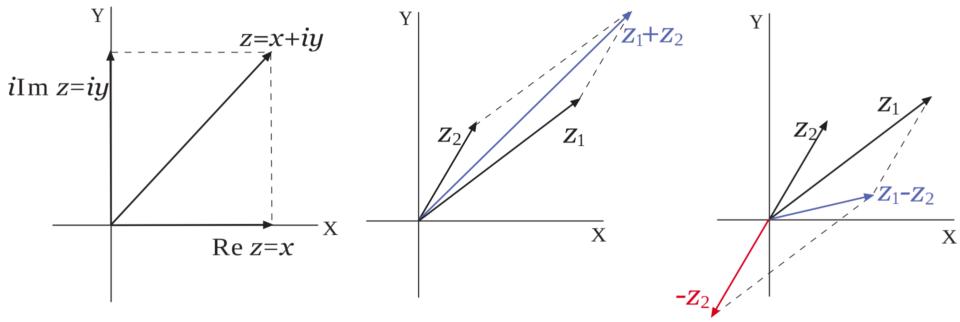
La aplicación conjugado, $z \longrightarrow \bar{z}$, es un isomorfismo del cuerpo $\mathbb{C}$ que deja fijo cada número real y, por tanto, al subcuerpo $\mathbb{R}$

2. El espacio vectorial normado de los números complejos

$$\begin{array}{l} \text{Si } \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ \qquad (\lambda, z) \longrightarrow \lambda \cdot z \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda \cdot (\mu \cdot z) = (\lambda \cdot \mu) \cdot z, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ \forall z \in \mathbb{C} \\ 1 \cdot z = z, \ \forall z \in \mathbb{C} \\ \lambda \cdot (z_1 + z_2) = \lambda \cdot z_1 + \lambda \cdot z_2, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ (\lambda + \mu) \cdot z = \lambda \cdot z + \mu \cdot z, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ \forall z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

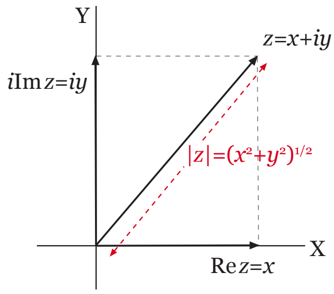
$(\mathbb{C},+,\cdot)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $(\mathbb{R},+,\cdot)$

Representación gráfica de vectores y su suma



Módulo de un número complejo

Dado $z = x + iy$, el **módulo** de z es $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Propiedades

1. $|z| \geq 0,\ \ \forall z \in \mathbb{C}$. Además, $|z| = 0 \iff z = 0$.
2. $\left.\begin{array}{l} \operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z| \\ \operatorname{Im} z \leq |\operatorname{Im} z| \leq |z| \end{array}\right\} \forall z \in \mathbb{C}$.
3. $|z| = |\bar{z}| = |-z|,\ \ \forall z \in \mathbb{C}$.
4. $|z|^2 = z \cdot \bar{z},\ \ \forall z \in \mathbb{C}$. En consecuencia, $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2,\ \forall z \neq 0$.
5. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, se tiene $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ y si $z_2 \neq 0$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

   En particular, $|\lambda \cdot z| = |\lambda| \cdot |z|,\ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall z \in \mathbb{C}$
6. Desigualdad triangular: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,\ \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
7. Desigualdad triangular inversa: $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|,\ \ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

De las propiedades 1, 5 y 6 resulta:

La aplicación $z \to |z|$ define la norma euclídea en el e. v. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

La métrica asociada a la norma euclídea en $\mathbb{C}$, **métrica euclídea**, es

$$\begin{array}{l} d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ \quad (z_1, z_2) \to d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} 1.\ d(z_1, z_2) \geq 0,\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \\ \quad d(z_1, z_2) = 0 \iff z_1 = z_2 \\ 2.\ d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1),\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\ 3.\ d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \end{cases}$$

$\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ son e. v. normados equivalentes: $(\mathbb{C}, +, \cdot, |\ |) \approx (\mathbb{R}^2, +, \cdot, \|\ \|_2)$
$\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ son espacios métricos equivalentes: $(\mathbb{C}, d) \approx (\mathbb{R}^2, d_2)$

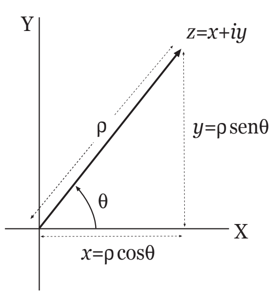
donde $\|\ \|_2$ y d_2 denotan la norma y la métrica euclídeas en $\mathbb{R}^2$, y $\cdot$ el producto por escalares.

3 Formas polar y exponencial de un número complejo

Coordenadas polares

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ son **coordenadas polares** de z los números reales: $\rho \in \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ y $\theta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\boxed{x = \rho \cos\theta \ \text{ e } \ y = \rho \operatorname{sen}\theta}$$



- $\rho = |z| \equiv$ distancia del punto z al origen.
- $\theta \equiv$ un ángulo entre el eje real positivo y el vector z

Coordenadas polares (ρ, θ) de $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$

$x \neq 0$	$x = 0$
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} & \text{si } x > 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} + (2k-1)\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} & \text{si } x < 0 \end{cases}$	$\rho = \lvert y \rvert$ $\theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} & \text{si } y > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} + (2k-1)\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} & \text{si } y < 0 \end{cases}$

Argumentos de un número complejo

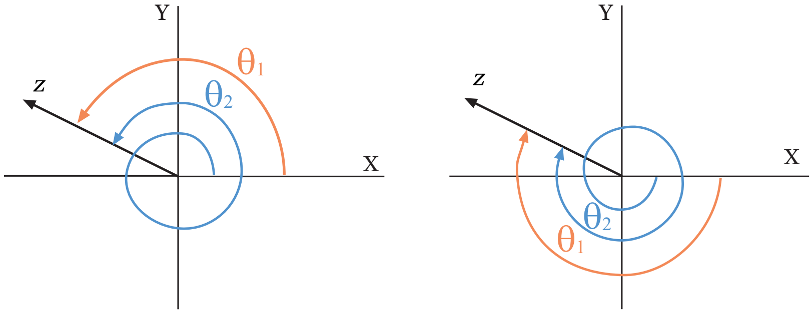
Si $z \in \mathbb{C}^*$, el **argumento** de z es el conjunto de todos los ángulos que determinan z,

$$\arg z = \left\{ \theta \in \mathbb{R} \; : \; \cos\theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|} \right\},$$

y cada $\theta \in \arg z$ es un **valor o determinación del argumento** de z.

Representación de valores $\theta \in \arg z$

Desde el semieje real positivo, **eje polar**, se gira en sentido horario si $\theta > 0$ (izquierda) y antihorario si $\theta < 0$ (derecha):



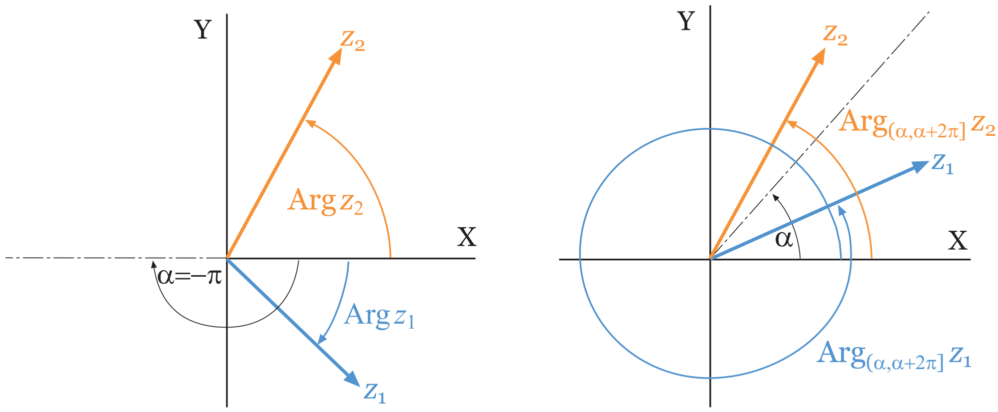
Sea $z \in \mathbb{C}^*$. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ existe un único $\theta_\alpha \in \arg z \cap (\alpha, \alpha + 2\pi]$. Denotamos

$$\boxed{\theta_\alpha =: \operatorname{Arg}_{(\alpha,\alpha+2\pi]} z}$$

Análogamente para $[\alpha, \alpha + 2\pi)$. Si $\alpha = -\pi$ se denota

$$\boxed{\operatorname{Arg}_{(\pi,\pi]} z =: \operatorname{Arg} z}$$

y se llama **valor principal o argumento principal** de z.



Forma polar[2] y forma exponencial de un número complejo.

Sea $z \in \mathbb{C}^*$ tal que $|z| = \rho$ y $\theta \in \arg z$

Forma polar

$z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$z = \rho(\cos(\theta + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2k\pi)),\ k \in \mathbb{Z}$

Aplicando la **fórmula de Euler, $e^{i\theta} =: \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$**, que tomamos como definición:

Forma exponencial

$$z = \rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

[2]Algunos autores utilizan la notación ρ_θ, la dada aquí es binómica pero sirve igualmente por dejar a la vista el módulo y el argumento

Propiedades de los argumentos

Proposición 1

1. $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}\, e^{i\theta_2} \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.
2. $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ y $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$.
3. $e^{i(\theta_1-\theta_2)} = \dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

Proposición 2

1. Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $\theta_1 \in \arg z_1$ y $\theta_2 \in \arg z_2$ entonces
$$\theta_1 + \theta_2 \in \arg(z_1\, z_2) \ \text{ y } \ z_1 \cdot z_2 = |z_1|\, |z_2|\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$
$$\theta_1 - \theta_2 \in \arg(z_1/z_2) \ \text{ y } \ z_1/z_2 = |z_1|\, |z_2|^{-1}\, e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$
2. Si $z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \arg z$ entonces
$$-\theta \in \arg \bar{z} \cap \arg(z^{-1}), \ \bar{z} = |z|\, e^{-i\theta} \quad \text{y} \quad z^{-1} = |z|^{-1}\, e^{-i\theta}$$

Observación.

Si $\theta_1 = \operatorname{Arg} z_1$ y $\theta_2 = \operatorname{Arg} z_2$, en general, $\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 \neq \operatorname{Arg}(z_1\, z_2) \\ \theta_1 - \theta_2 \neq \operatorname{Arg}(z_1/z_2). \end{cases}$

Sin embargo, se tiene lo siguiente

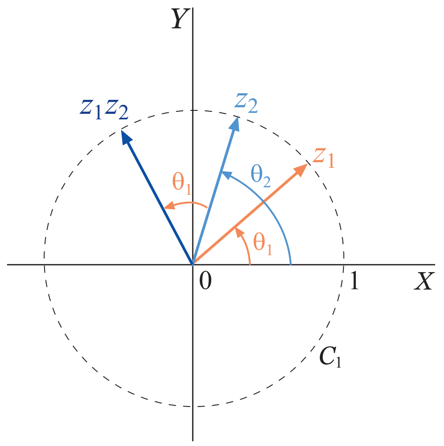
Proposición 3

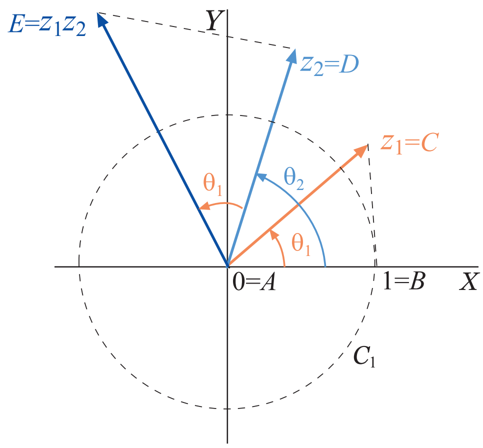
1. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{Arg}(z_1\, z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi$.
2. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi$.
3. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ entonces $\operatorname{Arg}(z^{-1}) = -\operatorname{Arg} z$.

Si $A, B \subset \mathbb{C}$ definiendo $A + B = \{a + b : a \in A \text{ y } b \in B\}$ y $-B = \{-b : b \in B\}$, podemos escribir:
$$\arg(z_1\, z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$
$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$$

Interpretación geométrica del producto de números complejos

Aplicando propiedades de los argumentos:





4. Potencias y raíces de números complejos

Potencias de un número complejo

Sean $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, la **potencia n-ésima** de z es el número complejo $z^n = z \cdot z \overset{n)}{\cdots} z$. Si $z \neq 0$, se define $z^0 = 1$.

Proposición 1.

1. $\forall z \in \mathbb{C}$ y $\forall n, m \in \mathbb{N}$ se verifica $\begin{cases} z^n \cdot z^m = z^{n+m} \\ (z^n)^m = z^{nm} \end{cases}$
2. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$ se verifica $z_1^n \cdot z_2^n = (z_1 \cdot z_2)^n$.
3. Si $z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \arg z$ entonces $z^n = |z|^n e^{in\theta}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $|z| = 1$, entonces

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \\ (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta) \end{cases}$$ **Fórmula de Moivre**

Raíces de un número complejo

Dado $n \in \mathbb{N}$, se dice que $w \in \mathbb{C}$ es **raíz n-ésima** de $z \in \mathbb{C}$ si $w^n = z$. Se denota

$$z^{1/n} = \{w \in \mathbb{C} : w^n = z\}.$$

Proposición 2. Dados $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}^*$, se cumple

$$z^{1/n} = \left\{ \sqrt[n]{|z|}\, e^{i(\theta+2k\pi)/n} \;:\; \begin{array}{l} \theta \in \arg z \\ k = k_0, k_0+1, \ldots, k_0+(n-1) \ \text{ y } \ k_0 \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

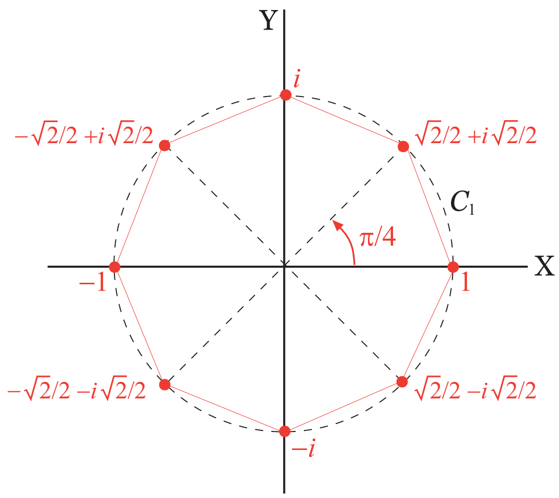
Observaciones

- Si $z = 0$, la única raíz n-ésima de z es 0, que es la única solución de $w^n = 0$.
- Si $n = 2$ y $z \in \mathbb{C}^*$, entonces

$$z^{1/2} = \left\{ \pm\sqrt{|z|} e^{i(Arg z)/2} \right\}$$

- Gráficamente las raíces n-ésimas de z se distribuyen uniformemente sobre la circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt[n]{|z|}$, siendo la amplitud del sector determinado por dos raíces consecutivas de $2\pi/n$ radianes.

Representación gráfica de las raíces octavas de la unidad.



5. Topología del plano complejo

Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$ tal que $r > 0$. Se definen los discos de centro z_0 y radio r:

Disco abierto: $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$
Disco cerrado: $\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$
Disco abierto perforado: $D^*(z_0, r) = D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$

Clasificación de puntos respecto a un conjunto Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$.

- z_0 es un **punto interior** de Ω si $\exists r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset \Omega$.
  Conjunto de puntos interiores de Ω: $\mathring{\Omega} \equiv$ **interior de Ω**
- z_0 es un **punto aislado** de Ω si $\exists r > 0$ tal que $D(z_0, r) \cap \Omega = \{z_0\}$.
  Conjunto de puntos aislados de Ω: $\mathbf{I}(\Omega)$.
- z_0 es un **punto de acumulación** de Ω si $D^*(z_0, r) \cap \Omega \neq \emptyset$, $\forall r > 0$.
  Conjunto de puntos de acumulación de Ω: Ω'.

- z_0 es un **punto frontera** de Ω si $\forall r > 0$ se verifica $\begin{cases} D(z_0, r) \cap \Omega \neq \emptyset \\ D(z_0, r) \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega) \neq \emptyset. \end{cases}$
  Conjunto de puntos frontera de Ω: $\mathrm{Fr}(\Omega) \equiv$ **frontera de Ω.**
- z_0 es un **punto adherente** de Ω si $\forall r > 0$ se verifica $D(z_0, r) \cap \Omega \neq \emptyset$.
  Conjunto de puntos adherentes de Ω: $\bar{\Omega} \equiv$ **adherencia o clausura de Ω.**
- z_0 es un **punto exterior** de Ω si es un punto interior de $\mathbb{C} \setminus \Omega$.
  Conjunto de puntos exteriores de Ω: $\mathrm{Ext}\,\Omega \equiv$ **exterior de Ω.**

Propiedades Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, se verifica:

1. $\mathring{\Omega} \subset \Omega \subset \bar{\Omega}$. **2.** $\mathring{\Omega} \subset \Omega' \subset \bar{\Omega}$.
3. $I(\Omega) \subset \mathrm{Fr}(\Omega) \subset \bar{\Omega}$ e $I(\Omega) \cap \mathring{\Omega} = \emptyset$.
4. $\mathbb{C} = \mathring{\Omega} \cup \mathrm{Ext}(\Omega) \cup \mathrm{Fr}(\Omega)$ y estos conjuntos son disjuntos dos a dos.
5. $\bar{\Omega} = \Omega' \cup I(\Omega)$ y esta unión es disjunta, esto es, $\Omega' \cap I(\Omega) = \emptyset$.
6. $\bar{\Omega} = \mathring{\Omega} \cup \mathrm{Fr}(\Omega)$ y esta unión es disjunta, esto es, $\mathring{\Omega} \cap \mathrm{Fr}(\Omega) = \emptyset$.
7. $\bar{\Omega} = \Omega' \cup \Omega$.

Espacios topológicos generales

Dado un conjunto $X \neq \emptyset$, una colección T de subconjuntos de X, esto es $T \subset \mathcal{P}(X)$, es una **topología** en X si verifica:

1. $\emptyset, X \in T$.
2. La unión arbitraria de elementos de T es un elemento de T.
3. La intersección finita de elementos de T es un elemento de T.

Se denominan: el par (X, T) **espacio topológico (e.t.)**, todo elemento de T **conjunto abierto**, y el complementario de un conjunto abierto **conjunto cerrado**.

Proposición 1. Si (X, T) e. t.
1. $\emptyset$ y X son conjuntos cerrados.
2. La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.
3. La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Proposición 2. Sean (X, T) un e. t. y $S \subset X$. La familia $T_S = \{S \cap A : A \in T\}$ es una topología en S, denominada **topología relativa** a S respecto a (X, T).

La familia
$$\mathcal{T} = \left\{ \Omega \subset \mathbb{C} \,:\, \text{si } z \in \Omega\ \exists r_z > 0 \text{ verificando } D(z, r_z) \subset \Omega \right\}$$
es una topología en $\mathbb{C}$ denominada **topología usual o estándar** de $\mathbb{C}$

Algunas propiedades

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto cerrado $\Longleftrightarrow \Omega = \bar{\Omega} \Longleftrightarrow \mathrm{Fr}(\Omega) \subset \Omega \Longleftrightarrow \Omega' \subset \Omega$.
- Dado $\Omega \subset \mathbb{C}$, en el conjunto ordenado $(\mathcal{P}(\mathbb{C}), \subset)$, $\mathring{\Omega}$ es el mayor abierto contenido en Ω y $\bar{\Omega}$ es el menor cerrado que contiene a Ω.
- Existen conjuntos que no son ni abiertos ni cerrados: El conjunto $\Omega = \bar{D}(z_0, R) \setminus \{z_0\}$ verifica $\mathring{\Omega} = D^*(z_0, R) \neq \Omega$ y $\bar{\Omega} = \bar{D}(z_0, R) \neq \Omega$.
- Todo disco abierto es un conjunto abierto, todo disco cerrado es un conjunto cerrado. Toda circunferencia es un conjunto cerrado.

Compacidad

Definición. Sea (X, T) e.t. Un conjunto $K \subset X$ es **compacto** si de cualquier familia de conjuntos abiertos $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ cuya unión contiene a K se puede extraer una subfamilia finita $\{A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_N}\}$ cuya unión también contiene a K. Si $K = X$ se dice que (X, T) es un espacio compacto.

Definición. $\Omega \subset \mathbb{C}$ es **acotado** si $\exists M > 0$ tal que $\forall z \in \Omega$ se verifica $|z| \leq M$.

Dos propiedades de acotación

- Todo subconjunto de un conjunto acotado es acotado.
- La unión finita de conjuntos acotados es acotado.

Teorema de Heine-Borel

Un conjunto $K \subset \mathbb{C}$ es compacto en el espacio topológico $(\mathbb{C}, \mathcal{T})$ si y sólo si K es un conjunto cerrado y acotado.

Conexión

Definiciones.

- Sea (X, T) e.t., $S \subset X$ es **conexo** si **no existen** $A, B \in T$ tales que
  1. $S \subset A \cup B$.
  2. $S \cap A \neq \emptyset$ y $S \cap B \neq \emptyset$.
  3. $S \cap A \cap B = \emptyset$.
- Si existen $A, B \in T$ cumpliendo 1,2 y 3, se dice que S es **no conexo** y que A y B separan o desconectan S; también se dice que A y B es una **separación** de S.
- Sea S no es conexo. Un conjunto conexo $C \subset S$ es una **componente conexa** de S si no existe ningún conjunto conexo $\tilde{C}$ tal que $C \subsetneq \tilde{C} \subsetneq S$.

Resultado

En un espacio topológico (X, T), la unión arbitraria de conjuntos conexos con un punto en común es un conjunto conexo.

Definiciones (segmentos y poligonales)

- Dados $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq w$, el **segmento de extremos z y w** (cerrado) es el conjunto $[z, w] = \{z + \lambda(w - z) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$.
- La **poligonal de vértices $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$**, siendo éstos distintos dos a dos salvo quizás z_1 y z_n, es el conjunto $P = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup \ldots \cup [z_{n-1}, z_n]$. Se dice que P une z_1 (origen) con z_n (extremo final). P es **cerrada** si $z_1 = z_n$. P es **simple** si las únicas intersecciones entre los segmentos son las de sus vértices.

Algunos conjuntos conexos

1. En todo espacio topológico (X, T) el conjunto vacío es conexo y cualquier conjunto unitario $S = \{x\} \subset X$ es un conjunto conexo.
2. En $\mathbb{C}$, todo segmento es un conjunto conexo.
3. En $\mathbb{C}$, toda poligonal es un conjunto conexo.

Definiciones (convexos y conexos por poligonales)

- $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto **convexo** si $\forall z, w \in \Omega$ se verifica que $[z, w] \subset \Omega$.
- $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un conjunto **conexo por poligonales** si $\forall z, w \in \Omega$ existe una poligonal $P \subset \Omega$ que une z con w.

Proposición 3

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ se cumple:

1. Ω convexo $\Longrightarrow$ Ω es conexo por poligonales $\Longrightarrow$ Ω es conexo.
2. Si Ω es abierto entonces
$$\Omega \text{ es conexo} \Longleftrightarrow \Omega \text{ es conexo por poligonales.}$$

Consecuencia

1. $\mathbb{C}$ es conexo.
2. Los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez en $\mathbb{C}$ con su topología usual son $\emptyset$ y $\mathbb{C}$.

Dominios

1. Un conjunto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$ es un **dominio** si es abierto y conexo.
1. Un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ es **simplemente conexo** si para cualquier poligonal simple y cerrada $P \subset \Omega$ se verifica que $\mathrm{Int}(P) \subset \Omega$.
2. Si un dominio no es simplemente conexo se dice que es **múltiplemente conexo**.

Teorema de Jordan para poligonales

Si $P \subset \mathbb{C}$ es una poligonal simple y cerrada, entonces $\mathbb{C} \setminus P$ es unión de dos componentes conexas, una acotada que denotamos $\mathrm{Int}(P)$, y otra no o acotada, que denotamos $\mathrm{Ext}(P)$, siendo P la frontera de ambas.

6. El plano complejo ampliado y la esfera de Riemann

Proposición 1. Dado el conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, donde ∞ representa un elemento que no pertenece a $\mathbb{C}$, la familia

$$\mathcal{T}_\infty = \{\Omega : \Omega \in \mathcal{T} \vee \Omega = \mathbb{C}_\infty \setminus K \text{ con } K \subset \mathbb{C} \text{ compacto}\}$$

es una topología en $\mathbb{C}_\infty$ tal que $\mathcal{T}_\infty|_{\mathbb{C}} = \mathcal{T}$.

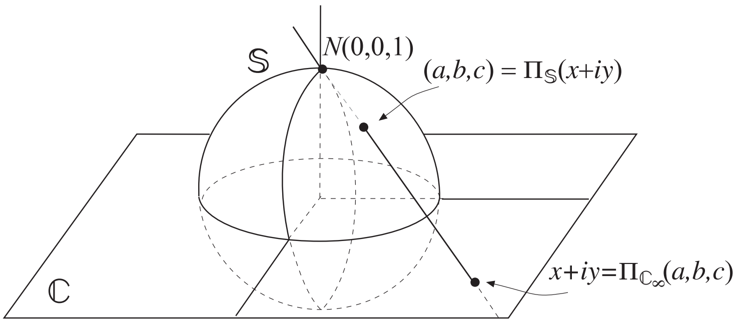
Proposición 2

$(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ es un espacio compacto y conexo.

La esfera de Riemann y la proyección estereográfica

$\mathbb{C}_\infty$ se identifica con la esfera de Riemann $\mathbb{S} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a^2+b^2+c^2 = 1\}$ mediante la proyección estereográfica $\Pi_{\mathbb{C}_\infty} : \mathbb{S} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ definida

$$\Pi_{\mathbb{C}_\infty}(a,b,c) = \begin{cases} \dfrac{a}{1-c} + i\dfrac{b}{1-c} & \text{si } (a,b,c) \in \mathbb{S} \setminus \{(0,0,1)\}, \\ \infty & \text{si } (a,b,c) = (0,0,1). \end{cases}$$



Si $\Pi_{\mathbb{S}} = \Pi_{\mathbb{C}_\infty}^{-1}$, se tiene $\Pi_{\mathbb{S}}(z) = \begin{cases} \left(\dfrac{2\,\mathrm{Re}\, z}{|z|^2+1}, \dfrac{2\,\mathrm{Im}\, z}{|z|^2+1}, \dfrac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) & \text{si } z \in \mathbb{C}, \\ (0,0,1) & \text{si } z = \infty. \end{cases}$

Se puede demostrar que$(\mathbb{C}_\infty, \mathcal{T}_\infty)$ y $(\mathbb{S}, \mathcal{T}_u^3|_{\mathbb{S}})$, donde $\mathcal{T}_u^3|_{\mathbb{S}}$ denota la topología usual de $\mathbb{R}^3$, son topológicamente equivalentes.

$\Pi_{\mathbb{S}}$ permite definir

$$d_\infty(z_1,z_2) = d_3(\Pi_{\mathbb{S}}(z_1), \Pi_{\mathbb{S}}(z_2)) = \begin{cases} \dfrac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{|z_1|^2+1}\sqrt{|z_2|^2+1}} & \text{si } z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ \dfrac{2}{\sqrt{|z_1|^2+1}} & \text{si } z_1 \in \mathbb{C} \text{ y } z_2 = \infty, \\ 0 & \text{si } z_1 = z_2 = \infty. \end{cases}$$

donde d_3 denota la distancia euclídea en $\mathbb{R}^3$.

Algunas propiedades de d_∞

1. d_∞ es una distancia en $\mathbb{C}_\infty$ denominada **distancia cordal**.
2. d_∞ es acotada y alcanza su mayor valor si $\Pi_{\mathbb{S}}(z_1)$ y $\Pi_{\mathbb{S}}(z_2)$ son puntos antípodas sobre $\mathbb{S}$: $d_\infty(0,\infty) = d_3((0,0,-1),(0,0,1)) = 2$.
3. La topología que induce d_∞ en $\mathbb{C}_\infty$ es $\mathcal{T}_\infty$.
4. La distancia cordal no extiende la métrica euclídea; además no existe ninguna métrica en $\mathbb{C}_\infty$ que induzca la topología $\mathcal{T}_\infty$ y, a la vez, extienda la métrica euclídea de $\mathbb{C}$.