7. Integral de Riemann

Análisis de Variable Real

2014–2015

Resumen

Aquí se estudiará el concepto de integral, que está especialmente relacionado con el geométrico del cálculo de áreas, aunque tiene también numerosas aplicaciones a la física. Aunque hay muchas teorías de integración, nosotros estudiaremos la más modesta de ellas, que es la de Riemann. Pondremos especial interés en el llamado Teorema Fundamental del Cálculo, que establece la relación entre la noción de integral y la de derivada.

Índice

Vamos a dar una definición precisa de la integral de una función definida en un intervalo. Este tiene que ser un intervalo cerrado y acotado, es decir, $[a, b]$ con $a < b$, y la definición que daremos de integral solo se aplica a funciones acotadas, y no a todas, sino a las funciones que llamaremos integrables.

En la segunda parte de este tema veremos cómo, en un sentido más amplio, podemos hablar de integrales de funciones no acotadas o definidas en intervalos no acotados.

Seguimos básicamente el desarrollo que puede verse, entre otros muchos textos, en [5, cap. VI, pág. 184 y sigs.] o en [1, cap. 6, pág. 251 y sigs.]. Como complemento puede consultarse [4, cap. 12]. La evolución histórica de la integral está muy bien contada (sobre todo la aportación de Newton y Leibniz) en [2]; de carácter más técnico es el libro [3].

1. Construcción de la integral y propiedades generales

1.1. Definición (de Darboux) de la integral de Riemann

Particiones

Definición 7.1.

(I) Una *partición* de un intervalo $[a, b]$ es un conjunto de puntos de $[a, b]$ que incluye a los extremos. Una partición P la representamos ordenando sus puntos de menor a mayor, comenzando en a y terminando en b:

$$P = \{x_i\}_{i=0}^n = \{\, a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \,\}.$$

(II) Una partición como la indicada divide al intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de longitud $x_i - x_{i-1}$, llamados *intervalos de la partición* P.

(III) El conjunto de las particiones de $[a, b]$ lo indicamos mediante la notación $\mathcal{P}([a, b])$.

Sumas de Darboux

Definición 7.2. Sea f una función acotada definida en $[a, b]$, y sea $P \in \mathcal{P}([a, b])$, $P = \{\, a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \,\}$. Sean, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$m_i(f) = \text{ínf}\{\, f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \,\}, \qquad M_i(f) = \sup\{\, f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \,\}.$$

(I) La *suma inferior* de f asociada a P se define como

$$\underline{\mathrm{S}}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}).$$

(II) La *suma superior* de f asociada a P se define como

$$\overline{\mathrm{S}}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}).$$

Relación entre la suma superior e inferior de una partición

No lo hemos hecho aún, pero supongamos que conseguimos dar una definición convincente del área A que hay por debajo de la gráfica de una función f. Tal como hemos definido las sumas superiores e inferiores, $\overline{\mathrm{S}}(f, P)$ es una estimación por exceso de A. En cambio, $\underline{\mathrm{S}}(f, P)$ es una estimación de dicha área, pero por defecto. Es decir, deberá cumplirse que

$$\underline{\mathrm{S}}(f, P) \leqslant A \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, P).$$

Es decir, la suma inferior debe ser menor que la suma superior. Como no podemos utilizar el área A para probar esto, porque aún no la hemos definido, deberemos probar este hecho de otra manera, que no implique esta área.

Lema 7.3. *Sea f una función acotada en $[a, b]$, y sea $P \in \mathcal{P}([a, b])$. Entonces*

$$\underline{\mathrm{S}}(f, P) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, P).$$

Demostración. Sea $P = \{ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \}$. Obviamente, si

$$m_i(f) = \text{ínf}\{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}, \quad M_i(f) = \sup\{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \},$$

se tendrá $m_i(f) \leqslant M_i(f)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, así que

$$\underline{\mathrm{S}}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \overline{\mathrm{S}}(f, P). \qquad \square$$

Refinamiento de una partición

El Lema 7.3 se puede generalizar. Si A es el área debajo de la gráfica de la función f y P y Q son dos particiones, entonces deberá cumplirse que

$$\underline{\mathrm{S}}(f, P) \leqslant A \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, Q).$$

Es decir, *cualquier* suma inferior es menor que *cualquier* suma superior. De nuevo, el argumento que acabamos de mostrar no es válido, porque otra vez estamos implicando el área A, que aún no hemos definido. Para probar lo mismo sin utilizar A, debemos introducir un concepto auxiliar.

Definición 7.4. Sean P y Q dos particiones de un intervalo $[a, b]$ decimos que Q es un *refinamiento* de P si $P \subset Q$, es decir, si Q resulta de añadir puntos a P.

Lema 7.5. *Si P y Q son particiones de un intervalo $[a, b]$ y Q es un refinamiento de P, entonces*

$$\underline{\mathrm{S}}(f, P) \leqslant \underline{\mathrm{S}}(f, Q) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, Q) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, P).$$

Demostración. Basta probarlo en el caso en que Q tiene un elemento más que P; para el caso general bastará reiterar el razonamiento, añadiendo en cada paso un punto nuevo hasta obtener Q. Pongamos, pues, $Q = P \cup \{c\}$, con

$$P = \{\, a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \,\}$$

y

$$Q = \{\, a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < c < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \,\}.$$

Se trata de probar que

$$\underline{\mathrm{S}}(f, P) \leqslant \underline{\mathrm{S}}(f, Q) \qquad \text{y} \qquad \overline{\mathrm{S}}(f, Q) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, P).$$

Probaremos solo la primera desigualdad, por ser la otra similar.

Para $i = 1, 2, \ldots, n$, sean

$$m_i(f) = \operatorname{ínf}\{\, f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \,\},$$

y sean también

$$m_-(f) = \operatorname{ínf}\{\, f(x) \mid x \in [x_{k-1}, c] \,\} \quad \text{y} \quad m_+(f) = \operatorname{ínf}\{\, f(x) \mid x \in [c, x_k] \,\}.$$

Entonces $m_k(f) \leqslant m_-(f)$ y $m_k(f) \leqslant m_+(f)$. (De hecho, se cumple que $m_k(f) = \operatorname{mín}\{m_-(f), m_+(f)\}$, pero no utilizaremos este hecho.) En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{S}}(f, Q) - \underline{\mathrm{S}}(f, P) &= m_-(f)(c - x_{k-1}) + m_+(f)(x_k - c) \\
&\quad - m_k(f)(x_k - x_{k-1}) \\
&\geqslant m_k(f)(c - x_{k-1} + x_k - c) \\
&\quad - m_k(f)(x_k - x_{k-1}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

Relación entre las sumas superiores en inferiores

Lema 7.6. *Sean P y Q dos particiones de un intervalo $[a, b]$, y sea f una función acotada en $[a, b]$. Entonces*

$$\underline{\mathrm{S}}(f, P) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, Q).$$

Demostración. Si consideramos la partición $P \cup Q$ resultante de combinar los puntos de P con los de Q, dicha partición será un refinamiento común de P y de Q, así que, por el Lema 7.5,

$$\underline{\mathrm{S}}(f, P) \leqslant \underline{\mathrm{S}}(f, P \cup Q) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, P \cup Q) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, Q).$$

□

Integral superior e inferior

Representemos en una figura la gráfica de la función f y las sumas superior e inferior. Consideremos la dos zonas que surgen como diferencia entre el área A delimitada por la función f y la suma inferior o la suma superior. Parece intuitivamente claro que si tomamos una partición suficientemente nutrida de puntos podemos conseguir que estas zonas sean muy pequeñas, de forma que tanto la suma superior como la inferior sean arbitrariamente próximas al área A. Esto motiva la definición siguiente.

Definición 7.7. Sea f una función acotada en $[a, b]$.

(I) Se define la *integral inferior* de f como

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\, \underline{S}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}([a, b]) \,\}.$$

(II) Se define la *integral superior* de f como

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{\, \overline{S}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}([a, b]) \,\}.$$

Relación entre integral superior e inferior

Proposición 7.8. *Sea f una función acotada en $[a, b]$. Entonces las integrales superior e inferior de f siempre existen y son finitas. Además,*

$$\underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f.$$

Demostración. Según el Lema 7.6, si Q es una partición cualquiera de $[a, b]$, el conjunto

$$\{\, \underline{\mathrm{S}}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}([a, b]) \,\}$$

está acotado superiormente por $\overline{\mathrm{S}}(f, Q)$. Por tanto, existe y es finita

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\, \underline{\mathrm{S}}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}([a, b]) \,\}$$

y además

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\, \underline{\mathrm{S}}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}([a, b]) \,\} \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, Q).$$

Como esto es cierto para cualquier partición Q, resulta que $\underline{\int_a^b} f$ es una cota inferior del conjunto

$$\{ \overline{\mathrm{S}}(f, Q) \mid Q \in \mathcal{P}([a, b]) \},$$

así que también existe y es finita

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{ \underline{\mathrm{S}}(f, Q) \mid Q \in \mathcal{P}([a, b]) \}$$

y además

$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{ \underline{\mathrm{S}}(f, Q) \mid Q \in \mathcal{P}([a, b]) \} \geqslant \underline{\int_a^b} f. \qquad \square$$

Funciones integrables

Definición 7.9. Sea f una función acotada en $[a, b]$. Diremos que f es *integrable Riemann* (en el sentido de Darboux), o simplemente *integrable*, si

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

En tal caso, al valor común de dichas integrales recibe el nombre de *integral* (de Riemann) de f en $[a, b]$ y se denota

$$\int_a^b f \qquad \text{o} \qquad \int_a^b f(x)\, dx.$$

Ejemplos.

- $\displaystyle\int_a^b c\, dx = c(b - a).$

  Dada una partición $P = \{ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \}$, observemos que, para $i = 1, 2, \ldots, n$,

  $$m_i(f) = \text{ínf}\{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \} = c,$$
  $$M_i(f) = \sup\{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \} = c.$$

  Por tanto,

  $$\underline{\mathrm{S}}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c(b - a),$$
  $$\overline{\mathrm{S}}(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) = c \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = c(b - a).$$

Se sigue, por último, que

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\, \underline{\mathrm{S}}(f,P) \mid P \in \mathcal{P}([a,b])\,\} = c(b-a),$$
$$\overline{\int_a^b} f = \text{ínf}\{\, \overline{\mathrm{S}}(f,P) \mid P \in \mathcal{P}([a,b])\,\} = c(b-a).$$

- $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2-a^2).$

Para simplificar los cálculos, consideraremos solamente las particiones que dividen el intervalo $[a,b]$ en intervalos de la misma longitud. Es decir, dado un número natural n, consideremos la partición

$$P_n = \{\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,\},$$

donde $x_i = a + i(b-a)/n$, para cada $i = 0,1,2,\ldots,n$. Se tiene

$$M_i(f) = \sup\{\, f(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\,\} = x_i,$$
$$m_i(f) = \text{ínf}\{\, f(x) \mid x \in [x_{i-1},x_i]\,\} = x_{i-1}.$$

Obsérvese además que siempre es $x_i - x_{i-1} = (b-a)/n$. Se obtiene por tanto

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{S}}(f,P_n) &= \sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n x_i \\
&= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n \Big(a + i\frac{b-a}{n}\Big) \\
&= \frac{b-a}{n}\cdot na + \Big(\frac{b-a}{n}\Big)^2 \sum_{i=1}^n i \\
&= (b-a)a + \Big(\frac{b-a}{n}\Big)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&= (b-a)a + \frac{1}{2}(b-a)^2\Big(1+\frac{1}{n}\Big).
\end{aligned}$$

Unos cálculos similares nos indican que

$$\underline{\mathrm{S}}(f,P_n) = (b-a)a + \frac{1}{2}(b-a)^2\Big(1-\frac{1}{n}\Big).$$

Obsérvese que no hemos calculado en principio todas las sumas inferiores y superiores, sino solo *algunas* de ellas. Sin embargo, como vamos a ver, esto nos basta para calcular de forma indirecta las integrales inferior y superior. En efecto, para todo n se tiene

$$\underline{\int_a^b} f \geqslant \underline{\mathrm{S}}(f, P_n) = (b-a)a + \frac{1}{2}(b-a)^2\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)$$
$$\overline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, P_n) = (b-a)a + \frac{1}{2}(b-a)^2\Big(1 + \frac{1}{n}\Big).$$

Pasando ahora al límite en n, obtenemos que

$$\underline{\int_a^b} f \geqslant (b-a)a + \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),$$
$$\overline{\int_a^b} f \leqslant (b-a)a + \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{1}{2}(b^2 - a^2),$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{1}{2}(b^2 - a^2) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Por tanto, f es integrable y

$$\int_a^b f = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

- $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$, $0 \leqslant a < b$.

  Tomemos las mismas particiones P_n, $n \in \mathbb{N}$, que en el ejemplo anterior. Ahora tenemos que

$$M_i(f) = \sup\{\, f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\,\} = x_i^2,$$
$$m_i(f) = \operatorname{ínf}\{\, f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\,\} = x_{i-1}^2$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. En consecuencia

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{S}}(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(a + i\frac{b-a}{n}\Big)^2 \\
&= \frac{b-a}{n} \cdot na^2 + 2a\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^2 \sum_{i=1}^{n} i + \Big(\frac{b-a}{n}\Big)^3 \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= (b-a)a^2 + 2a\Big(\frac{b-a}{n}\Big)^2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \\
&\quad + \Big(\frac{b-a}{n}\Big)^3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= (b-a)a^2 + a(b-a)^2\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) \\
&\quad + \frac{1}{6}(b-a)^3\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\Big(2 + \frac{1}{n}\Big).
\end{aligned}$$

Cálculos similares muestran que

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{S}}(f, P_n) = (b-a)a^2 + a(b-a)^2\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) \\
+ \frac{1}{6}(b-a)^3\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(2 - \frac{1}{n}\Big).
\end{aligned}$$

Consideraciones parecidas a las hechas en el ejemplo anterior muestran que debe entonces cumplirse

$$\frac{1}{3}(b^3 - a^3) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant \frac{1}{3}(b^3 - a^3),$$

con lo que la función f es integrable en $[a, b]$ y además $\int_a^b f = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$.

- Si $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$ entonces

$$\overline{\int_a^b} f = b - a, \qquad \underline{\int_a^b} f = 0.$$

Por tanto, f no es integrable en ningún intervalo no trivial $[a, b]$.

En efecto, basta observar que, dada cualquier partición $P = \{ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \}$, se tiene

$$\begin{aligned} M_i(f) &= \sup\{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \} = 1, \\ m_i(f) &= \text{ínf}\{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \} = 0, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{S}}(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = b - a, \\ \underline{\mathrm{S}}(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = 0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\overline{\int_a^b} f = b - a \neq 0 = \underline{\int_a^b} f.$$

- La función de Thomae, definida en $[0, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{0, 1\}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \quad \text{m. c. d.}(p, q) = 1. \end{cases}$$

es integrable.

Para ver esto, sea $P_n = \{ 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1 \}$ la partición de $[0, 1]$ que divide este intervalo en n intervalos iguales de longitud $1/n$. Es obvio que

$$m_i(f) = \text{ínf}\{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \} = 0$$

para todo $x = 1, 2, \cdots, n$. Por tanto,

$$\underline{\mathrm{S}}(f, P_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = 0.$$

Veamos qué ocurre con la suma superior. Dado un ε, $0 < \varepsilon < 1$, consideremos el conjunto

$$E = \{ x \in [0, 1] \mid f(x) > \varepsilon/2 \}.$$

Ya hemos visto que este conjunto es siempre finito. Sea k su número de elementos. Elijamos $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \varepsilon/2k$.

Dividiremos ahora los índices de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ en dos clases. Sean

$$\begin{aligned} B &= \{\, i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \mid E \cap [x_{i-1}, x_i] = \varnothing \,\}, \\ M &= \{\, i \in \{1, 2, 3, \dots, n\} \mid E \cap [x_{i-1}, x_i] \neq \varnothing \,\}. \end{aligned}$$

Hagamos notar que si $i \in B$ entonces $[x_{i-1}, x_i]$ no contiene ningún elemento de E. Por tanto,

$$M_i(f) = \sup\{\, f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \,\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

si $i \in B$. Si $i \in M$, en cambio, sí contendrá elementos de E, pero en todo caso se tendrá entonces que $M_i(f) \leqslant 1$. Además, como E tiene k elementos, habrá como mucho k índices que estén en M. Por tanto,

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{S}}(f, P_n) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i \in B} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in M} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i \in M} (x_i - x_{i-1}) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{k}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + k \cdot \frac{\varepsilon}{2k} = \varepsilon. \end{aligned}$$

de todo esto obtenemos que

$$0 = \underline{\mathrm{S}}(f, P_n) \leqslant \underline{\int_0^1} f \leqslant \overline{\int_0^1} f \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, P_n) < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, lo que realmente ocurre es que

$$0 \leqslant \underline{\int_0^1} f \leqslant \overline{\int_0^1} f \leqslant 0.$$

O sea, f es integrable y $\int_0^1 f = 0$.

1.2. Condiciones para la existencia de la integral

El Criterio de Riemann

Para ver si una función es integrable, ¿es preciso considerar todas las sumas de Darboux y calcular la integral superior e inferior? En algunos casos, como se ha visto en los ejemplos anteriores, basta considerar tan solo algunas particiones, y no todas. Por suerte, el siguiente teorema viene a demostrar que este es el caso general: basta probar que hay particiones cuyas sumas superior e inferior están suficientemente próximas. Este resultado servirá además para deducir que las funciones continuas y las monótonas son integrables.

Teorema 7.10 (Criterio de Riemann)**.** *Una función f acotada en $[a,b]$ es integrable en dicho intervalo si, y solo si, se cumple la Condición de Integrabilidad de Riemann: para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que*

$$\overline{\mathrm{S}}(f,P) - \underline{\mathrm{S}}(f,P) < \varepsilon.$$

Demostración. Supongamos primero que f es integrable. Como $\int_a^b f$ es el supremo de las sumas inferiores y el ínfimo de las sumas superiores, para $\varepsilon > 0$ resulta que ni $\int_a^b f - \varepsilon/2$ es cota superior de las primeras ni $\int_a^b f + \varepsilon/2$ es cota inferior de las segundas, así que existen dos particiones P_1 y P_2 tales que

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\mathrm{S}}(f,P_1), \qquad \overline{\mathrm{S}}(f,P_2) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $P = P_1 \cup P_2$ entonces $\underline{\mathrm{S}}(f,P_1) \leqslant \underline{\mathrm{S}}(f,P)$ y $\overline{\mathrm{S}}(f,P) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f,P_2)$, luego

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\mathrm{S}}(f,P), \qquad \overline{\mathrm{S}}(f,P) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$$

y por tanto

$$\overline{\mathrm{S}}(f,P) - \underline{\mathrm{S}}(f,P) < \Big(\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}\Big) - \Big(\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}\Big) = \varepsilon.$$

Recíprocamente, consideremos un $\varepsilon > 0$. Entonces, existe una partición P tal que

$$\overline{\mathrm{S}}(f,P) - \underline{\mathrm{S}}(f,P) < \varepsilon.$$

Por tanto,

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f,P) - \underline{\mathrm{S}}(f,P) < \varepsilon.$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, se concluye que $\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0$. □

Norma de una partición

Definición 7.11. Dada una partición $P = \{\, a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \,\}$ del intervalo $[a,b]$, se define su *norma* (también llamada *diámetro* o *malla*) como el número

$$\|P\| = \text{máx}\{\, x_i - x_{i-1} \mid i = 1,2,\dots,n \,\}.$$

Gráficamente, la norma de una partición es simplemente la anchura máxima de los intervalos parciales $[x_{i-1}, x_i]$; controla la holgura de la partición, de modo que cuanto menor sea, más tupida es la partición, y sus puntos están más próximos.

Observemos que si P_n es la partición que divide el intervalo $[a, b]$ en n intervalos iguales, entonces la longitud de los subintervalos de la partición es $(b-a)/n$. Esto implica que, dado $\varepsilon > 0$, siempre va a existir una partición de norma menor que ε.

Funciones monótonas

Teorema 7.12. *Toda función monótona en un intervalo $[a, b]$ es integrable.*

Demostración. Supongamos que f es una función creciente en $[a, b]$. Entonces f está acotada (inferiormente por $f(a)$, superiormente por $f(b)$). Por tanto tiene sentido hablar de su integrabilidad.

Dada $P = \{\, a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \,\}$, la monotonía de f dice que, para todo i,

$$\begin{aligned} M_i(f) &= \sup\{\, f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \,\} = f(x_i), \\ m_i(f) &= \text{ínf}\{\, f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \,\} = f(x_{i-1}). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{S}}(f, P) - \underline{\mathrm{S}}(f, P) &= \sum_{i=1}^{\infty} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{\infty} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\ &\leqslant \|P\| \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) \\ &= \|P\| \big(f(b) - f(a)\big). \end{aligned}$$

Ahora, dado $\varepsilon > 0$, so escogemo una partición P de modo que

$$\|P\|(f(b) - f(a)) < \varepsilon,$$

esto bastará para probar que se cumple la Condición de Integrabilidad de Riemann 7.10.

Si f es decreciente, la demostración es análoga. $\square$

Notemos que la idea esencial de la demostración es que, gracias a la monotonía de f, en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ podemos hacer que el producto $(M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1})$ sea pequeño, mediante el control de la oscilación de los valores de f (el tamaño de $M_i(f) - m_i(f)$), y esto a través del tamaño de la norma de la partición. Esta misma idea es adaptable al caso de que f sea continua, debido a que f es entonces uniformemente continua.

Funciones continuas

Teorema 7.13. *Toda función continua en un intervalo $[a, b]$ es integrable.*

Demostración. Sea f continua en $[a, b]$. Como f es continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, usando el Teorema de Acotación de Weierstrass 5.47, podemos notar que f es acotada. Así, tiene sentido considerar su integrabilidad. Además, el Teorema de Heine 5.71 nos dice que es uniformemente continua en $[a, b]$. Dado $\varepsilon > 0$, existirá por tanto un valor $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b - a)$ para cualesquiera $x, y \in [a, b]$ tales que $|x - y| < \delta$.

Consideremos una partición

$$P = \{ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \}$$

tal que $\|P\| < \delta$. Si $M_i(f)$ y $m_i(f)$ son los correspondientes supremos e ínfimos en cada $[x_{i-1}, x_i]$, por el Teorema de Acotación de Weierstrass 5.47 podemos elegir r_i, s_i en dicho intervalo de forma que $M_i(f) = f(r_i)$ y $m_i(f) = f(s_i)$. Entonces $|r_i - s_i| \leqslant x_i - x_{i-1} < \delta$, así que

$$M_i(f) - m_i(f) = f(r_i) - f(s_i) < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{S}}(f, P) - \underline{\mathrm{S}}(f, P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) \\
&< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b - a) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por el Criterio de Riemann 7.10, f es integrable. □

La Propiedad de Cauchy

Los resultados 7.12 y 7.13 que acabamos de mostrar aseguran que las funciones integrables constituyen una clase verdaderamente amplia, ya que contienen tanto a las funciones monótonas como a las continuas. Por otro lado, estas no agotan esta clase, ya que hay funciones integrables que no son ni monótonas ni continuas. El siguiente resultado proporciona ejemplos sencillos.

Teorema 7.14 (Propiedad de Cauchy). *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si f es integrable en cada intervalo $[c,b]$ con $a < c < b$, entonces es integrable en $[a,b]$ y*

$$\lim_{c\to a^+} \int_c^b f = \int_a^b f.$$

Demostración. Sea $K > 0$ una cota de $|f|$ en $[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $c \in (a,b)$ de manera que $c - a < \varepsilon/(4K)$. Definamos

$$\begin{aligned} M_a^c(f) &= \sup\{\, f(x) \mid x \in [a,c]\,\} \leqslant K, \\ m_a^c(f) &= \inf\{\, f(x) \mid x \in [a,c]\,\} \geqslant -K. \end{aligned}$$

Como f es integrable en $[c,b]$, en virtud de la condición de Riemann se puede encontrar una partición P_c^b del intervalo $[c,b]$ tal que $\overline{\mathrm{S}}(f,P_c^b) - \underline{\mathrm{S}}(f,P_c^b) < \varepsilon/2$. Añadiendo el punto a a la partición P_c^b , obtenemos una partición P de $[a,b]$ para la que

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{S}}(f,P) &= \overline{\mathrm{S}}(f,P_c^b) + M_a^c(f)\cdot(c-a) \\ &\leqslant \overline{\mathrm{S}}(f,P_c^b) + K\cdot(c-a) \\ &< \overline{\mathrm{S}}(f,P_c^b) + \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \underline{\mathrm{S}}(f,P) &= \underline{\mathrm{S}}(f,P_c^b) + m_a^c(f)\cdot(c-a) \\ &\geqslant \underline{\mathrm{S}}(f,P_c^b) - K\cdot(c-a) \\ &> \underline{\mathrm{S}}(f,P_c^b) - \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Se tendrá entonces que

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{S}}(f,P) - \underline{\mathrm{S}}(f,P) &< \Big(\overline{\mathrm{S}}(f,P_c^b) + \frac{\varepsilon}{4}\Big) - \Big(\underline{\mathrm{S}}(f,P_c^b) - \frac{\varepsilon}{4}\Big) \\ &= \overline{\mathrm{S}}(f,P_c^b) - \underline{\mathrm{S}}(f,P_c^b) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

y en consecuencia f es integrable en $[a,b]$.

Además, si $\delta = \varepsilon/(4K)$ y $c - a < \delta$, tendremos entonces

$$\begin{aligned}\int_a^b f - \int_c^b f &\leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, P) - \underline{\mathrm{S}}(f, P_c^b) \\ &< \overline{\mathrm{S}}(f, P_c^b) - \underline{\mathrm{S}}(f, P_c^b) + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_a^b f - \int_c^b f &\geqslant \underline{\mathrm{S}}(f, P) - \overline{\mathrm{S}}(f, P_c^b) \\ &> \underline{\mathrm{S}}(f, P_c^b) - \overline{\mathrm{S}}(f, P_c^b) - \frac{\varepsilon}{4} > -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} > -\varepsilon.\end{aligned}$$

Es decir, que

$$\left| \int_a^b f - \int_c^b f \right| < \varepsilon,$$

con lo que acabamos de probar que $\lim_{c \to a} \int_c^b f = \int_a^b f$. □

Ejemplo. La función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es integrable en $[0, 1]$.

En efecto, claramente está acotada y además es integrable en cada intervalo $[c, 1]$, con $0 < c < 1$, porque es continua en $[c, 1]$.

Este es un ejemplo interesante de una función integrable que no es continua ni monótona.

El Criterio de Lebesgue

Las funciones continuas son integrables, aunque no todas las funciones integrables son continuas: valen de ejemplo las funciones monótonas con discontinuidades. Pero las funciones integrables no pueden tener demasiadas discontinuidades, según demostró Lebesgue, en el siguiente importantísimo resultado. (Lo enunciamos solo como comentario a nivel informativo, y no se utilizará a lo largo de este curso.)

Definición 7.15. Se dice que un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ tiene *medida nula* si para todo $\varepsilon > 0$ existe una sucesión de intervalos (I_n), tal que

(I) $E \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

(II) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) := \lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{k} \ell(I_n) < \varepsilon$.

Teorema 7.16 (Criterio de Integrabilidad de Lebesgue)**.** *Una función f acotada en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$ si, y solo si, el conjunto de los puntos de $[a, b]$ en que f es discontinua tiene medida nula.*

El Teorema 7.16 es realmente potente. Evidentemente. generaliza el Teorema 7.13, pero también el Teorema 7.12, ya que toda función monótona tiene solo un conjunto contable de puntos de discontinuidad, y no es difícil probar que un conjunto contable siempre es de medida nula. La Propiedad de Cauchy 7.14 (del mismo modo que muchos otros resultados que veremos este curso) también es una fácil consecuencia de este teorema.

1.3. Definición (de Riemann) de la integral de Riemann

Norma de una partición e integrabilidad

Veremos a continuación que el control de las oscilaciones de f a través de la norma de la partición que hemos visto para funciones monótonas o continuas puede llevarse a cabo para cualquier función integrable. Concretamente, veremos que la Condición de Riemann $\overline{\mathrm{S}}(f, P) - \underline{\mathrm{S}}(f, P) < \varepsilon$ siempre se puede conseguir, exigiendo simplemente que el diámetro $\|P\|$ sea suficientemente pequeño. (Obsérvese que esto se cumple para la partición que divide $[a, b]$ en n intervalos iguales, si n es suficientemente grande.) Para ver esto, introducimos antes un resultado técnico.

Lema 7.17. *Sea f una función acotada en $[a, b]$. Sea P una partición de $[a, b]$ y sea Q un refinamiento de P. Sea $K > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant K$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces,*

$$\overline{\mathrm{S}}(f, P) - \overline{\mathrm{S}}(f, Q) \leqslant 2nK\|P\|, \qquad \underline{\mathrm{S}}(f, Q) - \underline{\mathrm{S}}(f, P) \leqslant 2nK\|P\|,$$

donde n es el número de puntos que están en Q pero no están en P.

Demostración. Probaremos solo la primera desigualdad. Para ello, probaremos primero el caso $n = 1$, es decir, supondremos que existe $c \in [a, b]$ tal que $Q = P \cup \{c\}$ o, lo que es igual,

$$P = \{\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b \,\},$$
$$Q = \{\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < c < x_k < \cdots < x_m = b \,\}.$$

Definamos, como siempre,

$$M_i(f) = \sup\{\, f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \,\},$$

y sean, además,

$$\begin{aligned} M_-(f) &= \sup\{\, f(x) \mid x \in [x_{k-1}, c]\,\}, \\ M_+(f) &= \sup\{\, f(x) \mid x \in [c, x_k]\,\}. \end{aligned}$$

Entonces, está claro que

$$0 \leqslant M_k(f) - M_-(f) \leqslant 2K, \qquad 0 \leqslant M_k(f) - M_+(f) \leqslant 2K,$$

así que

$$\begin{aligned} &\overline{\mathrm{S}}(f,P) - \overline{\mathrm{S}}(f,Q) \\ &\qquad = M_k(f)(x_k - x_{k-1}) - M_-(f)(c - x_{k-1}) - M_+(f)(x_k - c) \\ &\qquad = \big(M_k(f) - M_-(f)\big)(c - x_{k-1}) + \big(M_k(f) - M_+(f)\big)(x_k - c) \\ &\qquad \leqslant 2K(c - x_{k-1}) + 2K(x_k - c)) \\ &\qquad = 2K(x_k - x_{k-1}) \leqslant 2K\|P\|. \end{aligned}$$

Para el caso en que $n > 1$, podemos definir $n + 1$ particiones

$$P = P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_n = Q,$$

de forma que P_i tenga un solo punto más que P_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, n$. Aplicando el caso $n = 1$, se tendrá entonces

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{S}}(f,P) - \overline{\mathrm{S}}(f,Q) &= \big(\overline{\mathrm{S}}(f,P_0) - \overline{\mathrm{S}}(f,P_1)\big) + \big(\overline{\mathrm{S}}(f,P_1) - \overline{\mathrm{S}}(f,P_2)\big) + \cdots \\ &\qquad + \big(\overline{\mathrm{S}}(f,P_{n-1}) - \overline{\mathrm{S}}(f,P_n)\big) \\ &\leqslant 2K\|P\| + 2K\|P\| + \cdots + 2K\|P\| = 2nK\|P\|. \qquad \square \end{aligned}$$

Teorema 7.18. *Sea f una función acotada en $[a,b]$. Son equivalentes:*

(I) *f es integrable en $[a,b]$.*

(II) *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si P es una partición de $[a,b]$ tal que $\|P\| < \delta$, entonces $\overline{\mathrm{S}}(f,P) - \underline{\mathrm{S}}(f,P) < \varepsilon$.*

Demostración. Supongamos que f es integrable. Fijado $\varepsilon > 0$, sea P_0 una partición de $[a,b]$ tal que

$$\overline{\mathrm{S}}(f,P_0) - \underline{\mathrm{S}}(f,P_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Supongamos que P_0 tiene n_0 puntos, y sea $K > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant K$ para todo $x \in [a,b]$.

Sea P una partición de $[a,b]$, y tomemos $Q = P_0 \cup P$. Como máximo, Q tiene $n_0 - 2$ puntos más que P, a saber, los de $P_0 \backslash \{a,b\}$. Por el Lema 7.17, deberá ser

$$\overline{\mathrm{S}}(f,P) - \overline{\mathrm{S}}(f,Q) \leqslant 2(n_0-2)K\|P\| < 2n_0K\|P\|$$

y, análogamente,

$$\underline{\mathrm{S}}(f,Q) - \underline{\mathrm{S}}(f,P) < 2n_0K\|P\|.$$

Por otra parte, como Q es un refinamiento de P_0, también se tendrá

$$\overline{\mathrm{S}}(f,Q) - \underline{\mathrm{S}}(f,Q) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f,P_0) - \underline{\mathrm{S}}(f,P_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{S}}(f,P) - \underline{\mathrm{S}}(f,P) &< \big(\overline{\mathrm{S}}(f,Q) + 2n_0K\|P\|\big) - \big(\underline{\mathrm{S}}(f,Q) - 2n_0K\|P\|\big)\\ &= \big(\overline{\mathrm{S}}(f,Q) - \underline{\mathrm{S}}(f,Q)\big) + 4n_0K\|P\|\\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 4n_0K\|P\|.\end{aligned}$$

Ahora basta tomar $\delta = \varepsilon/(8n_0K)$. Si $\|P\| < \delta$ entonces

$$\overline{\mathrm{S}}(f,P) - \underline{\mathrm{S}}(f,P) < \varepsilon.$$

La otra implicación es una consecuencia inmediata del Criterio de Integrabilidad de Riemann 7.10. □

Sumas de Riemann

La definición de la integral 7.9 se debe a Darboux. A continuación expondremos la definición dada originalmente por Riemann y veremos que ambas son equivalentes; es decir, las dos conducen a las mismas funciones integrables y para estas las dos definiciones obtienen las mismas integrales.

Definición 7.19. Sea una partición

$$P = \{\, a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b \,\}$$

y una función f acotada en $[a,b]$. Dada una elección de puntos

$$\xi\colon \{1,2,\ldots,n\} \to [a,b], \qquad i \mapsto \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

se dice que

$$S(f,P,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

es una *suma de Riemann* de f asociada a P. A los elementos ξ_i se les denomina *etiquetas* de la suma de Riemann y a la función $\xi\colon \{1,2,\ldots,n\} \to [a,b]$ se le llama *función de etiquetado* o *de selección* de la suma de Riemann.

Observación. Dado que $m_i(f) \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i(f)$, resulta obvio que

$$\underline{\mathrm{S}}(f,P) \leqslant S(f,P,\xi) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f,P).$$

Es decir, una suma de Riemann asociada a una partición siempre se encuentra entre la suma superior y la suma inferior asociadas a esa misma partición.

Definición de Riemann de la integral

Definición 7.20. Decimos provisionalmente que f es *integrable Riemann* (en el sentido de Riemann) o $\mathcal{R}$-integrable en $[a,b]$ si existe un número real I tal que, dado $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un $\delta > 0$ de forma que

$$|S(f,P,\xi) - I| < \varepsilon$$

para cualquier suma de Riemann $S(f,P,\xi)$ tal que $\|P\| < \delta$. Cuando esto suceda, decimos que I es la $\mathcal{R}$-integral de f en $[a,b]$, y lo denotamos

$$I = \mathcal{R}\text{-}\int_a^b f.$$

Observación. La definición de Riemann de la integral concibe esta como una especie de límite. Lo que aparece en la definición de arriba se escribe a veces simbólicamente de la siguiente manera:

$$\mathcal{R}\text{-}\int_a^b f = \lim_{\|P\|\to 0} S(f,P,\xi).$$

Equivalencia entre ambas definiciones

Teorema 7.21 (Criterio de Darboux)**.** *Una función acotada en un intervalo $[a,b]$ es integrable Riemann en el sentido de Riemann si, y solo si, es integrable Riemann en el sentido de Darboux. En este caso, ambas integrales coinciden.*

Demostración. Sea f integrable en el sentido de Darboux y sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $\delta > 0$ tal que $\overline{\mathrm{S}}(f,P) - \underline{\mathrm{S}}(f,P) < \varepsilon$ siempre que $\|P\| < \delta$. Sea $S(f,P,\xi)$ una suma de Riemann. Si $\|P\| < \delta$, como

$$\underline{\mathrm{S}}(f,P) \leqslant S(f,P,\xi) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f,P),$$

y también

$$\underline{\mathrm{S}}(f,P) \leqslant \int_a^b f \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f,P),$$

se sigue que la distancia entre $S(f,P,\xi)$ y $\int_a^b f$ tiene que ser menor que ε. Es decir: si P es una partición de $[a,b]$ tal que $\|P\| < \delta$, entonces cualquier partición de Riemann $S(f,P,\xi)$ cumple que

$$\left| s(f,P,\xi) - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, f es integrable en $[a,b]$ en el sentido de Riemann, y $\mathcal{R}\text{-}\int_a^b f = \int_a^b f$.

Para probar el recíproco, supongamos que f es integrable en $[a,b]$ en el sentido de Riemann con integral I. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que $|S(f,P,\xi) - I| < \varepsilon$ si $\|P\| < \delta$. Escojamos una partición $P = \{\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \,\}$ tal que $\|P\| < \delta$. Podemos tomar $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ de manera que $f(\xi_i) > M_i(f) - \varepsilon$, $i = 1,2,\dots,n$. Entonces se verifica simultáneamente

$$S(f,P,\xi) \geqslant \overline{\mathrm{S}}(f,P) - \varepsilon(b-a), \qquad |S(f,P,\xi) - I| < \varepsilon.$$

Además,

$$\overline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f,P) \leqslant S(f,P,\xi) + \varepsilon(b-a) < I + \varepsilon + \varepsilon(b-a),$$

así que, como $\varepsilon > 0$ es arbitrario,

$$\overline{\int_a^b} f \leqslant I.$$

De manera análoga se prueba que $\underline{\int_a^b} f \geqslant I$, por lo cual $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = I$, con lo que f es integrable en el sentido de Darboux, y $\int_a^b f = I$. $\square$

Sucesiones de particiones

Corolario 7.22. *Sea f una función integrable en $[a, b]$ y (P_n) una sucesión de particiones de $[a, b]$ tal que* $\text{lím}_n \|P_n\| = 0$. *Si para cada n se considera una suma de Riemann $S(f, P_n, \xi_n)$, entonces*

$$\lim_n S(f, P_n, \xi_n) = \int_a^b f.$$

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Existe un $\delta > 0$ tal que para toda suma de Riemann $S(f, P, \xi)$ con $\|P\| < \delta$ se cumple que $|S(f, P, \xi) - \int_a^b f| < \varepsilon$. Como $\text{lím}_n \|P_n\| = 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|P_n\| < \delta$ si $n \geqslant n_0$. Por tanto, si $n \geqslant n_0$ deberá cumplirse que $|S(f, P_n, \xi_n) - \int_a^b f| < \varepsilon$. Es decir, $\text{lím}_n S(f, P_n, \xi_n) = \int_a^b f$. □

Una aplicación al cálculo de límites

Corolario 7.23. *Para toda función integrable en* $[0, 1]$,

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 f.$$

Demostración. Si

$$P_n = \Big\{ 0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1 \Big\}$$

es la partición que divide $[0, 1]$ en n intervalos iguales, y

$$\xi^n : \{1, 2, \ldots, n\} \to [0, 1]$$

es la función de etiquetado definida por

$$\xi_n(k) = \xi_{n,k} = \frac{k}{n} \in \Big[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\Big],$$

entonces

$$S(f, P_n, \xi_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

Solo resta observar que, por el Corolario 7.22, esta sucesión solo puede converger a $\int_0^1 f$. □

Ejemplos.

(I) $\displaystyle\lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \log 2.$

En efecto, podemos escribir

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big),$$

donde $f(x) = 1/(1+x)$. Por el corolario anterior esta sucesión converge a

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log 2.$$

(Se verá más adelante cómo calcular esta última integral.)

(II) $\displaystyle\lim_n \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{2}\log 2.$

Esto es porque podemos escribir

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{1+(\frac{k}{n})^2},$$

de donde esta sucesión converge a

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\log 2.$$

2. Propiedades básicas de la integral de Riemann

2.1. Operaciones con funciones integrables

Múltiplo de una función integrable

Lema 7.24. *Sea f una función acotada en el intervalo $[a,b]$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,*

(I) *Si $\alpha \geqslant 0$,*

$$\underline{\int_a^b}(\alpha f) = \alpha \underline{\int_a^b} f, \qquad \overline{\int_a^b}(\alpha f) = \alpha \overline{\int_a^b} f.$$

(II) *Si* $\alpha \leqslant 0$,

$$\underline{\int_a^b}(\alpha f) = \alpha \overline{\int_a^b} f, \qquad \overline{\int_a^b}(\alpha f) = \alpha \underline{\int_a^b} f.$$

Demostración. En el caso (I), basta observar que, si consideramos la partición

$$P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n\},$$

entonces, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} m_i(\alpha f) &= \text{ínf}\{\, \alpha f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\,\} \\ &= \alpha\, \text{ínf}\{\, f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\,\} = \alpha m_i(f), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_i(\alpha f) &= \sup\{\, \alpha f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\,\} \\ &= \alpha \sup\{\, f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\,\} = \alpha M_i(f). \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\underline{\mathrm{S}}(\alpha f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(\alpha f)(x_i - x_{i-1}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) = \alpha\, \underline{\mathrm{S}}(f, P)$$

y, análogamente,

$$\overline{\mathrm{S}}(\alpha f, P) = \alpha\, \overline{\mathrm{S}}(f, P),$$

Como esto ocurre para toda partición P, se tendrá que

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b}(\alpha f) &= \sup\{\, \underline{\mathrm{S}}(\alpha f, P) \mid P \in \mathcal{P}([a,b])\,\} \\ &= \sup\{\, \alpha\, \underline{\mathrm{S}}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}([a,b])\,\} \\ &= \alpha \sup\{\, \underline{\mathrm{S}}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}([a,b])\,\} = \alpha \underline{\int_a^b} f. \end{aligned}$$

De forma totalmente similar se prueba que

$$\overline{\int_a^b}(\alpha f) = \alpha \overline{\int_a^b} f.$$

La demostración del caso (II) es parecida, sin más que tener en cuenta que, si $\alpha \leqslant 0$,

$$\begin{aligned} m_i(\alpha f) &= \text{ínf}\{\, \alpha f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\,\} \\ &= \alpha \sup\{\, f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\,\} = \alpha M_i(f), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_i(\alpha f) &= \sup\{\, \alpha f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\,\} \\ &= \alpha\, \text{ínf}\{\, f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\,\} = \alpha m_i(f). \end{aligned}$$ □

Proposición 7.25. *Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$, y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces αf es integrable y*

$$\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f.$$

Demostración. Sea $\alpha \geqslant 0$. Por el Lema 7.24, y teniendo en cuenta que f es integrable, se tiene

$$\underline{\int_a^b} (\alpha f) = \alpha \underline{\int_a^b} f = \alpha \int_a^b f = \alpha \overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} (\alpha f).$$

Si $\alpha \leqslant 0$, se obtiene

$$\underline{\int_a^b} (\alpha f) = \alpha \overline{\int_a^b} f = \alpha \int_a^b f = \alpha \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} (\alpha f).$$

En cualquiera de los dos casos, la integral inferior coincide con la superior. Por tanto, αf es integrable, y su integral vale $\alpha \int_a^b f$. $\square$

Suma de funciones integrables

Lema 7.26. *Sean f y g dos funciones acotadas en el intervalo $[a, b]$. Entonces,*

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leqslant \underline{\int_a^b} (f + g) \leqslant \underline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g \leqslant \overline{\int_a^b} (f + g) \leqslant \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g.$$

Demostración. Probemos primero la cuarta desigualdad. Sea $P = \{ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \}$ una partición. Entonces, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, si $x \in [x_{i-1}, x_i]$, será $f(x) + g(x) \leqslant M_i(f) + M_i(g)$, donde

$$M_i(f) = \sup\{ f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}, \qquad M_i(g) = \sup\{ g(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \}.$$

De esta manera,

$$M_i(f + g) := \sup\{ f(x) + g(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \} \leqslant M_i(f) + M_i(g).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{S}}(f + g, P) &= \sum_{i=1}^n M_i(f + g)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n M_i(f)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n M_i(g)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \overline{\mathrm{S}}(f, P) + \overline{\mathrm{S}}(g, P).
\end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, por la definición de la integral superior, podemos escoger $P_1, P_2 \in \mathcal{P}([a,b])$ tales que

$$\overline{\mathrm{S}}(f, P_1) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \overline{\mathrm{S}}(g, P_2) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $P = P_1 \cup P_2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\overline{\int_a^b}(f+g) &\leqslant \overline{\mathrm{S}}(f+g, P) \\
&\leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, P) + \overline{\mathrm{S}}(g, P) \\
&\leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, P_1) + \overline{\mathrm{S}}(g, P_2) \\
&< \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, resulta así que

$$\overline{\int_a^b}(f+g) \leqslant \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g.$$

Probemos ahora la tercera desigualdad. Por la cuarta, que ya hemos probado, se tiene

$$\overline{\int_a^b} g \leqslant \overline{\int_a^b}(f+g) + \overline{\int_a^b}(-f) = \overline{\int_a^b}(f+g) - \underline{\int_a^b} f.$$

Por tanto,

$$\underline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g \leqslant \overline{\int_a^b}(f+g).$$

La primera y la segunda desigualdades se obtienen aplicando las dos desigualdades ya probadas a $-f$ y $-g$. $\square$

Proposición 7.27. *Sea f una función acotada y g una función integrable en el intervalo $[a,b]$. Entonces,*

$$\overline{\int_a^b}(f+g) = \overline{\int_a^b} f + \int_a^b g, \qquad \underline{\int_a^b}(f+g) = \underline{\int_a^b} f + \int_a^b g.$$

Demostración. Para la primera desigualdad, por ejemplo, se tiene

$$\overline{\int_a^b} f + \int_a^b g = \overline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leqslant \overline{\int_a^b}(f+g) \leqslant \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g = \overline{\int_a^b} f + \int_a^b g,$$

de donde

$$\overline{\int_a^b}(f+g) = \overline{\int_a^b} f + \int_a^b g. \qquad \square$$

Corolario 7.28. *Sean f y g dos funciones integrables en el intervalo $[a,b]$. Entonces $f+g$ es integrable en $[a,b]$ y*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Demostración. Según la proposición anterior, se tiene

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} (f+g) &= \overline{\int_a^b} f + \int_a^b g = \int_a^b f + \int_a^b g, \\ \underline{\int_a^b} (f+g) &= \underline{\int_a^b} f + \int_a^b g = \int_a^b f + \int_a^b g. \end{aligned}$$

Por tanto, $f+g$ es integrable y

$$\int_a^b ((f+g)) = \int_a^b f + \int_a^b g. \qquad \square$$

Observación. Si $\mathcal{R}([a,b]$ denota el conjunto de las funciones integrables en $[a,b]$, los resultados anteriores nos dicen que $\mathcal{R}([a,b]$ es un espacio vectorial y la aplicación $\int_a^b \colon \mathcal{R}([a,b], f \mapsto \int_a^b f$ es una aplicación lineal.

El Teorema de Composición

Teorema 7.29 (de Composición)**.** *Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$, y sea φ una función continua en el intervalo $[c,d]$. Supongamos que $f([a,b]) \subset [c,d]$. Entonces, $\varphi \circ f$ es integrable en $[a,b]$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ dado. Sea $K > 0$ una cota superior de $|\varphi|$ y definamos

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{b-a+2K}.$$

Como φ es uniformemente continua en $[c,d]$, existe δ, $0 < \delta < \varepsilon'$, tal que si $x, y \in [c,d]$ y $|x-y| < \delta$, entonces $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon'$.

Como además f es integrable en $[a,b]$, existe una partición $P = \{\, a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \,\}$ de $[a,b]$ tal que

$$\overline{\mathrm{S}}(f,P) - \underline{\mathrm{S}}(f,P) < \delta^2.$$

La demostración quedará terminada si probamos que para esta misma partición se cumple que

$$\overline{\mathrm{S}}(\varphi \circ f, P) - \underline{\mathrm{S}}(\varphi \circ f, P) < \varepsilon.$$

Separaremos el conjunto de índices $\{1, 2, \ldots, n\}$ en dos subconjuntos. Definamos

$$B = \{\, i \mid M_i(f) - m_i(f) < \delta \,\} \qquad \text{y} \qquad M = \{\, i \mid M_i(f) - m_i(f) \geqslant \delta \,\}.$$

Observemos por otro lado que

$$\begin{aligned} &M_i(\varphi \circ f) - m_i(\varphi \circ f) \\ &\qquad = \sup\{\, \varphi(f(x)) \mid x \in [x_{i-1}, x_i] \,\} - \text{ínf}\{\, \varphi(f(y)) \mid y \in [x_{i-1}, x_i] \,\} \\ &\qquad = \sup\{\, \varphi(f(x)) - \varphi(f(y)) \mid x, y \in [x_{i-1}, x_i] \,\}. \end{aligned}$$

Ahora bien, si $i \in B$ y $x, y \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces $|f(x) - f(y)| < \delta$, de donde se infiere que $|\varphi(f(x)) - \varphi(f(y))| < \varepsilon'$. Se sigue por tanto que si $i \in B$, entonces $M_i(\varphi \circ f) - m_i(\varphi \circ f) \leqslant \varepsilon'$, y se concluye que

$$\sum_{i \in B} \big(M_i(\varphi \circ f) - m_i(\varphi \circ f)\big)(x_i - x_{i-1}) \leqslant \varepsilon' \sum_{i \in B} (x_i - x_{i-1}) \leqslant \varepsilon'(b - a).$$

Por otra parte, si $i \notin B$ solo se puede asegurar que $M_i(\varphi \circ f) - m_i(\varphi \circ f) \leqslant 2K$, de modo que

$$\sum_{i \in M} \big(M_i(\varphi \circ f) - m_i(\varphi \circ f)\big)(x_i - x_{i-1}) \leqslant 2K \sum_{i \in M} (x_i - x_{i-1}).$$

Pero para $i \in M$ se tiene $\delta \leqslant M_i(f) - m_i(f)$, de manera que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in M} (x_i - x_{i-1}) &\leqslant \frac{1}{\delta} \sum_{i \in M} \big(M_i(f) - m_i(f)\big)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leqslant \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{n} \big(M_i(f) - m_i(f)\big)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \frac{1}{\delta} \big(\overline{\mathrm{S}}(f, P) - \underline{\mathrm{S}}(f, P)\big) < \delta < \varepsilon'. \end{aligned}$$

De aquí se tiene

$$\sum_{i \in M} \big(M_i(\varphi \circ f) - m_i(\varphi \circ f)\big)(x_i - x_{i-1}) < 2K\varepsilon'.$$

Al combinar estas estimaciones, obtenemos que

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{S}}(\varphi \circ f, P) - \underline{\mathrm{S}}(\varphi \circ f, P) &= \sum_{i=1}^{n} \big(M_i(\varphi \circ f) - m_i(\varphi \circ f)\big)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i \in B} \big(M_i(\varphi \circ f) - m_i(\varphi \circ f)\big)(x_i - x_{i-1}) \\ &\qquad + \sum_{i \in M} \big(M_i(\varphi \circ f) - m_i(\varphi \circ f)\big)(x_i - x_{i-1}) \\ &< \varepsilon'(b - a) + 2K\varepsilon' < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto, $\varphi \circ f$ es integrable. $\square$

Ejemplos.

(I) Sea f definida en $[0,1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|\operatorname{sen} \frac{1}{x}|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Esta función es integrable, por ser composición de la función integrable

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

con la función continua $\varphi(x) = \sqrt{|x|}$.

(II) Sea f definida en $[0,1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x \in \{0,1\}, \\ 1, & x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{q}} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2q} + 1}, & x = \frac{p}{q}, \quad \text{m. c. d.}(p,q) = 1, \end{cases}.$$

Esta función es integrable en $[0,1]$.

En efecto f es composición de la función de Thomae, que sabemos que es integrable, con la función continua en $[0,1]$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}x + 1}.$$

(¿Qué pasa si cambiamos el valor asignado a los irracionales?)

(III) Sean f y φ las funciones definidas en $[0,1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{0,1\}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \quad \text{m. c. d.}(p,q) = 1, \end{cases} \qquad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Ambas funciones son integrables, pero su composición no. (En efecto, su composición ¡es la función "peine" de Dirichlet!) Esto nos indica que la composición de funciones integrables no tiene por qué ser una función integrable. También es posible construir (de forma más complicada) ejemplos que muestran que la composición de una función continua con una integrable (es decir, en el orden contrario al del Teorema de Composición 7.29) no tiene por qué ser integrable.

Producto de funciones integrables. Supremos e ínfimos

El producto de funciones integrables es una función integrable.

Proposición 7.30. *Sean f y g dos funciones integrables en un intervalo $[a, b]$. Entonces fg también lo es.*

Demostración. Por el Teorema de Composición, son integrables las funciones f^2, g^2 y $(f + g)^2$. Basta darse cuenta ahora de que

$$fg = \frac{(f + g)^2 - f^2 - g^2}{2}. \qquad \square$$

Proposición 7.31. *Sean f y g dos funciones integrables en el intervalo $[a, b]$. Entonces las funciones $\sup(f, g)$ e $\text{ínf}(f, g)$ son también integrables en $[a, b]$.*

Demostración. Basta tener en cuenta que estas funciones se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \qquad \text{ínf}(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|). \qquad \square$$

2.2. Integral y orden

Monotonía de la integral

El siguiente resultado expresa la monotonía de la integral con respecto al integrando. Probaremos primero un resultado auxiliar que prueba lo mismo con respecto a las integrales superior e inferior.

Lema 7.32. *Sean f y g dos funciones acotadas en el intervalo $[a, b]$. Supongamos que $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces*

$$\underline{\int_a^b} f \leqslant \underline{\int_a^b} g, \qquad \overline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} g.$$

Demostración. Sea $P = \{ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \}$ una partición. Como $f \leqslant g$, resulta inmediato que $m_i(f) \leqslant m_i(g)$. Es claro entonces que $\underline{S}(f, P) \leqslant \underline{S}(g, P)$, para cualquier partición P de $[a, b]$. Tomando ahora supremos, se obtiene que

$$\begin{aligned}\underline{\int_a^b} f &= \sup\{ \underline{S}(f, P) \mid P \in \mathcal{P}([a, b]) \} \\ &\leqslant \sup\{ \underline{S}(g, P) \mid P \in \mathcal{P}([a, b]) \} = \underline{\int_a^b} g.\end{aligned}$$

Obviamente, lo referente a las integrales superiores se puede demostrar de forma similar. $\square$

Proposición 7.33. *Sean f y g dos funciones integrables en el intervalo $[a, b]$. Supongamos que $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces*

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

Positividad de la integral

Corolario 7.34. *Si f es una función integrable no negativa en el intervalo $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f \geqslant 0.$$

La Desigualdad de Minkowski

Teorema 7.35 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Si f es una función integrable en el intervalo $[a, b]$, también lo es la función $|f|$. Además,*

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|.$$

Demostración. Que $|f|$ es integrable, es una consecuencia inmediata del Teorema de Composición 7.29. Además, como $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, se obtiene de la Proposición 7.33 que

$$-\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|,$$

o, dicho de otra manera,

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|. \qquad \square$$

2.3. Integración en subintervalos

Aditividad con respecto al dominio de integración

Proposición 7.36. *Sea f una función acotada en el intervalo $[a, b]$. Dado $c \in [a, b]$, son equivalentes:*

(I) *f es integrable en $[a, b]$.*

(II) *f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$.*

Además, cuando f es integrable se tiene

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demostración. Supongamos primero que f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$. Como f está acotada en $[a,c]$ y en $[c,b]$, también estará acotada en $[a,b]$. Además, por el Criterio de Riemann, para todo $\varepsilon > 0$ existen una partición P_a^c de $[a,c]$ y otra partición P_c^b de $[c,b]$ tales que

$$\overline{\mathrm{S}}(f,P_a^c) - \underline{\mathrm{S}}(f,P_a^c) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \overline{\mathrm{S}}(f,P_c^b) - \underline{\mathrm{S}}(f,P_c^b) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si ahora hacemos $P_a^b = P_a^c \cup P_c^b$, resulta que P_a^b es una partición de $[a,b]$, y se sigue, aplicando la definición, que

$$\overline{\mathrm{S}}(f,P_a^b) = \overline{\mathrm{S}}(f,P_a^c) + \overline{\mathrm{S}}(f,P_c^b), \qquad \underline{\mathrm{S}}(f,P_a^b) = \underline{\mathrm{S}}(f,P_a^c) + \underline{\mathrm{S}}(f,P_c^b),$$

luego

$$\begin{aligned} \overline{\int_a^b} f &\leqslant \overline{\mathrm{S}}(f,P_a^b) = \overline{\mathrm{S}}(f,P_a^c) + \overline{\mathrm{S}}(f,P_c^b) \\ &< \underline{\mathrm{S}}(f,P_a^c) + \frac{\varepsilon}{2} + \underline{\mathrm{S}}(f,P_c^b) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \int_a^c f + \int_c^a f + \varepsilon. \end{aligned}$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, se obtiene que

$$\overline{\int_a^b} f \leqslant \int_a^c f + \int_c^a f.$$

Análogamente, se demuestra que

$$\underline{\int_a^b} f \geqslant \int_a^c f + \int_c^b f,$$

con lo que se tiene

$$\int_a^c f + \int_c^b f \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant \int_a^c f + \int_c^a f.$$

Esto implica que f es integrable en $[a,b]$, y

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Probemos ahora la otra implicación. Supongamos que f es integrable en $[a,b]$. Para cada $\varepsilon > 0$ existirá una partición Q_a^b de $[a,b]$ tal que

$$\overline{\mathrm{S}}(f,Q_a^b) - \underline{\mathrm{S}}(f,Q_a^b) < \varepsilon.$$

Sea $P_a^b = Q_a^b \cup \{c\}$. (El punto c puede que no pertenezca a la partición original Q_a^b.) Descompongamos P_a^b en sendas particiones P_a^c y P_c^b de $[a, c]$ y de $[c, b]$, respectivamente. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}\bigl(\overline{\mathrm{S}}(f, P_a^c) - \underline{\mathrm{S}}(f, P_a^c)\bigr) + \bigl(\overline{\mathrm{S}}(f, P_c^b) - \underline{\mathrm{S}}(f, P_c^b)\bigr)& \\ = \overline{\mathrm{S}}(f, P_a^b) - \underline{\mathrm{S}}(f, P_a^b) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, Q_a^b) - \underline{\mathrm{S}}(f, Q_a^b) < \varepsilon,&\end{aligned}$$

y como los dos sumandos $\overline{\mathrm{S}}(f, P_a^c) - \underline{\mathrm{S}}(f, P_a^c)$ y $\overline{\mathrm{S}}(f, P_c^b) - \underline{\mathrm{S}}(f, P_c^b)$ son no negativos, cada uno de ellos será menor o igual que su suma, por lo que

$$\overline{\mathrm{S}}(f, P_a^c) - \underline{\mathrm{S}}(f, P_a^c) < \varepsilon, \qquad \overline{\mathrm{S}}(f, P_c^b) - \underline{\mathrm{S}}(f, P_c^b) < \varepsilon,$$

y por consiguiente f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$. □

Dos consecuencias

Corolario 7.37. *Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Supongamos que $[c, d] \subset [a, b]$. Entonces f es integrable en $[c, d]$.*

Demostración. Por el resultado anterior, f será integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$. Como es integrable en $[c, b]$, aplicando el resultado otra vez, f es integrable en $[c, d]$ y en $[d, b]$. □

Corolario 7.38. *Sea g una función integrable en $[a, b]$, y sea f una función igual a g excepto en un conjunto finito de puntos. Entonces, f es integrable y $\int_a^b f = \int_a^b g$.*

Demostración. Por la Proposición 7.36, si $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ son los puntos en que ambas funciones no coinciden, basta ver que f es integrable en $[a, x_1]$, en $[x_1, x_2]$, ..., en $[x_{n-1}, x_n]$, y en $[x_n, b]$. Por tanto, será suficiente probar que el resultado es cierto cuando las dos funciones coinciden en todo el intervalo excepto en los puntos a o b. Para ello, obsérvese que la función $h = f - g$ es igual a 0 en todos los puntos excepto quizá en a o b. La demostración quedará completa si mostramos que h es integrable y su integral es 0.

Sea $c = (a + b)/2$. Obsérvese que h es integrable en $[\alpha, c]$ si $a < \alpha < c$ y además $\int_\alpha^c h = 0$ (ya que es igual a 0 en este intervalo). Por la Propiedad de Cauchy 7.14, esto implica que h es integrable en $[a, c]$ y $\int_a^c h = 0$. De forma análoga, se prueba que h es integrable en $[c, b]$ y $\int_c^b h = 0$. Combinando ambas cosas, h resulta ser integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b h = \int_a^c h + \int_c^b h = 0.$$ □

Funciones continuas a trozos y monótonas a trozos

Definición 7.39. Sea f una función definida en $[a, b]$.

(I) Se dice que f es *continua a trozos* si existe una partición $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$, tal que f es continua en cada intervalo (x_{i-1}, x_i) y existen y son finitos los límites laterales en cada x_i.

(II) Se dice que f es *monótona a trozos* si existe una partición $\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$, tal que f es monótona en cada intervalo (x_{i-1}, x_i).

Corolario 7.40. *Si f es una función continua a trozos o una función acotada y monótona a trozos en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.*

Demostración. Si f es continua a trozos y los x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, son como en la definición, para cada i existe una extensión continua (y por tanto integrable) de $f|_{(x_{i-1},x_i)}$ al intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Esta extensión es integrable en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, por ser continua, y coincide con f en (x_{i-1}, x_i), luego f es integrable en $[x_{i,1}, x_i]$. Como esto es cierto para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, resulta entonces que f es integrable en $[a, b]$.

La demostración en el caso de una función monótona a trozos es similar. □

Ejemplo. $f(x) = [x]$ es monótona a trozos y continua a trozos en cualquier intervalo $[a, b]$. Por tanto, es integrable en todo intervalo $[a, b]$.

2.4. Teoremas del valor medio integral

Promedio integral

Definición 7.41. Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Llamamos *promedio integral* de f en $[a, b]$ al número

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f,$$

Teorema 7.42. *Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$ y sean m y M tales que para todo $x \in [a, b]$ se cumpla $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Entonces el promedio integral de f en $[a, b]$ está en $[m, M]$, es decir,*

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leqslant M.$$

Demostración. Puesto que $m \leqslant f \leqslant M$, por la monotonía de la integral

$$m(b-a) = \int_a^b m \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b M = M(b-a),$$

y como $b-a>0$, podemos dividir para obtener

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leqslant M. \qquad \square$$

Ejemplo.

$$\lim_{a\to\infty} \int_a^{a+1} \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\,dx = 1.$$

En efecto, sea $1<a<b$. Para cada $x \in [a,b]$,

$$1 \leqslant \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1} \leqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{a}-1}.$$

Por lo tanto,

$$1 \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\,dx \leqslant 1 + \frac{2}{\sqrt{a}-1}.$$

En algunas ocasiones, no es necesario calcular el valor exacto de una integral, sino que basta con estimaciones aproximadas. Por ejemplo, de las últimas desigualdades se deduce que, para todo $p>0$

$$\lim_{a\to\infty} \int_a^{a+p} \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}\,dx = p.$$

El Teorema del Valor Medio Integral

Teorema 7.43 (del Valor Medio Integral)**.** *Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$. Entonces su promedio integral se alcanza en algún punto de $[a,b]$, es decir, existe un $x_0 \in [a,b]$ tal que*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(x_0).$$

Demostración. Por el Teorema de Acotación de Weierstrass 5.47, el conjunto $\{\, f(x) \mid x \in [a,b] \,\}$ tiene mínimo y máximo, a los que llamamos m y M respectivamente. Según el Teorema 7.42, se cumple que

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leqslant M.$$

Como f es continua, por el Teorema de Bolzano 5.49 existe un $x_0 \in [a,b]$ en el que f toma dicho valor entre m y M, y así

$$f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f. \qquad \square$$

Promedio integral ponderado

Teorema 7.44. *Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$, sea g una función no negativa e integrable en $[a, b]$, y sean m y M tales que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para todo $x \in [a, b]$. Entonces, existe $\mu \in [m, M]$ tal que*

$$\int_a^b fg = \mu \int_a^b g.$$

(A μ se le llama promedio integral ponderado de f con respecto a la función de densidad g.)

Demostración. Puesto que $g \geqslant 0$, se verifica

$$mg \leqslant fg \leqslant Mg.$$

Todas estas funciones son integrables, luego podemos poner

$$m \int_a^b g \leqslant \int_a^b fg \leqslant M \int_a^b g.$$

Si $\int_a^b g = 0$, cualquier $\mu \in [a, b]$ cumple la igualdad del enunciado. Si $\int_a^b g \neq 0$, entonces $\int_a^b g > 0$ y basta tomar como μ el cociente entre $\int_a^b fg$ y $\int_a^b g$. □

Corolario 7.45. *Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$, y sea g una función no negativa e integrable en $[a, b]$. Existe entonces al menos un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b fg = f(x_0) \int_a^b g.$$

Demostración. La función f tiene máximo y mínimo absolutos sobre $[a, b]$, por el Teorema de Acotación de Weierstrass 5.47. Si el máximo y el mínimo se alcanzan en c y d, respectivamente, podemos aplicar el teorema anterior con $m = f(c)$ y $M = f(d)$. Por el Teorema de Bolzano 5.49, hay al menos un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = \mu$, donde μ el promedio integral ponderado de f con respecto a g. □

La Fórmula de Sumación de Abel

Para los siguientes resultados, necesitaremos un resultado técnico, que es el equivalente en sucesiones a la Fórmula de Integración por Partes.

Lema 7.46 (Fórmula de Sumación por Partes, de Abel)**.** *Sea a_n y (b_n) dos sucesiones. Definamos $A_k = \sum_{i=1}^k a_i$. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{k} a_i b_i = A_k b_k + \sum_{i=1}^{k-1} A_i (b_i - b_{i+1}).$$

Demostración. Para facilidad de cálculo, definamos también $A_0 = 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} a_i b_i &= \sum_{i=1}^{k} (A_i - A_{i-1}) b_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} A_i b_i - \sum_{i=1}^{k} A_{i-1} b_i \\
&= \sum_{i=1}^{k} A_i b_i - \sum_{i=0}^{k-1} A_i b_{i+1} \\
&= A_k b_k - A_0 b_1 + \sum_{i=1}^{k-1} A_i (b_i - b_{i+1}) \\
&= A_k b_k + \sum_{i=1}^{k-1} A_i (b_i - b_{i+1}). \qquad \square
\end{aligned}$$

Lema 7.47. *Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones, y sea $A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$. Supongamos que se satisface la desigualdad $m \leqslant A_k \leqslant M$, y que (b_n) es no negativa y decreciente. Entonces,*

$$mb_1 \leqslant \sum_{i=1}^{k} a_i b_i \leqslant Mb_1.$$

Demostración. Por la Fórmula de Sumación de Abel 7.46, y teniendo en cuenta que $b_n \geqslant 0$ y $b_i - b_{i+1} \geqslant 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} a_i b_i &= A_k b_k + \sum_{i=1}^{k-1} A_i (b_i - b_{i+1}) \\
&\leqslant Mb_k + \sum_{i=1}^{k-1} M (b_i - b_{i+1}) \\
&= Mb_k + M(b_1 - b_k) = Mb_1.
\end{aligned}$$

La desigualdad de la izquierda se obtiene de forma similar. $\square$

Una desigualdad

Teorema 7.48. *Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$ y supongamos que g es una función decreciente y no negativa en $[a, b]$. Entonces,*

$$g(a)m \leqslant \int_a^b fg \leqslant g(a)M,$$

donde m y M representan los valores mínimo y máximo, respectivamente, de la función $F(x) = \int_a^x f$.

Demostración. Sea $P = \{\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \,\}$ una partición de $[a, b]$. Tenemos la identidad

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\,dx \\ &= \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(g(x) - g(x_{i-1})\big) f(x)\,dx\end{aligned}$$

Vamos a acotar el segundo sumando. Como f es integrable, será acotada y por tanto existirá una constante $K > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant K$ para todo $x \in [a, b]$. Como g es decreciente, también será integrable y, en consecuencia, dado $\varepsilon > 0$, podemos escoger la partición P de forma que

$$\sum_{i=1}^n \big(g(x_{i-1}) - g(x_i)\big)(x_i - x_{i-1}) = \overline{\mathrm{S}}(g, P) - \underline{\mathrm{S}}(g, P) < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(g(x) - g(x_{i-1})\big)\,dx\right| &\leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})||f(x)|\,dx \\ &\leqslant K \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x) - g(x_{i-1})|\,dx \\ &\leqslant K \sum_{i=1}^n \big(g(x_{i-1}) - g(x_i)\big)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Por tanto, para esta partición P, tenemos que

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx - \sum_{i=1}^n g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx\right| \\ &\qquad\qquad = \left|\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(g(x) - g(x_{i-1})\big)\,dx\right| < \varepsilon. \qquad (1)\end{aligned}$$

Hagamos ahora

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

y sean

$$m = \text{ínf}\{\, F(x) \mid x \in [a, b] \,\}, \qquad M = \sup\{\, F(x) \mid x \in [a, b] \,\}.$$

Como $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = F(x_i) - F(x_{i-1})$, se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1}) \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) g(x_{i-1}).$$

Teniendo en cuenta que g es no negativa y decreciente en $[a, b]$, y haciendo

$$a_i = F(x_i) - F(x_{i-1}), \qquad b_i = g(x_{i-1})$$

en el Lema 7.47, obtenemos que

$$mg(a) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) g(x_{i-1}) \leqslant Mg(a),$$

dado que

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} a_i = F(x_k) - F(x_0) = F(x_k) - F(a) = F(x_k).$$

En consecuencia, teniendo en cuenta (1), se tiene que

$$mg(a) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant Mg(a) + \varepsilon.$$

Finalmente, como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que

$$mg(a) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant Mg(a). \qquad \square$$

Segundo Teorema del Valor Medio Integral

Teorema 7.49 (Segundo Teorema del Valor Medio Integral)**.** *Sean f y g funciones integrables en un intervalo $[a, b]$.*

(I) *Si $g \geqslant 0$ es decreciente, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que*
$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^{x_0} f.$$

(II) *Si $g \geqslant 0$ es creciente, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que*
$$\int_a^b fg = g(b) \int_{x_0}^{b} f.$$

(III) *Si g es monótona, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que*
$$\int_a^b fg = g(a) \int_a^{x_0} f + g(b) \int_{x_0}^{b} f.$$

Demostración. (I) Si $g(a) = 0$, el resultado es trivial. Si $g(a) \neq 0$, el resultado anterior nos dice que

$$m \leqslant \frac{1}{g(a)} \int_a^b fg \leqslant M,$$

donde m y M son el ínfimo y el supremo, respectivamente, de la función $F(x) = \int_a^x f$. Una consecuencia de la Propiedad de Cauchy (que se verá con cierto detalle en el Teorema 7.14) es que la función F es continua. Por el Teorema de Bolzano, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$F(x_0) = \frac{1}{g(a)} \int_a^b fg,$$

es decir,

$$\int_a^b fg = g(a)F(x_0) = g(a) \int_a^{x_0} f.$$

(II) Sean $F(x) = f(a + b - x)$, $G(x) = g(a + b - x)$, definidas en $[a, b]$. Las gráficas de estas funciones son las simétricas de las de f y g, respectivamente. Es fácil ver por tanto que estas funciones son integrables en $[a, b]$. La función G, por su parte, es además no negativa y decreciente, Por tanto, utilizando el caso (I), obtenemos que existe $x_1 \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b FG = G(a) \int_a^{x_1} F = g(b) \int_a^{x_1} F.$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la simetría de las gráficas de F y G con las de f y g, obtenemos que

$$\int_a^b fg = \int_a^b FG = g(b) \int_a^{x_1} F = g(b) \int_{a+b-x_1}^b f.$$

Bastará, por tanto, hacer $x_0 = a + b - x_1$.

(III) Supongamos que g es creciente. Definamos la función $G(x) = g(b) - g(x)$, que es no negativa, decreciente e integrable en $[a, b]$. Aplicando de nuevo el caso (I), obtenemos que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$g(b) \int_a^b f - \int_a^b fg = \int_a^b fG = G(a) \int_a^{x_0} f = g(b) \int_a^{x_0} f - g(a) \int_a^{x_0} f.$$

Por tanto,

$$\int_a^b fg = g(b) \int_a^b f - g(b) \int_a^{x_0} f + g(a) \int_a^{x_0} f = g(a) \int_a^{x_0} f + g(b) \int_{x_0}^b f.$$

Si g es decreciente, la prueba es análoga, utilizando el caso (II) en lugar de (I). □

Ejemplo. Si $b > 1$,

$$\left|\int_1^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right| \leqslant 2.$$

En efecto, según (I) del resultado anterior, existe $x_0 \in [1, b]$ tal que

$$\int_1^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{1}{1}\cdot\int_1^{x_0} \operatorname{sen} x\,dx = \int_1^{x_0} \operatorname{sen} x\,dx.$$

Por tanto,

$$\left|\int_1^b \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\right| = \left|\int_1^{x_0} \operatorname{sen} x\,dx\right| = |\cos x_0 - \cos 1| \leqslant 2$$

3. El Teorema Fundamental del Cálculo

3.1. Integral indefinida. El Teorema de Derivación de Integrales

Qué es la integral indefinida

Definición 7.50. Sea f una función integrable en $[a, b]$. Llamamos *integral indefinida* de f centrada en $c \in [a, b]$ a la función $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_c^x f.$$

(Aquí se adopta la convención $\int_c^x f = -\int_x^c$ si $x < c$.)

La integral indefinida centrada en c se denota a veces como $\int_c f$. Así,

$$\left(\int_c f\right)(x) = \int_c^x f.$$

Observación. Si $c, d \in [a, b]$, las integrales indefinidas $\int_c f$ e $\int_d f$ se diferencian en una constante, a saber,

$$\int_c^x f = \int_c^d f + \int_d^x f.$$

Por tanto, el punto en que está centrada la integral indefinida no resulta muy importante. De aquí que se suela pensar en las distintas integrales indefinidas como si fueran una sola (salvo constante) y la integral indefinida se escriba como $\int f$, esto es, sin tener en cuenta el centro de la misma.

Continuidad de la integral indefinida

Lo que veremos en los próximos resultados es que las integrales indefinidas tienen siempre mejores propiedades que la función de partida. Ahora mismo, veremos que siempre son continuas.

Teorema 7.51. *Sea f una función integrable en $[a, b]$. Entonces su integral indefinida es una función de Lipschitz. En consecuencia, es continua.*

Demostración. Sea $F(z) = \int_a^z f$. Como f es integrable, también es acotada. Sea, pues, $K > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant K$ para todo $x \in [a, b]$. Sean $x, y \in [a, b]$ y supongamos que, por ejemplo, $x \leqslant y$. Por la Desigualdad de Minkowski 7.35,

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f \right| \leqslant \int_x^y |f| \leqslant K|y - x|. \qquad \square$$

El Teorema de Derivación de Integrales

Así, la integral indefinida es continua "gratis", es decir, sin ninguna suposición sobre la función de partida (salvo, claro, la de que sea integrable). Si la función de partida también es continua, veremos ahora que la integral indefinida seguirá teniendo mejores propiedades todavía.

Teorema 7.52 (de Derivación de Integrales)**.** *Sea f una función integrable en $[a, b]$ y supongamos que f es continua en $c \in [a, b]$. Entonces, su integral indefinida F es derivable en c, y $F'(c) = f(c)$.*

Demostración. Se trata de probar que

$$\lim_{x \to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c)$$

Tanto si $x > c$ como si $x < c$, se tiene

$$F(x) - F(c) = \int_a^x f - \int_a^c f = \int_c^x f,$$

luego

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) &= \frac{1}{x - c} \int_c^x f(t)\, dt - \frac{1}{x - c} \int_c^x f(c)\, dt \\ &= \frac{1}{x - c} \int_c^x \big(f(t) - f(c)\big)\, dt. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\left| \frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c) \right| = \frac{1}{|x - c|} \cdot \left| \int_c^x \big(f(t) - f(c)\big)\, dt \right|.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en c, existe algún $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(c)| < \varepsilon/2$ si $|t - c| < \delta$. Si $0 < x - c < \delta$ se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(x)}{x - c} - f(c)\right| &= \frac{1}{x - c}\left|\int_c^x (f(t) - f(c))\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{x - c}\int_c^x |f(t) - f(c)|\,dt \\
&\leqslant \frac{1}{x - c}\int_c^x \frac{\varepsilon}{2}\,dt = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si $-\delta < x - c < 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c)\right| &= \frac{1}{c - x}\left|\int_c^x (f(t) - f(c))\,dt\right| \\
&= \frac{1}{c - x}\left|\int_x^c (f(t) - f(c))\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{c - x}\int_x^c |f(t) - f(c)|\,dt \\
&\leqslant \frac{1}{c - x}\int_x^c \frac{\varepsilon}{2}\,dt = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

En resumen,

$$\left|\frac{F(x) - F(c)}{x - c} - f(c)\right| < \varepsilon$$

si $|x - c| < \delta$. Hemos probado así que, en efecto,

$$\lim_{x \to c} \frac{F(x) - F(c)}{x - c} = f(c). \qquad \square$$

Corolario 7.53. *Toda función continua definida en un intervalo es la derivada de alguna función.*

Demostración. Basta observar que, por ser continua, f es integrable en cada intervalo cerrado y acotado contenido en I, donde I es su intervalo de definición. Si fijamos un punto $c \in I$ y consideramos la integral indefinida de f, $F\colon I \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_c^x f,$$

el teorema anterior nos dice que $F' = f$ en I. $\square$

Observación. Vimos en los Tema 5 y 6 que las dos clases de funciones constituidas por las funciones continuas, por un lado, y las funciones derivadas, por el otro, cumplen ambas la propiedad de los valores intermedios, a través de los teoremas de Bolzano 5.49 y Darboux 6.19, respectivamente. Lo que nos dice el Corolario 7.53 es que la primera de estas clases está en realidad contenida en la segunda, así que el Teorema de Bolzano 5.49 no es más que un caso particular del de Darboux 6.19.

Ejemplos.

- Integral indefinida de la función signo.

  Ya sabemos que es integrable la función signo, definida por

  $$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

  Veamos cuál es su integral indefinida F. Si $x < 0$, se tiene

  $$F(x) = \int_0^x \operatorname{sgn}(t)\, dt = -\int_x^0 \operatorname{sgn}(t)\, dt = \int_x^0 dt = -x.$$

  Para $x = 0$, es obvio que $F(0) = 0$. Si $x > 0$, tenemos que

  $$F(x) = \int_0^x \operatorname{sgn}(t)\, dt = \int_0^x dt = x.$$

  Llegamos así a que $F(x) = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esta función es continua en todos los puntos. También es derivable en todos los puntos salvo el 0. Podemos comprobar de esta forma que F, la integral indefinida de la función signo, es derivable precisamente en los puntos en que la función signo es continua, que es lo que los teoremas 7.51 y 7.52 predicen.

- Derivada de $F(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{|\operatorname{sen} t|}\, dt$, $x > 0$.

  Empecemos por observar que F no es más que la integral indefinida de la función $f(x) = \sqrt{|\operatorname{sen} x|}$, que es continua en todos los puntos. El Teorema de Derivación de Integrales 7.52 hace entonces evidente que $F'(x) = f(x) = \sqrt{|\operatorname{sen} x|}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

- Derivada de $G(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \sqrt{|\operatorname{sen} t|}\, dt$.

  Si F es como en el apartado anterior, vemos que $G(x) = F(x^2)$, así que, aplicando la Regla de la Cadena 6.6, obtenemos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, es

  $$G'(x) = F'(x^2) \cdot 2x = 2x\sqrt{|\operatorname{sen} x^2|}.$$

- Derivada de $H(x) = \int_{x^3}^{1} \sqrt{|\operatorname{sen} t|}\, dt$.

  Podemos escribir
  $$H(x) = -\int_{1}^{x^3} \sqrt{|\operatorname{sen} t|\, dt},$$
  así que, definiendo de nuevo F como antes, tenemos que $H(x) = -F(x^3)$. Por tanto, obtenemos que
  $$H'(x) = -F'(x^3) \cdot 3x^2 = -3x^2\sqrt{|\operatorname{sen} x^3|}.$$

- Derivada de $J(x) = \int_{x^3}^{x^2} \sqrt{|\operatorname{sen} t|}\, dt$.

  En esta ocasión, escribimos
  $$J(x) = \int_{1}^{x^2} \sqrt{|\operatorname{sen} t|}\, dt - \int_{1}^{x^3} \sqrt{|\operatorname{sen} t|}\, dt = F(x^2) - F(x^3).$$
  Será, por tanto,
  $$J'(x) = F'(x^2) \cdot 2x - F'(x^3) \cdot 3x^2 = 2x\sqrt{|\operatorname{sen} x^2|} - 3x^3\sqrt{|\operatorname{sen} x^3|}.$$

- Derivada de $K(x) = \int_{x^3}^{x^2} \int_{1}^{t} \sqrt{|\operatorname{sen} s|}\, ds\, dt$.

  Ahora, lo que tenemos es
  $$\begin{aligned} K(x) &= \int_{x^3}^{x^2} F(t)\, dt \\ &= \int_{1}^{x^2} F(t)\, dt - \int_{1}^{x^3} F(t)\, dt \\ &= \varphi(x^2) - \varphi(x^3), \end{aligned}$$
  donde
  $$\varphi(x) = \int_{1}^{x} F(t)\, dt.$$
  Así que, teniendo en cuenta que
  $$\varphi'(x) = F(x)$$
  para todo x, obtenemos que
  $$\begin{aligned} K'(x) &= F(x^2) \cdot 2x - F(x^3) \cdot 3x^2 \\ &= 2x \int_{1}^{x^2} \sqrt{|\operatorname{sen} t|}\, dt - 3x^2 \int_{1}^{x^3} \sqrt{|\operatorname{sen} t|}\, dt. \end{aligned}$$

- Representar la función $f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt$.

  La función f no se puede expresar en términos de funciones elementales. Pero sí que podemos obtener una expresión manejable de la derivada de f, gracias al Teorema de Derivación de Integrales, que podemos aplicar porque e^{-t^2} es continua y $2x$ es derivable.

  Obsérvese en primer lugar que la función e^{-t^2} es par. Además, si $0 < x$, entonces $x < 2x$, de donde $-2x < -x$, lo que implica que

  $$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} e^{-t^2}\,dt = -\int_{-2x}^{-x} e^{-t^2}\,dt = -\int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt = -f(x).$$

  Es decir, f es una función impar, y por tanto bastará representarla en $[0,\infty)$

  Como

  $$f'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}(2e^{-3x^2} - 1) = e^{-x^2}(e^{\log 2 - 3x^2} - 1),$$

  vemos que f' tiene el mismo signo que $\log 2 - 3x^2$, luego es (estrictamente) positiva en $(0, \sqrt{(\log 2)/3})$ y estrictamente) negativa en $(\sqrt{(\log 2)/3}, \infty)$. Por tanto, f es estrictamente creciente en $[0, \sqrt{(\log 2)/3}]$ y estrictamente decreciente en $[\sqrt{(\log 2)/3}, \infty)$. De aquí que f alcanza su máximo absoluto en $\sqrt{(\log 2)/3}$ y su mínimo absoluto en 0. (Obsérvese que $f(x) > 0$ si $x > 0$.)

  De la expresión de f', obtenemos que

  $$f''(x) = 16xe^{-4x^2}(\tfrac{1}{8}e^{3x^2} - 1) = 16xe^{-4x^2}(e^{3x^2 - 3\log 2} - 1),$$

  de donde su signo es el de $x^2 - \log 2$, y deducimos que f es cóncava en $[0, \sqrt{\log 2}]$ y convexa en $[\sqrt{\log 2}, \infty)$. Tenemos un único punto de inflexión en $\sqrt{\log 2}$.

  Es fácil ver, además, que el límite de f en ∞ es 0. Basta acotar el valor de f usando la monotonía de la integral: como e^{-t^2} es decreciente en $[0,\infty)$, para todo t en el intervalo $[x, 2x]$ se cumple que $e^{-t^2} \leqslant e^{-x^2}$, y entonces

  $$0 \leqslant f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2}\,dt \leqslant \int_x^{2x} e^{-x^2}\,dt = xe^{-x^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

3.2. Primitivas. El Teorema Fundamental del Cálculo

Qué es una primitiva

En esta sección estableceremos la importante relación que existe entre derivada e integral. Introduzcamos antes un nuevo concepto.

Definición 7.54. Sea f una función acotada en $[a, b]$. Decimos que una función continua F definida en $[a, b]$ es una *primitiva* (o *anti-derivada*) de f si se cumple $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, excepto en una cantidad finita de puntos.

El Teorema Fundamental del Cálculo

El Teorema de Derivación de Integrales 7.52 establece que, si una función es continua, entonces su integral indefinida es también una de sus primitivas. El siguiente teorema dice lo opuesto, es decir, que si una función tiene una primitiva, entonces dicha primitiva es (salvo constante) la integral indefinida de la función original.

Teorema 7.55 (Fundamental del Cálculo, de Cauchy)**.** *Sea f una función integrable en un intervalo $[a, b]$, y supongamos que F es una primitiva de f. Entonces,*

$$\int_a^b f = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Demostración. Bastará probarlo en el caso en que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. (El caso general se obtiene fácilmente a partir de este.) Sea

$$P = \{\, a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \,\}$$

una partición cualquiera de $[a, b]$. Según el Teorema del Valor Medio 6.13,

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})), \end{aligned}$$

donde $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ para cada i. Obsérvese que la última expresión es una suma de Riemann de la función f asociada a la partición P. Por tanto,

$$\underline{\mathrm{S}}(f, P) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant \overline{\mathrm{S}}(f, P).$$

Como esto es cierto para cualquier partición P, tomando supremo e ínfimo resulta que

$$\underline{\int_a^b} f \leqslant F(b) - F(a) \leqslant \overline{\int_a^b} f.$$

Pero sabemos que f es integrable, así que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f$. Por lo tanto,

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \qquad \square$$

El Teorema Fundamental del Cálculo 7.55 nos proporciona un arma fundamental a la hora de calcular integrales, como se puede apreciar en los siguientes ejemplos.

Ejemplos.

- $\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx$.

  Sea $F(x) = -\cos x$. Entonces $F'(x) = \operatorname{sen} x$, así que F es una primitiva del seno. El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que

  $$\int_0^\pi \operatorname{sen} x \, dx = F(x)\Big|_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

- $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$.

  Bastará tomar la primitiva $F(x) = \operatorname{sen} x$. Obtendremos así

  $$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1.$$

- $\int_1^5 \frac{dx}{x}$.

  $$\int_1^5 \frac{dx}{x} = \log x\Big|_1^5 = \log 5 - \log 1 = \log 5.$$

- $\int_1^5 e^x \, dx$.

  $$\int_1^5 e^x \, dx = e^x\Big|_1^5 = e^5 - e.$$

- $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \, dx$.

  El integrando es la derivada de la función tangente. En consecuencia,

  $$\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \, dx = \tan x\Big|_0^{\pi/4} = \tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1.$$

- $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

- $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x\Big|_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{\pi}{4}.$$

- $\int_1^e \log x\, dx$. La derivada de la función $x \log x$ es $\log x + x \cdot 1/x = \log x + 1$. Por tanto, la función $F(x) = x\log x - x$ debe ser una primitiva del logaritmo. Así,

$$\int_1^e \log x\, dx = (x\log x - x)\Big|_1^e = (e\log e - e) - (1\log 1 - 1) = 1.$$

- $\int_0^1 \operatorname{arc\,sen} x\, dx$.

De forma similar al ejemplo anterior, observamos que la derivada de $x \operatorname{arc\,sen} x$ es $\operatorname{arc\,sen} x + x/\sqrt{1-x^2}$. No es difícil encontrar una primitiva del segundo miembro de la expresión anterior, ya que la derivada de $\sqrt{1-x^2}$ es $-x/\sqrt{1-x^2}$. En consecuencia una primitiva del arco seno es la función $F(x) = x\operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2}$. En consecuencia,

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,sen} x\, dx = (x\operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

- $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$.

La función $f(t) = e^{-t^2}$ es integrable y por tanto tiene una integral indefinida $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$. Como además f es continua, F será al mismo tiempo una primitiva de f. Sin embargo, hay que hacer notar que no es posible expresar la función F como suma, producto, cociente, composición, etc, de funciones elementales: potencias, exponenciales, logaritmos, funciones trigonométricas, etc. (Este es un hecho que se prueba mediante una sofisticada herramienta algebraica, conocida como Teoría de Galois.) Sin embargo, sí que existen métodos indirectos para evaluar esta integral, al menos de forma aproximada, comprobándose así que

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \simeq 0{,}75.$$

Integración por partes

El Teorema Fundamental del Cálculo da, como notables consecuencias, dos importantes métodos de cálculo: el de *integración por partes* y el de *cambio de variable* o *sustitución*. Estudiemos a continuación el primero de ellos.

Teorema 7.56 (Integración por partes)**.** *Si f y g son funciones derivables en $[a, b]$, tales que sus derivadas son integrables en $[a, b]$, entonces,*

$$\int_a^b fg' = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'g = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g.$$

Demostración. Notemos que fg' y $f'g$ son integrables porque los son f' y g' (estas por hipótesis) y también f y g (porque son continuas). Entonces también es integrable $(fg)' = f'g + fg'$, y por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_a^b fg' + \int_a^b f'g = \int_a^b (fg)' = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

de donde obtenemos la fórmula del enunciado. □

Ejemplos.

- $\int_0^1 xe^x \, dx$.

  Denotemos $f(x) = x$ y $g'(x) = e^x$. Será así $f'(x) = 1$ y $g(x) = e^x$. Obsérvese que la integral pedida no es más que $\int_0^1 fg'$. Integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x &= \int_0^1 fg' \\ &= f(x)g(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'g \\ &= xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx \\ &= e - e^x\Big|_0^1 = e - e + 1 = 1. \end{aligned}$$

- $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x \, dx$.

  Hagamos ahora $f(x) = x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x$, con lo que será $f'(x) = 1$ y $g(x) = -\cos x$. Empleando integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x \, dx &= -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \cos x \, dx \\ &= -\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} x\Big|_0^{\pi/2} = 1 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

- $\int_1^e \log x\, dx$.

  En este caso, el integrando de la integral de partida no es aparentemente el producto de dos funciones. Esto no importa, porque siempre podemos considerar que uno de los factores es la función idénticamente 1. Es decir, hagamos $f(x) = \log x$, $g'(x) = 1$, con lo que $f'(x) = 1/x$, $g(x) = x$. Se tendrá así,

$$\begin{aligned}\int_1^e \log x\, dx &= \int_1^e 1 \cdot \log x\, dx \\ &= x \log x\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}\, dx \\ &= e - (e-1) = 1.\end{aligned}$$

  (Obsérvese que este resultado puede también ser obtenido directamente, ya que se ha visto que una primitiva del logaritmo es la función $x \log x - x$.)

- $\int_1^e \frac{\log x}{x}\, dx$.

  Este ejemplo ilustra un artificio que aparece con frecuencia cuando se integra por partes. Hagamos $f(x) = \log x$, $g'(x) = 1/x$, con lo que $f'(x) = 1/x$, $g(x) = \log x$. Obtenemos

$$\int_1^e \frac{\log x}{x}\, dx = (\log x)^2\Big|_1^e - \int_1^e \frac{\log x}{x}\, dx = 1 - \int_1^e \frac{\log x}{x}\, dx.$$

  Aparentemente, al integrar por partes no hemos realizado ningún avance. Pero, despejando la integral, resulta que la igualdad que acabamos de probar se puede escribir también como

$$2\int_1^e \frac{\log x}{x}\, dx = 1,$$

  o, lo que es lo mismo,

$$\int_1^e \frac{\log x}{x}\, dx = \frac{1}{2}.$$

- $\int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x\, dx$.

  La misma técnica puede aplicarse en este ejemplo, solo que integrando por partes dos veces. Hagamos $f(x) = e^x$, $g'(x) = \operatorname{sen} x$, de donde $f'(x) = e^x$, $g(x) = -\cos x$. Integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x\, dx &= (-e^x \cos x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi e^x \cos x\, dx \\ &= 1 + e^\pi + \int_0^\pi e^x \cos x\, dx.\end{aligned}$$

La integral que hemos obtenido no es más sencilla que la integral de partida. Volvemos a aplicar integración por partes, haciendo en esta ocasión $f(x) = e^x$, $g'(x) = \cos x$, y por tanto, $f'(x) = e^x$, $g(x) = \operatorname{sen} x$. Será entonces

$$\begin{aligned}\int_0^\pi e^x \cos x\, dx &= (e^x \operatorname{sen} x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x\, dx \\ &= -\int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x\, dx.\end{aligned}$$

Juntando ambos cálculos, hemos obtenido que

$$\int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x\, dx = 1 + e^\pi - \int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x\, dx.$$

Despejando la integral, se tiene finalmente que

$$\int_0^\pi e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1+e^\pi}{2}.$$

- $\int_1^{e^2} (\log x)^2\, dx$.

  Hacemos $f(x) = \log x$, $g'(x) = \log x$, así que $f'(x) = 1/x$, $g(x) = x\log x - x$. Integramos por partes, y obtenemos

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} (\log x)^2\, dx &= \int_1^{e^2} \log x \cdot \log x\, dx \\ &= \big(\log x \cdot (x\log x - x)\big)\Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \cdot (x \log x - x)\, dx \\ &= 2e^2 - \int_1^{e^2} (\log x - 1)\, dx \\ &= 2e^2 - (x\log x - 2x)\Big|_1^{e^2} = 2(e^2-1).\end{aligned}$$

- $\int_0^1 x^m(1-x)^n\, dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

  Este es un ejemplo mucho más elaborado. Probaremos, por inducción sobre n, que

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\, dx = \frac{m!\, n!}{(m+n+1)!}.$$

  Para $n = 0$ y cualquier m, se tiene

$$\int_0^1 x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{m+1} = \frac{m!\, 0!}{(m+0+1)!}.$$

Ahora, supongamos que la fórmula es cierta para un cierto n y cualquier m. Veremos, integrando por partes, que también es cierta para $n+1$ y cualquier m. En efecto, hagamos $f(x) = (1-x)^{n+1}$, $g'(x) = x^m$, de donde $f'(x) = -(n+1)(1-x)^n$, $g(x) = x^{m+1}/(m+1)$. Entonces, teniendo en cuenta la hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^m(1-x)^{n+1}\,dx &= \frac{1}{m+1}x^{m+1}(1-x)^{n+1}\Big|_{x=0}^{x=1} \\ &\quad + \frac{n+1}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n\,dx \\ &= \frac{n+1}{m+1}\int_0^1 x^{m+1}(1-x)^n\,dx \\ &= \frac{n+1}{m+1}\cdot\frac{(m+1)!\,n!}{(m+n+2)!} \\ &= \frac{m!\,(n+1)!}{(m+n+2)!},\end{aligned}$$

así que la fórmula también es cierta para $n+1$ y cualquier m.

La fórmula de Taylor con residuo integral

Como aplicación adicional del método de integración por partes expuesto en 7.56, daremos a continuación una nueva versión del Teorema de Taylor 6.36, en el que se utiliza una integral para expresar el residuo de Taylor.

Teorema 7.57 (de Taylor, residuo integral)**.** *Sean f una función definida en $[a,b]$, $c \in [a,b]$ y $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que f es derivable hasta el orden $n+1$ y que $f^{(n+1)}$ es integrable en $[a,b]$. Entonces, para cada $x \in [a,b]$ es*

$$R_{n,c,f}(x) = \frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Demostración. Por el Teorema Fundamental del Cálculo 7.55, se tiene, empleando repetidas veces integración por partes (nótese que las derivadas que aparecen en los siguientes cálculos son siempre con respecto a la variable t),

$$\begin{aligned}
f(x) - f(c) &= \int_c^x f'(t)\,dt \\
&= -f'(t)(x-t)\Big|_{t=c}^{t=x} + \int_c^x f''(t)(x-t)\,dt \\
&= f'(c)(x-c) + \int_c^x f''(t)(x-t)\,dt \\
&= f'(c)(x-c) - \frac{1}{2} f''(t)(x-t)^2\Big|_{t=c}^{t=x} + \frac{1}{2}\int_c^x f'''(t)(x-t)^2\,dt \\
&= f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \frac{1}{2}\int_c^x f'''(t)(x-t)^2\,dt \\
&= \cdots \\
&= f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \\
&\quad + \frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.
\end{aligned}$$

Dicho de otra forma,

$$\frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = f(x) - P_{n,c,f}(x) = R_{n,c,f}(x). \qquad \square$$

El Teorema de Cambio de Variable

A continuación exponemos el segundo importante método de integración que surge como consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo 7.55.

Teorema 7.58 (de Cambio de Variable, o de Sustitución)**.** *Sea u una función derivable en un intervalo J tal que u' es integrable y sea I un intervalo tal que $u(J) \subset I$. Si f es continua en I, entonces $(f \circ u)u'$ es integrable en J y*

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt$$

cualesquiera que sean $a, b \in J$.

Demostración. Está claro que $(f \circ u)u'$ es integrable, pues es producto de funciones integrables.

Sea F una primitiva de f en I. Entonces, por la Regla de la Cadena, $(F \circ u)' = (f \circ u)u'$, y como f y $(f \circ u)u'$ son integrables en I, por el Teorema Fundamental del Cálculo 7.55 resulta que

$$\begin{aligned}\int_{u(a)}^{u(b)} f &= F(u(b)) - F(u(a)) \\ &= (F \circ u)(b) - (F \circ u)(a) \\ &= \int_a^b (f \circ u)u'. \qquad \square\end{aligned}$$

Ejemplos.

- $\int_2^e \frac{dx}{x \log x}$.

  Obsérvese que si $u(x) = \log x$, entonces $u'(x) = 1/x$. Por tanto, según el Teorema de Cambio de Variable,

  $$\begin{aligned}\int_2^e \frac{dx}{x \log x} &= \int_2^e \frac{1}{u(x)} u'(x)\, dx \\ &= \int_{u(2)}^{u(e)} \frac{dt}{t} = \int_{\log 2}^{1} \frac{dt}{t} \\ &= \log t \Big|_{\log 2}^{1} = -\log(\log 2).\end{aligned}$$

  En la práctica, un cambio de variable como el que acabamos de realizar no se describe mediante una función $u(x)$, sino que más bien se hablaría del cambio de variable $u = u(x)$, $du = u'(x)\, dx$. En este ejemplo concreto, el cambio se anunciaría diciendo “Hagamos el cambio de variable $u = \log x$, $du = \frac{1}{x}\, dx$”. Teniendo en cuenta que $u = \log x$ vale 1 cuando x vale e y $\log 2$ cuando x vale 2, la integral se realizaría de la siguiente forma, más sencilla:

  $$\int_2^e \frac{dx}{x \log x} = \int_{\log 2}^{1} \frac{du}{u} = \log u \Big|_{\log 2}^{1} = -\log(\log 2).$$

  También hay que observar que resulta práctica en ocasiones la estrategia alternativa que consiste en anunciar el cambio de variable inverso, es decir, no poner u en función de x, sino x en función de u. Por ejemplo, en el caso de la integral que acabamos de realizar, haríamos el cambio de variable $x = e^u$, $dx = e^u\, du$, con lo que

  $$\int_2^e \frac{dx}{x \log x} = \int_{\log 2}^{1} \frac{e^u\, du}{e^u \log e^u} = \int_{\log 2}^{1} \frac{du}{u} = \cdots = -\log(\log 2).$$

  Esta estrategia es especialmente adecuada cuando la derivada $u'(x)$ no aparece de forma muy explícita en la integral.

Hagamos notar que en el cálculo de integrales definidas por cambio de variable no es necesario deshacer después el cambio de variable (lo que sí hace falta al calcular primitivas), pues esto va ya implícito en el cambio de límites de integración.

- $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x \cos x \, dx$.

  Observamos que $\cos x$ es la derivada de la función $\operatorname{sen} x$, así que hacemos el cambio de variable $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x \, dx$. Con respecto a los límites de integración, tenemos en cuenta que cuando x vale 0, $u = \operatorname{sen} x$ también vale 0, y cuando x vale $\pi/2$, $u = \operatorname{sen} x$ vale 1. Obtenemos así

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x \cos x \, dx = \int_0^1 u^5 \, du = \left. \frac{u^6}{6} \right|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

- $\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx$.

  Podemos escribir la integral anterior como

$$\int_0^{\pi/4} \tan x \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx,$$

  Lo que nos sugiere hacer el cambio $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x \, dx$. Obtenemos así

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx &= \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, dx \\ &= -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{du}{u} = \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{du}{u} \\ &= \log u \Big|_{\sqrt{2}/2}^1 = \frac{\log 2}{2}. \end{aligned}$$

  Otra forma de realizar esta integral es haciendo el cambio de variable $u = \tan x$ o, lo que es lo mismo, $x = \arctan u$, $dx = \frac{1}{1+u^2} \, du$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx &= \int_0^1 \frac{u}{1+u^2} \, du = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2u}{1+u^2} \, du \\ &= \frac{1}{2} \log(1+u^2) \Big|_0^1 = \frac{\log 2}{2}. \end{aligned}$$

- $\int_{-1}^0 \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \, dx$.

  Hacemos el cambio $u = e^x$, $du = e^x \, dx$, obteniendo

$$\int_{-1}^0 \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} \, dx = \int_{1/e}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arc\,sen} u \Big|_{1/e}^1 = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{e}.$$

- $\int_{1/2}^{1} \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx$.

  Escribamos la integral anterior de la siguiente forma:
  $$\int_{1/2}^{1} \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx = \int_{1/2}^{1} \frac{(1+e^x)e^x}{(1-e^x)e^x}\,dx.$$
  Hagamos ahora el cambio $u = e^x$, $du = e^x\,dx$. Se obtiene
  $$\begin{aligned}\int_{1/2}^{1} \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx &= \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{1+u}{(1-u)u}\,du \\ &= 2\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{du}{1-u} + \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{du}{u} \\ &= -2\log|1-u|\Big|_{\sqrt{e}}^{e} + \log|u|\Big|_{\sqrt{e}}^{e} \\ &= 2\log(\sqrt{e}-1) - 2\log(e-1) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - 2\log(1+\sqrt{e}).\end{aligned}$$

- $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx$.

  Ponemos
  $$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx &= 2\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1-(x/2)^2}\,dx \\ &= 4\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{1-(x/2)^2}\cdot\frac{1}{2}\,dx.\end{aligned}$$
  Si hacemos el cambio de variable $u = x/2$, $du = (1/2)\,dx$, esta última integral es igual a
  $$4\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-u^2}\,du.$$
  Haciendo a continuación el cambio $u = \operatorname{sen} v$, $du = \cos v\,dv$, esto debe ser igual a
  $$\begin{aligned}4\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 v}\cos v\,dv &= 4\int_{-\pi/3}^{\pi/3} |\cos v|\cos v\,dv \\ &= 4\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2 v\,dv \\ &= 2\int_{-\pi/3}^{\pi/3} (1+\cos 2v)\,dv \\ &= (2v + \operatorname{sen} 2v)\Big|_{v=-\pi/3}^{v=\pi/3} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}.\end{aligned}$$

(En casos come este, los dos cambios de variable se suelen combinar, haciendo directamente el cambio $x = 2 \operatorname{sen} v$, $dx = 2 \cos v \, dv$.)

4. Definición y propiedades básicas de las integrales impropias

4.1. Definición de integral impropia

¿Se puede integrar una función si no es acotada o si su dominio es no acotado?

El proceso que hemos realizado hasta ahora nos permite definir la integral para funciones de un tipo bastante limitado: dichas funciones tienen que estar definidas en un intervalo cerrado y acotado, y ser ellas mismas funciones acotadas. Nos preguntamos ahora si es posible definir la integral para funciones que no cumplen estos requisitos.

Recordemos la Propiedad de Cauchy 7.14, que ya probamos anteriormente.

Teorema (Propiedad de Cauchy)**.** *Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si f es integrable en cada intervalo $[c, b]$ con $a < c < b$, entonces es integrable en $[a, b]$ y*

$$\lim_{c \to a^+} \int_c^b f = \int_a^b f.$$

Este teorema nos dice que la integral se puede calcular integrando en intervalos más pequeños que aquel donde pretendemos calcular la integral, pasando luego al límite. Esto nos sugiere que a veces quizá se puede aplicar el mismo proceso para definir la integral en situaciones más generales, como se ve en los siguientes ejemplos.

Ejemplos.

- Integral de $f\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log x$.

  Esta función no es en principio integrable en $[0, 1]$ (independientemente del valor que le asignemos al 0), ya que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ (y por tanto f no está acotada). Sin embargo, como f es continua, para cada $x \in (0, 1)$ sí que existe la integral en $[x, 1]$, que vale

  $$\int_x^1 f = \int_x^1 \log t \, dt = (t \log t - t)\big|_x^1 = -1 - x \log x + x,$$

  y como

  $$\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 f = \lim_{x \to 0^+} (-1 - x \log x + x) = -1,$$

parece natural escribir, simplemente,

$$\int_0^1 f = -1.$$

- Integral de $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$.

  En este caso, tampoco podemos hablar a primera vista de la integrabilidad de f, ya que el intervalo de definición no es acotado. Sin embargo, para cada $x \in (0,\infty)$ tenemos

  $$\int_0^x f = \int_0^x e^{-t}\, dt = -e^{-t}\big|_0^x = -e^{-x} + 1,$$

  de donde

  $$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f = \lim_{x\to\infty} (-e^{-x} + 1) = 1,$$

  lo que sugiere escribir

  $$\int_0^\infty f = 1.$$

¿Qué es una función localmente integrable?

Definición 7.59. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se dice que una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ es *localmente integrable* en A si es integrable en cada intervalo cerrado y acotado contenido en A.

Observaciones.

- Todas las funciones continuas y todas las funciones monótonas, acotadas o no, son localmente integrables.
- Una función f es localmente integrable en $[a,b)$ si, y solo si, es integrable en cada intervalo $[a,x] \subset [a,b)$.
- Una función f es localmente integrable en $(a,b]$ si, y solo si, es integrable en cada intervalo $[x,b] \subset (a,b]$.

¿Qué es una integral impropia?

Vamos a extender la integral en varios pasos. En el primero, consideraremos funciones (acotadas o no) definidas en un intervalo $[a,b)$, donde $b \in \overline{\mathbb{R}}$ y para funciones definidas en un intervalo $(a,b]$, donde $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Definición 7.60. Sea una función $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ localmente integrable, $-\infty < a < b \leqslant \infty$.

- Decimos que la integral impropia $\int_a^b f$ *converge*, o que f es *integrable en sentido impropio* en $[a,b)$, si el límite

$$\lim_{x\to b^-} \int_a^x f$$

  existe y es finito.

- Al valor de este límite lo llamamos *integral impropia* de f en el intervalo $[a,b)$, y se denota $\int_a^b f$.

- Si dicho límite existe, pero es ∞ o $-\infty$, decimos que la integral impropia *diverge* a ∞ o $-\infty$. Escribimos en este caso $\int_a^b f = \infty$ o $\int_a^b f = -\infty$.

- Si el límite no existe, decimos que la integral impropia *no existe*, o que *no tiene sentido*, o que es *oscilante*.

Definición 7.61. Sea una función $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ localmente integrable, $-\infty \leqslant a < b < \infty$.

- Decimos que la integral impropia $\int_a^b f$ *converge*, o que f es *integrable en sentido impropio* en $(a,b]$, si el límite

$$\lim_{x\to a^+} \int_x^b f$$

  existe y es finito.

- Al valor de este límite lo llamamos *integral impropia* de f en el intervalo $(a,b]$, y se denota $\int_a^b f$.

- Si dicho límite existe, pero vale ∞ o $-\infty$, decimos que la integral impropia *diverge* a ∞ o $-\infty$.

- Si el límite no existe, decimos que la integral impropia *no existe*, o que *no tiene sentido*, o que es *oscilante*.

En el segundo paso, definimos la integral para funciones definidas en un intervalo abierto (a,b), donde $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Definición 7.62. Dada una función $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ localmente integrable, $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, decimos que la integral impropia $\int_a^b f$ es *convergente* si existe un $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^c f$ y $\int_c^b f$ son ambas convergentes. En este caso, se define

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

De la Proposición 7.63 expuesta a continuación (y de su análogo para intervalos semiabiertos por la izquierda) se deduce que en la Definición 7.62 es indiferente el punto c que se elija. También se deduce que la convergencia de una integral impropia es un concepto local, que depende solo del comportamiento del integrando cerca del extremo conflictivo.

Proposición 7.63 (Aditividad de la integral impropia)**.** *Sea $f\colon [a, b) \to \mathbb{R}$ una función localmente integrable y sea $a < c < b$. La integral impropia $\int_a^b f$ converge si, y solo si, lo hace la integral impropia $\int_c^b f$, en cuyo caso se tiene*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Demostración. Basta tener en cuenta que para cada $x \in (c, b)$ es

$$\int_a^x f = \int_a^c f + \int_c^x f.$$

Por tanto, el límite cuando x tiende a b de la primera integral existe si y solo si existe el límite de la tercera integral, y cuando esto suceda, pasando al límite se obtiene la relación del enunciado. □

A continuación damos el último paso en la definición de las integrales impropias, extendiendo la integral a funciones definidas en una unión de intervalos.

Definición 7.64. Sea $J = I_1 \cup \cdots \cup I_n$, donde $I_1, \ldots, I_n$ son intervalos disjuntos. Si f es una función localmente integrable en J, se dice que la integral impropia $\int_J f$ es *convergente* si converge cada una de las integrales $\int_{a_k}^{b_k} f$, donde a_k y b_k son los extremos de I_k. En este caso, se define

$$\int_J f = \int_{a_1}^{b_1} f + \cdots + \int_{a_n}^{b_n} f.$$

Observación. Cuando los intervalos I_k son contiguos, es decir, cuando $b_1 = a_2$, …, $b_{k-1} = a_k$, …, $b_{n-1} = a_n$, suele escribirse $\int_{a_1}^{b_n} f$ en lugar de $\int_J f$.

Ejemplos.

- $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ y $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$, donde $-\infty < a < b < \infty$, $\alpha > 0$.

  Consideraremos de momento solo la primera integral. Evidentemente, su integrando es una función integrable en todo intervalo de la forma $[x, b]$, donde $a < x < b$, así que es localmente integrable en $(a, b]$. Por otra parte, si $\alpha \neq 1$,

$$\begin{aligned}\int_x^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} &= \frac{1}{(1-\alpha)(t-a)^{\alpha-1}}\bigg|_{t=x}^{t=b}\\ &= \frac{1}{(1-\alpha)(b-a)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)(x-a)^{\alpha-1}}.\end{aligned}$$

  Así que, si $0 < \alpha < 1$, obtenemos que

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \lim_{x\to a^+} \int_x^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

  Si $\alpha > 1$, en cambio, tenemos que

$$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \lim_{x\to a^+} \int_x^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} = \infty.$$

  En el caso $\alpha = 1$, las cuentas serán ligeramente diferentes. Tenemos que

$$\int_x^b \frac{dt}{t-a} = \log|t-a|\Big|_{t=x}^{t=b} = \log(b-a) - \log(x-a).$$

  Esto implica que también en este caso se tiene

$$\int_a^b \frac{dt}{t-a} = \lim_{x\to a^+} \int_x^b \frac{dt}{t-a} = \infty.$$

  Resumiendo, esta integral converge si, y solo si, $0 < \alpha < 1$. Cálculos similares demuestran que lo mismo ocurre para la segunda integral.

- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$, $\alpha > 0$.

  La función $f(t) = 1/t^\alpha$, $t \in [1, \infty)$ es localmente integrable, ya que es integrable en cada intervalo de la forma $[1, x]$. Si $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = -\frac{1}{(\alpha-1)t^{\alpha-1}}\bigg|_1^x = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}.$$

Por tanto,

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha-1}$$

si $\alpha > 1$, mientras que

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}} = \infty$$

si $0 < \alpha < 1$. Si $\alpha = 1$, tenemos entonces

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log t\Big|_1^x = \log x,$$

de modo que

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t} = \lim_{x\to\infty} \log x = \infty.$$

En conclusión, nuestra integral converge si, y solo si, $\alpha > 1$.

- $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$, $\alpha > 0$.

  Obsérvese que la función integrando está definida en el intervalo *abierto* $(0, \infty)$. Por definición, esta integral converge si, y solo si, lo hacen *simultáneamente* las integrales $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ y $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$. Si tenemos en cuenta lo probado en los dos ejemplos anteriores, vemos que para cualquier $\alpha > 0$ al menos una de estas dos integrales diverge, así que la integral que se nos sugiere diverge siempre.

- $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, dt$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

  La función $f(t) = e^{-\alpha t}$ es localmente integrable en $[0, \infty)$. Además, si $\alpha \neq 0$,

  $$\int_0^x e^{-\alpha t}\, dt = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t}\Big|_0^x = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \cdot e^{-\alpha x}.$$

  Por tanto, si $\alpha > 0$, $\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, dt = 1/\alpha$. Si $\alpha < 0$, en cambio, se tiene $\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, dt = \infty$. Para $\alpha = 0$, claramente, también se tiene $\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, dt = \infty$.

- $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

  La función $f(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$ es localmente integrable en $(-1, 1)$ porque es continua. Su integral impropia es convergente. En efecto,

  $$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{arc\,sen} t\Big|_0^x = \operatorname{arc\,sen} x,$$

de donde
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\to 1} \operatorname{arc\,sen} x = \frac{\pi}{2}.$$
De forma similar,
$$\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}.$$
En consecuencia,
$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\,dx.$

  Según la definición, esta integral converge si, y solo si, convergen simultáneamente las integrales $\int_0^\infty x\,dx$ y $\int_{-\infty}^0 x\,dx$. Se puede comprobar inmediatamente que estas dos integrales divergen, así que nuestra integral es divergente.

  Puede sentirse la tentación de calcular directamente el límite
  $$\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} x\,dx = \lim_{c\to\infty} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-c}^{c} = 0$$
  y deducir, erróneamente, que la integral converge y vale 0. Este límite así calculado se denomina *valor principal* o *valor de Cauchy* de la integral y, como se ve, puede existir sin que la integral converja.

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}.$

  Esta integral tiene que dividirse en dos así:
  $$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x}.$$
  Se concluye que no converge, ya que la integral $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ diverge. Sin embargo, dicha integral, corre también el riesgo de ser calculada erróneamente. Si evaluamos el límite
  $$\lim_{c\to 0^+} \left(\int_{-1}^{-c} \frac{dx}{x} + \int_c^1 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{c\to 0^+} (\log c - \log c) = 0,$$
  podemos llegar a la falsa conclusión de que
  $$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0.$$
  También en este caso el límite calculado recibe el nombre de *valor principal* o *valor de Cauchy* de la integral.

Compatibilidad de la integral impropia con la integral ordinaria

La noción de integral impropia se reduce a la de integral de Riemann cuando tratamos con funciones integrables Riemann. El siguiente resultado es simplemente la Propiedad de Cauchy 7.14, expresada de otra manera.

Proposición 7.65. *Sea f una función acotada en $[a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$. Entonces f es integrable en sentido impropio en $[a, b)$ si, y solo si, es integrable Riemann en $[a, b]$. En tal caso, su integral impropia es igual a su integral de Riemann.*

4.2. Propiedades básicas de las integrales impropias

Los siguientes resultados se heredan de los correspondientes para funciones integrables Riemann, sin más que pasar al límite. Hagamos observar que, aunque los enunciamos nada más en un caso particular de integral impropia, estos resultados también admiten enunciados análogos para el resto de los casos.

Linealidad de las integrales impropias

Proposición 7.66. *Sean f, g funciones integrables en sentido impropio en un intervalo $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant \infty$. Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la integral impropia $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ es convergente, y se cumple*

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Comportamiento con respecto al producto y la composición

Ejemplo. Sea $f = 1/\sqrt{x}$. Entonces $\int_0^1 f$ converge, pero $\int_0^1 f^2$ no.

En efecto,

$$\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}},$$

que converge, mientras que

$$\int_0^1 f^2 = \int_0^1 \frac{dx}{x},$$

que no converge.

De este ejemplo podemos deducir que, en algunas cosas, la integral de Riemann y la integral impropia se comportan de forma diferente: Primero, el producto de funciones integrables en sentido impropio no tiene por qué ser integrable en sentido impropio; segundo, lo mismo le ocurre a la composición de una función integrable en sentido impropio con una función continua.

Teorema Fundamental del Cálculo

A pesar de lo visto en el último ejemplo, vemos a continuación que muchos de los teoremas que eran ciertos para la integral de Riemann siguen siendo ciertos cuando lo traducimos a integrales impropias. Por ejemplo, el Teorema Fundamental del Cálculo 7.55:

Proposición 7.67. *Sea f una función localmente integrable en $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant \infty$, y supongamos que F es una primitiva de f en $[a, b)$. El límite* $\lim_{x \to b^-} F(x)$ *existe si, y solo si, la integral impropia* $\int_a^b f$ *converge o diverge. En este caso se verifica*

$$\int_a^b f = F(x)\Big|_a^b := \lim_{x \to b^-} F(x) - F(a).$$

Integración por partes

Algo parecido ocurre con el Teorema de Integración por Partes 7.56.

Proposición 7.68. *Sean f y g dos funciones derivables en $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant \infty$, tales que f' y g' son localmente integrables en $[a, b)$. Supongamos que la integral impropia* $\int_a^b f'g$ *converge o diverge y existe el límite* $\lim_{x \to b^-} f(x)g(x)$. *Entonces se verifica*

$$\int_a^b fg' = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'g := \lim_{x \to b^-} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g.$$

siempre que la suma del último miembro tenga sentido.

Ejemplo.

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x}\, dx.$$

Como el integrando es negativo, se puede ver con facilidad que esta integral o converge o diverge hacia $-\infty$. Si converge, empleando integración por partes, vemos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\log x}{x}\, dx &= \int_0^1 \log x \cdot \frac{1}{x}\, dx \\ &= (\log x)^2\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \log x\, dx \\ &= -\infty - \int_0^1 \frac{\log x}{x}\, dx = -\infty,\end{aligned}$$

lo que constituye una contradicción. Por tanto, esta integral no puede converger y debe, por tanto, ser

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x}\, dx = -\infty.$$

Cambio de variable

Finalmente, el Teorema de Cambio de Variable 7.58 también es cierto en este contexto.

Proposición 7.69. *Sean I un intervalo. Sea u una función derivable en $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant \infty$, tal que u' es localmente integrable y existe el límite $l = \lim_{y \to b^-} u(y) \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f es continua en I, Entonces la integral impropia $\int_a^b f(u(y))u'(y)\, dy$ converge (resp. diverge) si, y solo si, la integral impropia $\int_{u(a)}^l f(x)\, dx$ converge (resp. diverge). En este caso se tiene*

$$\int_a^b f(u(y))u'(y)\, dy = \int_{u(a)}^l f(x)\, dx.$$

Ejemplo.

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x}\, dx.$$

Haciendo el cambio de variable $u = \log x$, $du = (1/x)\, dx$, obtenemos que

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x}\, dx = \int_{-\infty}^0 u\, du = \frac{u^2}{2}\Big|_{-\infty}^0 = -\infty.$$

5. Convergencia de integrales impropias

5.1. Integrales impropias con integrando no negativo

En los ejemplos que hemos dado anteriormente, hemos probado que determinadas integrales impropias convergen o divergen, mediante el cálculo explícito de dichas integrales. Hay muchos casos en que esto último no es posible. A continuación, veremos algunos métodos que nos permiten averiguar si una integral impropia converge o diverge, sin necesidad de calcularla. Empezaremos por algunos criterios que sirven para estudiar la integral de una función no negativa.

El Criterio de Acotación

Proposición 7.70 (Criterio de Acotación)**.** *Sea f una función localmente integrable y no negativa en $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant \infty$. La integral impropia $\int_a^b f$ es convergente si, y solo si, la función*

$$F(x) = \int_a^x f, \qquad x \in [a, b),$$

está acotada. En caso contrario, la integral diverge a ∞.

Demostración. Como f es no negativa, la función F es creciente. Recordando que

$$\lim_{x \to b^-} F(x) = \sup\{\, F(x) \mid x \in [a, b) \,\},$$

se deduce que el límite es finito si F está acotada (superiormente), mientras que si no está acotada el límite es ∞. □

El Criterio de Comparación

Una consecuencia importante del último resultado es la siguiente, que permite reducir el estudio de la convergencia de una integral impropia al de otras conocidas.

Proposición 7.71. *Sean f y g dos funciones no negativas y localmente integrables en un intervalo $[a, b)$, $-\infty < a < b \leqslant \infty$. Supongamos que existe $c \in [a, b)$ tal que $f(x) \leqslant g(x)$ siempre que $c < x < b$.*

(I) *Si la integral impropia $\int_a^b g$ es convergente, también lo es la integral impropia $\int_a^b f$.*

(II) *Si la integral impropia $\int_a^b f$ diverge, también lo hace la integral impropia $\int_a^b g$.*

Demostración. Basta tener en cuenta que $\int_a^x f \leqslant \int_a^x g$, y aplicar la proposición anterior. □

Ejemplo.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx.$$

Obsérvese que no podemos calcular explícitamente una primitiva de la función e^{-x^2}, así que utilizaremos el Criterio de Comparación 7.70 para probar de forma indirecta que esta integral converge.

Nuestra integral converge si, y solo si, lo hacen las dos integrales $\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\,dx$ y $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$. Debido a que el integrando es una función par, ambas integrales tienen el mismo carácter (y son iguales), así que bastará estudiar la convergencia de la segunda de ellas.

Si $x \geqslant 1$, entonces $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$, así que, por el Criterio de Comparación 7.70, la integral impropia $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge, ya que, como hemos visto en un ejemplo anterior, la integral impropia $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ es convergente. Por tanto también lo hace la integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

El Criterio de Comparación Asintótica

Proposición 7.72. *Sean f y g dos funciones no negativas y localmente integrables en un intervalo $[a,b)$, $-\infty < a < b \leqslant \infty$. Supongamos que existe*

$$\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

(I) *Si $l < \infty$ y la integral impropia $\int_a^b g$ converge, entonces la integral impropia $\int_a^b f$ también converge.*

(II) *Si $l > 0$ y la integral impropia $\int_a^b g$ diverge, entonces la integral impropia $\int_a^b f$ también diverge.*

(III) *Si $0 < l < \infty$, las dos integrales $\int_a^b f$ y $\int_a^b g$ tienen el mismo carácter, es decir, ambas son convergentes o ambas son divergentes.*

Demostración. Probaremos solo el primer apartado. El segundo se prueba de forma similar, y el tercero se obtiene como combinación de estos dos.

Si $l < \infty$, podemos escoger un $K \in (l,\infty)$. Como $\lim_{x\to b^-} f(x)/g(x) = l$, existe un c, con $a < c < b$, tal que si $c < x < b$ entonces $f(x)/g(x) < K$. Por tanto, si $c < x < b$ será $f(x) < Kg(x)$. El Criterio de Comparación 7.70 nos dice entonces que, como la integral $\int_a^b g$ converge, también lo hace la integral $\int_a^b f$. $\square$

En particular, la Proposición 7.72 nos dice que, si dos funciones $f, g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ cumplen que $f(x) \sim g(x)$ cuando $x \to b^-$, entonces las dos integrales impropias $\int_a^b f$ e $\int_a^b g$ tienen el mismo carácter.

Ejemplos.

- $\displaystyle\int_1^\infty \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}\, dx.$

  Esta integral converge. Basta darse cuenta de que, como
  $$\operatorname{sen} x \sim x \qquad \text{cuando } x \to 0,$$
  se tiene entonces
  $$\operatorname{sen} \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x} \qquad \text{cuando } x \to \infty,$$
  y por tanto
  $$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} \sim \frac{1}{x^2} \qquad \text{cuando } x \to \infty.$$
  Se sigue que esta integral $\int_1^\infty \operatorname{sen}^2(1/x)\, dx$ tiene el mismo carácter que la integral $\int_1^\infty (1/x^2)\, dx$, que sabemos que converge.

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$

  Esta integral converge también. Sabemos que
  $$e^x - 1 \sim x \qquad \text{cuando } x \to 0,$$
  de donde
  $$\frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{cuando } x \to 0.$$
  Así, la integral estudiada tiene el mismo carácter que la integral
  $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}},$$
  la cual sabemos que converge.

5.2. Integrales impropias de funciones alternadas

Integrales absolutamente convergentes

A continuación estudiamos la convergencia de funciones que no tienen signo constante. Un primer recurso es estudiar la convergencia del valor absoluto de la función.

Definición 7.73. Sea f una función localmente integrable en $[a, b)$. Decimos que la integral impropia de f en $[a, b)$ es *absolutamente convergente* si la integral impropia $\int_a^b |f|$ es convergente.

Proposición 7.74. *Toda integral impropia absolutamente convergente es convergente.*

Demostración. Sea $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ localmente integrable y supongamos que la integral impropia $\int_a^b |f|$ es convergente. Definamos

$$f_+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\}, \qquad f_-(x) = \text{máx}\{-f(x), 0\}.$$

Las funciones f_+ y f_- son localmente integrables y es fácil comprobar que son no negativas y $|f| = f_+ + f_-$, así que

$$0 \leqslant f_+ \leqslant |f|, \qquad 0 \leqslant f_- \leqslant |f|,$$

de modo que las integrales impropias $\int_a^b f_+$ y $\int_a^b f_-$ son convergentes por el Criterio de Comparación 7.70. También es fácil comprobar que $f = f_+ - f_-$, luego la integral $\int_a^b f$ es convergente. $\square$

Integrales condicionalmente convergentes

Ejemplos.

- $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ es absolutamente convergente.

  En efecto, basta observar que
  $$0 \leqslant \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}.$$
  Esto implica que la integral $\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx$ es convergente. Es decir, la integral $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ es absolutamente convergente (y, por tanto, convergente).

- $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ es convergente, pero no absolutamente convergente.

  Integrando por partes, obtenemos que
  $$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx &= -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx \\ &= \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx,\end{aligned}$$
  y del ejemplo anterior se obtiene que la integral $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge.

  Sin embargo, no lo hace absolutamente. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$,
  $$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx \geqslant \frac{1}{n\pi}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx = \frac{2}{n\pi}.$$
  Luego
  $$\int_0^{k\pi} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right| dx \geqslant \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right) \xrightarrow[k]{} \infty.$$

Según acabamos de ver, hay integrales impropias convergentes que no son absolutamente convergentes. Este tipo de integrales reciben un nombre especial.

Definición 7.75. Si una integral impropia es convergente pero no es absolutamente convergente, se dice que es *condicionalmente convergente*.

El Criterio de Cauchy

Como hay integrales impropias condicionalmente convergentes, es importante disponer de criterios de convergencia que no dependan de la convergencia absoluta. De ellos, los que más se usan son los criterios de Abel y Dirichlet. Para probarlos, nos apoyaremos en el siguiente resultado:

Teorema 7.76 (Criterio de Cauchy)**.** *Sea f una función localmente integrable en $[a, b)$, donde $-\infty < a < b \leqslant \infty$. Entonces la integral impropia $\int_a^b f$ converge si, y solo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $c \in (a, b)$ tal que, si $c < x < y < b$ entonces $|\int_x^y f| < \varepsilon$.*

Demostración. Sea $F(x) = \int_a^x f$. La integral $\int_a^b f$ converge si, y solo si, existe y es finito el límite $\lim_{x \to b^-} F(x)$. Según el Criterio de Cauchy para funciones 5.38, esto ocurre si, y solo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe un c, $a < c < b$, tal que

$$\left| \int_x^y f \right| = |F(y) - F(x)| < \varepsilon$$

si $c < x < y < b$. □

El Criterio de Comparación para funciones alternadas

Proposición 7.77 (Criterio de Comparación para funciones alternadas)**.** *Sean f, g y h tres funciones en $[a, b)$. Supongamos que para algún $c \in (a, b)$ se cumple que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, si $c < x < b$. Asumamos además que g es localmente integrable y que las integrales impropias $\int_a^b f$ e $\int_a^b h$ convergen. Entonces también converge la integral impropia $\int_a^b g$.*

Demostración. Sabemos que converge la integral impropia $\int_a^b (h-f) = \int_a^b h - \int_a^b f$. Por otro lado, se tiene $0 \leqslant g(x) - f(x) \leqslant h(x) - f(x)$ si $c < x < b$. Por el Criterio de Comparación 7.70 se deduce la convergencia de la integral impropia $\int_a^b (g - f)$. Finalmente, también debe converger la integral $\int_a^b g = \int_a^b f + \int_a^b (g - f)$. □

Los criterios de Abel y de Dirichlet

Teorema 7.78 (Criterio de Abel)**.** *Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo $[a,b)$, $-\infty < a < b \leqslant \infty$, tales que*

(I) *f es integrable en sentido impropio en $[a,b)$, y*

(II) *g es monótona y acotada.*

Entonces la integral $\int_a^b fg$ es convergente.

Demostración. Como g es acotada, existe $K > 0$ tal que $|g(x)| \leqslant K$ para todo $x \in [a,b)$. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\int_a^b f$ converge, existe $c \in (a,b)$ tal que, si $c < x < y < b$ entonces $|\int_x^y f| < \varepsilon/2K$. Por el Segundo Teorema del Valor Medio Integral 7.49, si $c < x < y < b$, se tendrá

$$\int_x^y fg = g(x)\int_x^\xi f + g(y)\int_\xi^y f$$

para cierto $\xi \in (x,y)$. Por tanto,

$$\left|\int_x^y fg\right| \leqslant |g(x)|\left|\int_x^\xi f\right| + |g(y)|\left|\int_\xi^y f\right| \leqslant K\cdot\frac{\varepsilon}{2K} + K\cdot\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon,$$

así que, por el Criterio de Cauchy 7.76, $\int_a^b f$ converge. □

Teorema 7.79 (Criterio de Dirichlet)**.** *Sean f y g dos funciones definidas en $[a,b)$, $-\infty < a < b \leqslant \infty$, tales que*

(I) *f es localmente integrable en $[a,b)$ y su integral indefinida $F\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_a^x f$ es acotada, y*

(II) *g es monótona con $\lim_{x\to b^-} g(x) = 0$.*

Entonces la integral $\int_a^b fg$ es convergente.

Demostración. Como F es acotada, existe $K > 0$ tal que $|F(x)| \leqslant K$ para todo $x \in [a,b)$. Si $a < x < y < b$ se tiene por tanto

$$\left|\int_x^y f\right| = |F(y) - F(x)| \leqslant 2K.$$

Por otro lado, como $\lim_{x\to b^-} g(x) = 0$, dado un $\varepsilon > 0$ existe un $c \in (a,b)$ tal que si $c < x < b$ entonces $|g(x)| < \varepsilon/4K$. Por el Segundo Teorema del Valor Medio Integral 7.49, si $c < x < y < b$, se tendrá

$$\int_x^y fg = g(x)\int_x^\xi f + g(y)\int_\xi^y f$$

para cierto $\xi \in (x, y)$. Por tanto,

$$\left|\int_x^y fg\right| \leqslant |g(x)|\left|\int_x^\xi f\right| + |g(y)|\left|\int_\xi^y f\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4K}\cdot 2K + \frac{\varepsilon}{4K}\cdot 2K = \varepsilon,$$

y también en este caso el Criterio de Cauchy 7.76 nos dice que la integral $\int_a^b fg$ converge. □

Ejemplos.

- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx.$

  Ya hemos visto la convergencia de esta integral de otra forma, pero utilicemos ahora los criterios que acabamos de mostrar.

  Se cumple que la función $F(x) = \int_1^x \operatorname{sen} x = \cos 1 - \cos x$ es acotada. Además, la función $g(x) = 1/x$ es decreciente y $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Por el Criterio de Dirichlet 7.79, la integral estudiada converge.

- $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x\ \operatorname{sen} x}{x}\,dx.$

  Según acabamos de ver, la integral $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ converge. Además, la función $\arctan x$ es monótona y acotada. Aplicando el Criterio de Abel 7.78, nuestra integral es convergente.

Apéndice

A. Cálculo de primitivas

A.1. Métodos básicos de integración

Integración por partes. Si f y g son dos funciones derivables,

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

Cambio de variable. Si $\int f(t)\,dt = F(t)$, esto es, $F'(t) = f(t)$, y φ es una función derivable, entonces $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x))$. Dicho de otra forma,

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + \text{cte.} = F(\varphi(x)) + \text{cte.}$$

En el primer paso "se hace el cambio de variable $t = \varphi(x)$, $dt = \varphi'(x)\,dx$"; en el último paso "se deshace el cambio $t = \varphi(x)$."

A.2. Integrales elementales

a) $\displaystyle\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ + cte., si $r \neq 1$.

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log|x|$ + cte.

c) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$ + cte.

d) $\displaystyle\int \log x\,dx = x\log x - x$ + cte.

e) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$ + cte.

f) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$ + cte.

g) $\displaystyle\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$ + cte.

h) $\displaystyle\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$ + cte.

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x$ + cte.

j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotan} x$ + cte.

k) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tan} x$ + cte. $= -\operatorname{arc\,cotan} x$ + cte.

l) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arc\,senh} x$ + cte. $= \log(x+\sqrt{x^2+1})$ + cte.

m) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,cosh} x$ + cte. $= \log|x+\sqrt{x^2-1}|$ + cte.

n) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x$ + cte. $= -\operatorname{arc\,cos} x$ + cte.

A.3. Integración de algunos tipos especiales de funciones

A.3.1. Funciones integrables por partes

Para calcular la primitiva $\int f(x)g(x)\,dx$, donde $f(x)$ es un polinomio y $g(x)$ es una de las funciones siguientes: e^{ax}, $\operatorname{sen} ax$, $\cos ax$, $\operatorname{arc\,sen} ax$, $\arctan ax$, $\log x$, $(x+a)^n\ldots$, o bien $f(x)$ es una función seno o coseno y $g(x)$ es una función exponencial, se puede intentar el método de integración por partes.

A.3.2. Funciones racionales

(I) $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, donde $n \in \mathbb{N}$. Se resuelve de forma recurrente: Para $n = 1$, $I_1 = \arctan x + C$; si $n \geqslant 2$, se utiliza la siguiente forma de reducción:

$$I_n = \frac{1}{2n-2} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{n-1}.$$

Ejemplo.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(1+x^2)^3} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} \\
&= \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\Big(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8}\arctan x + \text{cte.}
\end{aligned}$$

(II) $\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^n}$, donde $a^2 - 4b < 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Se reduce al caso anterior completando cuadrados y haciendo un cambio de variable del tipo $y = \alpha x + \beta$.

Ejemplo.

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2} = \int \frac{dx}{(4+(x+1)^2)^2} = \frac{1}{16}\int \frac{dx}{\big(1+(\frac{x+1}{2})^2\big)^2}$$

Haciendo ahora el cambio $u = \frac{x+1}{2}$, $du = \frac{1}{2}\,dx$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2} &= \frac{1}{8}\int \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{1}{8}\Big(\frac{1}{2} \cdot \frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u^2}\Big) \\
&= \frac{1}{16} \cdot \frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{16}\arctan u + \text{cte.} \\
&= \frac{1}{16} \cdot \frac{\frac{x+1}{2}}{1+(\frac{x+1}{2})^2} + \frac{1}{16}\arctan \frac{x+1}{2} + \text{cte.} \\
&= \frac{1}{8} \cdot \frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2} + \frac{1}{16}\arctan \frac{x+1}{2} + \text{cte.}
\end{aligned}$$

(III) $\int \frac{Mx+N}{(x^2+ax+b)^n}\,dx$, donde $a^2 - 4b < 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Se puede descomponer siempre en la suma de una integral inmediata (tras un cambio de variable), y otra del tipo (II).

Ejemplo.

$$\int \frac{x+2}{(x^2+2x+5)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2} + \int \frac{dx}{(x^2+2x+5)^2}.$$

Haciendo el cambio de variable $u = x^2 + 2x + 5$, $du = (2x+2)\,dx$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2} &= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u} + \text{cte.} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+2x+5)^2} + \text{cte.} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora el ejemplo anterior, obtenemos que

$$\begin{aligned} &\int \frac{x+2}{(x^2+2x+5)^2}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x^2+2x+5)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2} + \frac{1}{16}\arctan\frac{x+1}{2} + \text{cte.} \end{aligned}$$

(IV) *Método de Bézout.* $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, donde P y Q son polinomios cualesquiera con $\partial P < \partial Q$. Se reduce a integrales inmediatas y de los tipos anteriores, descomponiendo $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples: una suma de una o varias funciones racionales de las formas $\frac{Mx+N}{(x^2+ax+b)^n}$, $\frac{A}{(x+c)^m}$.

Ejemplo.

$$\int \frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)^2}\,dx.$$

Sabemos que el integrando se puede escribir en la forma

$$\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Deberemos calcular los coeficientes A, B, C, D, E. Para ello, sumamos las fracciones de la derecha e igualamos los numeradores de ambos miembros.

$$\begin{aligned} &\frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \\ &\quad = \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+2)(x^2+1) + (Dx+E)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Por tanto, deberá ser

$$x+1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+2)(x^2+1) + (Dx+E)(x+2).$$

Las ecuaciones necesarias para calcular los coeficientes se pueden obtener básicamente por dos métodos: Dándose valores a x, o igualando términos semejantes. La mayoría de las veces se combinan ambos procedimientos.

En nuestro caso, si hacemos $x = 0$, obtenemos la ecuación $A+2C+2E = 1$. Haciendo $x = -2$, obtenemos $25A = -1$. Si igualamos los términos en x^4, obtenemos $A + B = 0$. Igualando términos en x^3, sale $2B + C = 0$. Finalmente, igualando términos en x^2, se obtiene $2A + B + 2C + D = 0$.

Resumiendo, hemos obtenido el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 25A & & & & & = -1 \\ A + & B & & & & = 0 \\ & 2B + & C & & & = 0 \\ A & & + 2C & & + 2E & = 1 \\ 2A + & B + & 2C + & D & & = 0 \end{cases}$$

que tiene por solución $A = -1/25$, $B = 1/25$, $C = -2/25$, $D = 1/5$, $E = 3/5$. Por tanto,

$$\int \frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)^2} = -\frac{1}{25}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{25}\int \frac{x-2}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{5}\int \frac{x+3}{(x^2+1)^2}\,dx.$$

Calculemos cada una de estas integrales por separado. La primera es inmediata.

$$-\frac{1}{25}\int \frac{dx}{x+2} = -\frac{1}{25}\log|x+2| + \text{cte}.$$

La segunda se puede descomponer en dos.

$$\begin{aligned} \frac{1}{25}\int \frac{x-2}{x^2+1}\,dx &= \frac{1}{50}\int \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{25}\int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{50}\log(x^2+1) - \frac{2}{25}\arctan x + \text{cte}. \end{aligned}$$

En cuanto a la tercera, también la descompondremos en dos, y estudiaremos cada una de sus partes por separado.

$$\frac{1}{5}\int \frac{x+3}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx + \frac{3}{5}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

La primera parte es de la forma siguiente:

$$\frac{1}{5}\int\frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{1}{10}\int\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x^2+1}+\text{cte.}$$

En la segunda, tendremos que utilizar la fórmula de reducción de (I).

$$\begin{aligned}\frac{3}{5}\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}&=\frac{3}{5}\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}\Big)\\&=\frac{3}{10}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{3}{10}\arctan x+\text{cte.}\end{aligned}$$

Reuniendo ahora todos los cálculos, obtenemos que la integral pedida es igual a

$$-\frac{1}{25}\log|x+2|+\frac{1}{50}\log(x^2+1)+\frac{11}{50}\arctan x+\frac{1}{10}\cdot\frac{3x-1}{x^2+1}+\text{cte.}$$

(V) *Método de Hermite.* El método anterior se puede sustituir por otro que es más directo cuando el denominador tiene raíces imaginarias múltiples, evitando así utilizar la engorrosa fórmula de reducción de (I). Si P y Q son polinomios y $\partial P<\partial Q$, entonces $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se descompone en suma de fracciones simples de las formas $\frac{Mx+N}{x^2+ax+b}$, $\frac{A}{x+c}$, y un término adicional que es de la forma $\big(\frac{p(x)}{q(x)}\big)'$, donde q tiene las mismas raíces que Q, pero con multiplicidad reducida en uno, y $\partial p<\partial q$.

Ejemplo. Realicemos el mismo ejemplo anterior, utilizando ahora el método de Hermite. Este dice que existen constantes A, B, C, D y E, tales que

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)^2}&=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\Big(\frac{Dx+E}{x^2+1}\Big)'\\&=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{D(x^2+1)-(Dx+E)2x}{(x^2+1)^2}\\&=\frac{\begin{array}{r}A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x+2)(x^2+1)\\+(x+2)(-Dx^2-2Ex+D)\end{array}}{(x+2)(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Es decir, deberá ser

$$x+1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)(x+2)(x^2+1)+(x+2)(-Dx^2-2Ex+D).$$

Haciendo $x=0$, se obtiene $A+2C+2D=1$. Haciendo $x=-2$, obtenemos $25A=-1$. Agrupando términos en x^4, se obtiene $A+B=0$. Considerando los términos en x^3, la ecuación obtenida es $2B+C-D=0$. Observando ahora los términos en x^2, sacamos $2A + B + 2C - 2D - 2E = 0$. Es decir, tenemos el sistema:

$$\begin{cases} 25A & = -1 \\ \quad A + \ \ B & = 0 \\ \qquad\quad 2B + \ \ C - \ \ D & = 0 \\ \quad A \qquad\quad + 2C + 2D & = 1 \\ \ 2A + \ \ B + 2C - 2D - 2E & = 0 \end{cases}$$

y su solución es $A = -1/25$, $B = 1/25$, $C = 11/50$, $D = 3/10$, $E = -1/10$. Se concluye por tanto que

$$\frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)^2} = -\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{x+2} + \frac{1}{50} \cdot \frac{2x+11}{x^2+1} + \frac{1}{10}\Big(\frac{3x-1}{x^2+1}\Big)'$$

En consecuencia,

$$\int \frac{x+1}{(x+2)(x^2+1)^2}\, dx = -\frac{1}{25}\int \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{50}\int \frac{2x+11}{x^2+1}\, dx + \frac{1}{10} \cdot \frac{3x-1}{x^2+1}.$$

Tratemos de nuevo cada integral por separado. Ya hemos visto que

$$-\frac{1}{25}\int \frac{dx}{x+2} = -\frac{1}{25}\log|x+2| + \text{cte.}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{1}{50}\int \frac{2x+11}{x^2+1}\, dx &= \frac{1}{50}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx + \frac{11}{50}\int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{50}\log(x^2+1) + \frac{11}{50}\arctan x + \text{cte.} \end{aligned}$$

Se sigue que la primitiva que pretendíamos calcular es igual a

$$-\frac{1}{25}\log|x+2| + \frac{1}{50}\log(x^2+1) + \frac{11}{50}\arctan x + \frac{1}{10} \cdot \frac{3x-1}{x^2+1} + \text{cte.}$$

A.3.3. Funciones trigonométricas

(I) $\int R(\operatorname{sen} x)\cos x\, dx$, donde R es una función racional. Se reduce a la integral de una función racional con el cambio $u = \operatorname{sen} x$.

Ejemplo.

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos x}{\operatorname{sen}^2 x + 1}\, dx.$$

Podemos escribir esta integral en la forma

$$\int \frac{\cos^2 x + 1}{\operatorname{sen}^2 x + 1} \cos x \, dx = \int \frac{2 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + 1} \cos x \, dx.$$

Haciendo el cambio $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x \, dx$, obtenemos la integral

$$\int \frac{2 - u^2}{u^2 + 1} \, du = \int \left(-1 + \frac{3}{u^2 + 1} \right) du = -u + 3 \arctan u + \text{cte}.$$

Deshaciendo el cambio de variable, obtenemos la solución

$$-\operatorname{sen} x + 3 \arctan(\operatorname{sen} x) + \text{cte}.$$

(II) $\int R(\cos x) \operatorname{sen} x \, dx$, donde R es una función racional. Se reduce a la integral de una función racional con el cambio $u = \cos x$.

Ejemplo.

$$\int \frac{\cos x + 1}{\cos^3 x + \cos x} \operatorname{sen} x \, dx.$$

Realizando el cambio de variable $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x \, dx$, la integral es igual a

$$\begin{aligned}
-\int \frac{u + 1}{u^3 + u} \, du &= -\int \frac{u + 1}{u(u^2 + 1)} \, du \\
&= -\int \frac{du}{u} - \int \frac{du}{u^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2 + 1} \, du \\
&= -\log|u| - \arctan u + \frac{1}{2} \log(u^2 + 1) + \text{cte}. \\
&= -\log|\cos x| - \arctan(\cos x) + \frac{1}{2} \log(\cos^2 x + 1) + \text{cte}.
\end{aligned}$$

(III) $\int R(\tan x) \, dx$, donde R es una función racional. Se reduce a la integral de una función racional con el cambio $u = \tan x$.

Ejemplo.

$$\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x + 2 \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x \cos x} \, dx.$$

Esta integral se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned}
\int \frac{(\operatorname{sen} x + 2 \cos x) \cos x}{(\operatorname{sen} x + \cos x) \operatorname{sen} x} \, dx &= \int \frac{(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 2) \cos x}{(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 1) \operatorname{sen} x} \, dx \\
&= \int \frac{\tan x + 2}{\tan x (\tan x + 1)} \, dx.
\end{aligned}$$

Haciendo ahora el cambio de variable $u = \tan x$, o, lo que es igual, $x = \arctan u$, $dx = \frac{du}{u^2+1}$, obtenemos la integral

$$\begin{aligned}
&\int \frac{u+2}{u(u+1)(u^2+1)}\,du \\
&= 2\int \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u+1} - \frac{3}{4}\int \frac{2u}{u^2+1}\,du - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1} \\
&= 2\log|u| - \frac{1}{2}\log|u+1| - \frac{3}{4}\arctan u - \frac{1}{2}\log(u^2+1) + \text{cte.} \\
&= 2\log|\tan x| - \frac{1}{2}\log|\tan x + 1| - \frac{3}{4}\arctan(\tan x) - \frac{1}{2}\log(\tan^2 x + 1) + \text{cte.} \\
&= 2\log|\operatorname{sen} x| - \frac{1}{2}\log|\cos x| - \frac{1}{2}\log|\operatorname{sen} x + \cos x| - \frac{3}{4}x + \text{cte.}
\end{aligned}$$

(IV) $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx$, donde R es una función racional. Un cambio de variable universal que reduce siempre esta integral a la de una función racional es

$$u = \tan\frac{x}{2}, \qquad du = \frac{2\,du}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2}.$$

No obstante, cuando se pueden utilizar los cambios de variable de los apartados (I)–(III), resultan preferibles, ya que conducen a cálculos más sencillos.

Ejemplo.

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\,dx.$$

Realizando el cambio de variable antes indicado, se obtiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{\frac{2u}{1+u^2}\cdot\frac{2\,du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}} &= \int \frac{4u}{(u^2+1)(1+2u-u^2)}\,du \\
&= -\int \frac{4u}{(u^2+1)(u-1-\sqrt{2})(u-1+\sqrt{2})}\,du \\
&= \int \frac{u+1}{u^2+1}\,du - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1-\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2u\,du}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1-\sqrt{2}} \\
&\quad - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1+\sqrt{2}} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\log(u^2+1) + \arctan u \\
&\quad - \frac{1}{2}\log|u-1-\sqrt{2}| - \frac{1}{2}\log|u-1+\sqrt{2}| + \text{cte.} \\
&= \frac{1}{2}\log\Big(\tan^2\frac{x}{2}+1\Big) + \arctan\Big(\tan\frac{x}{2}\Big) \\
&\quad - \frac{1}{2}\log\Big|\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}\Big| - \frac{1}{2}\log\Big|\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}\Big| + \text{cte.} \\
&= -\log\Big|\cos\frac{x}{2}\Big| + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log\Big|\tan^2\frac{x}{2} - 2\tan\frac{x}{2} - 1\Big| + \text{cte.} \\
&= \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\log|\cos x + \operatorname{sen} x| + \text{cte.}
\end{aligned}
$$

(V) Los productos de funciones trigonométricas se pueden transformar en sumas, mediante las fórmulas siguientes:

$$
\begin{aligned}
2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b &= \cos(a-b) - \cos(a+b) \\
2\cos a\cos b &= \cos(a-b) + \cos(a+b) \\
2\operatorname{sen} a\cos b &= \operatorname{sen}(a-b) + \operatorname{sen}(a+b).
\end{aligned}
$$

En particular,

$$
\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}, \qquad \operatorname{sen}^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}.
$$

Ejemplo.

$$
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx.
$$

Aplicando la técnica anterior, esta integral es igual a

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{1+\cos 2x}{2} &= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int\Big(1-\frac{1+\cos 4x}{2}\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{8}\Big(x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\Big) + \text{cte.}
\end{aligned}
$$

Todas estas técnicas que acabamos de ver también tienen su paralelo para funciones de tipo hiperbólico (es decir, con cosenos y senos hiperbólicos).

A.3.4. Algunas funciones algebraicas

(I) $\int R(x, x^{m/n}, \ldots, x^{r/s})$, donde R es una función racional. Se reduce a la integral de una función racional mediante el cambio $x = u^k$, donde k es el mínimo común múltiplo de los denominadores $n, \ldots, s$.

Ejemplo.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x}}{1 + \sqrt[6]{x}}\, dx.$$

Haciendo el cambio de variable $x = u^6$, $dx = 6u^5\, du$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{u^2 + 2u^3}{1+u} \cdot 6u^5\, du &= 6 \int \frac{2u^8 + u^7}{u+1}\, du \\
&= 6 \int \Big(2u^7 - u^6 + u^5 - u^4 + u^3 \\
&\qquad - u^2 + u - 1 + \frac{1}{u+1} \Big)\, du \\
&= \frac{3}{2}u^8 - \frac{6}{7}u^7 + u^6 - \frac{6}{5}u^5 + \frac{3}{2}u^4 \\
&\quad - 2u^3 + 3u^2 - 6u + 6\log|u+1| + \text{cte.} \\
&= \frac{3}{2}x^{4/3} - \frac{6}{7}x^{7/6} + x - \frac{6}{5}x^{5/6} + \frac{3}{2}x^{2/3} \\
&\quad - 2x^{1/2} + 3x^{1/3} - 6x^{1/6} + 6\log|x^{1/6} + 1| + \text{cte.}
\end{aligned}$$

(II) $\int R\big(x, (\frac{ax+b}{cx+d})^{1/n}\big)\, dx$, donde R es una función racional. Se reduce a la integral de una función racional con el cambio $\frac{ax+b}{cx+d} = u^n$.

Ejemplo.

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx.$$

Hacemos el cambio $\frac{1+x}{1-x} = u^2$. Si despejamos x, obtenemos $x = \frac{u^2-1}{u^2+1}$, de donde $dx = \frac{4u}{(u^2+1)^2}\, du$. Así, al realizar la sustitución la integral pedida queda en la forma

$$\int \frac{4u^2}{(u^2+1)^2}\, du.$$

Utilizando el Método de Hermite, vemos que

$$\frac{4u^2}{(u^2+1)^2} = \frac{2}{u^2+1} - \Big(\frac{2u}{u^2+1}\Big)',$$

así que la integral anterior es igual a

$$\begin{aligned}
2\int \frac{du}{u^2+1} - \frac{2u}{u^2+1} &= 2\arctan u - \frac{2u}{u^2+1} + \text{cte.} \\
&= 2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{1-x^2} + \text{cte.}
\end{aligned}$$

(III) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Si $a=0$, se hace el cambio de variable $u=bx+c$. Si $a\neq 0$, se completan cuadrados y se hace un cambio de variable lineal, con lo que la integral se reduce a un arcoseno, un arcoseno hiperbólico, o un arcocoseno hiperbólico.

Ejemplo.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

Completando cuadrados, la integral es igual a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(\frac{x+1}{2})^2+1}}.$$

Haciendo el cambio de variable $u=\frac{x+1}{2}$, $du=\frac{1}{2}\,dx$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}} &= \operatorname{arc\,senh} u + \text{cte.}\\ &= \operatorname{arc\,senh}\frac{x+1}{2} + \text{cte.}\\ &= \log\bigl(x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\bigr) + \text{cte.}\end{aligned}$$

(IV) $\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$, donde P es un polinomio *(Método de reducción)*. Se hallan una constante K y un polinomio Q, con $\partial Q < \partial P$, tales que

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

La constante K y los coeficientes de Q se obtienen de un sistema lineal, que resulta de derivar ambos miembros, multiplicar por el radical e igualar término a término (o dar valores a x).

Ejemplo.

$$\int \frac{x^3+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Según el método expuesto, debe ser

$$\int \frac{x^3+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{1-x^2} + K\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Derivando ambos miembros,

$$\frac{x^3+1}{\sqrt{1-x^2}} = (2Ax+B)\sqrt{1-x^2} - (Ax^2+Bx+C)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{K}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Multiplicando ambos miembros por el radical, se obtiene

$$x^3 + 1 = (2Ax + B)(1 - x^2) - (Ax^2 + Bx + C)x + K.$$

Comparando los términos en x^3, se obtiene que $-3A = 1$. De los términos en x^2, obtenemos que $-2B = 0$. Los términos en x dan que $2A - C = 0$. Finalmente los términos independientes nos proporcionan $B + K = 1$. Así pues, hemos obtenido el sistema

$$\begin{cases} -3A & & & = 1 \\ & -2B & & = 0 \\ 2A & & -C & = 0 \\ & B & & +K = 1 \end{cases}$$

que tiene por solución $A = -1/3$, $B = 0$, $C = -2/3$, $K = 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx &= -\frac{1}{3}(x^2 + 2)\sqrt{1 - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= -\frac{1}{3}(x^2 + 2)\sqrt{1 - x^2} + \operatorname{arc\,sen} x + \text{cte.} \end{aligned}$$

(V) $\int \frac{dx}{(x-p)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Se hace el cambio $x - p = \frac{1}{u}$ y se reduce a una de las anteriores.

Ejemplo.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Haciendo el cambio de variable $x = \frac{1}{u}$, $dx = -\frac{1}{u^2}\, du$, la integral se transforma en

$$\begin{aligned} -\int \frac{u^2}{\sqrt{\frac{1}{u^2} + 1}} \cdot \frac{1}{u^2}\, du = -\int \frac{u}{\sqrt{u^2 + 1}}\, du \\ = -\sqrt{u^2 + 1} + \text{cte.} \\ = -\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + \text{cte.} \end{aligned}$$

(VI) Un método alternativo para las integrales de los apartados (III)–(V) consiste en completar el cuadrado en el polinomio de la raíz, para posteriormente realizar un cambio de variable, según el caso, de uno de los tipos $x + p = k \operatorname{sen} u$, $x + p = k \operatorname{senh} u$, $x + p = k \cosh u$, lo que convierte a la integral en una de tipo trigonométrico o hiperbólico.

Ejemplo.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

Completando el cuadrado, se obtiene

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x+1)^2+4}}\,dx.$$

Si hacemos ahora el cambio de variable $x+1=2\operatorname{senh}u$, $dx=2\cosh u\,du$, se tiene, teniendo en cuenta que $\cosh^2 u-\operatorname{senh}^2 u=1$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{(2\operatorname{senh}u-1)2\cosh u}{2\sqrt{\operatorname{senh}^2 u+1}}\,du & \\
&= \int (2\operatorname{senh}u-1)\,du \\
&= 2\cosh u-u+\text{cte.} \\
&= 2\cosh\Big(\operatorname{arc\,senh}\frac{x+1}{2}\Big)-\operatorname{arc\,senh}\frac{x+1}{2}+\text{cte.} \\
&= \sqrt{x^2+2x+5}-\log(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})+\text{cte.}
\end{aligned}$$

(VII) *Sustituciones de Euler.* Otro método más para este mismo tipo de integrales consiste en la utilización de los siguientes cambios de variable:

- $\sqrt{ax^2+bx+c}=u\pm x\sqrt{a}$, si $a>0$;

  Ejemplo.

  $$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

  Realizamos el cambio de variable $\sqrt{1+x^2}=u+x$, o sea, $x=\frac{1-u^2}{2u}$, $dx=-\frac{1+u^2}{2u^2}\,du$. También será entonces $\sqrt{1+x^2}=u+x=\frac{1+u^2}{2u}$. La integral queda entonces de la forma siguiente:

  $$\begin{aligned}
  -\int \frac{\frac{(1-u^2)^2}{4u^2}}{\frac{1+u^2}{2u}}\cdot\frac{1+u^2}{2u^2}\,du &= -\int \frac{(1-u^2)^2}{4u^3}\,du \\
  &= -\frac{1}{4}\int\frac{du}{u^3}+\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}-\frac{1}{4}\int u\,du \\
  &= \frac{1}{8u^2}+\frac{1}{2}\log|u|-\frac{1}{8}u^2+\text{cte.}=
  \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\log(\sqrt{1+x^2}-x) + \frac{1}{8}\frac{1}{(\sqrt{1+x^2}-x)^2} \\
&\quad - \frac{1}{8}(\sqrt{1+x^2}-x)^2 + \text{cte.} \\
&= -\frac{1}{2}\log(\sqrt{1+x^2}+x) + \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \text{cte.}
\end{aligned}
$$

- $\sqrt{ax^2+bx+c} = ux \pm \sqrt{c}$, si $c > 0$;

  Ejemplo.

  $$\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

  Realizamos el cambio de variable $\sqrt{1+x^2} = ux + 1$, o sea,

  $$1 + x^2 = (ux+1)^2 = u^2x^2 + 2ux + 1,$$

  y, simplificando, $x = u^2x + 2u$. Despejando la x, vemos que el cambio de variable es $x = 2u/(1-u^2)$, $dx = 2(1+u^2)/(1-u^2)^2\,du$. También tendremos entonces $\sqrt{1+x^2} = ux+1 = (1+u^2)/(1-u^2)$. La integral queda entonces de la manera siguiente:

  $$
  \begin{aligned}
  &\int \frac{\left(\frac{2u}{(1-u^2)}\right)^2}{\frac{1+u^2}{1-u^2}} \cdot \frac{2(1+u^2)}{(1-u^2)^2}\,du \\
  &\qquad = \int \frac{8u^2}{(1-u^2)^3}\,du \\
  &\qquad = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u+1} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u+1)^2} + \int \frac{du}{(u+1)^3} \\
  &\qquad\quad + \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u-1)^2} - \int \frac{du}{(u-1)^3} \\
  &\qquad = -\frac{1}{2}\log|u+1| + \frac{1}{2(u+1)} - \frac{1}{2(u+1)^2} \\
  &\qquad\quad + \frac{1}{2}\log|u-1| + \frac{1}{2(u-1)} + \frac{1}{2(u-1)^2} + \text{cte.} \\
  &\qquad = \frac{1}{2}\log\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + \frac{u(u^2+1)}{(u^2-1)^2} + \text{cte.} \\
  &\qquad = -\frac{1}{2}\log(\sqrt{1+x^2}+x) + \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \text{cte.}
  \end{aligned}
  $$

- $\sqrt{ax^2+bx+c} = u(x-\alpha)$, si $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$.

Ejemplo.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx.$$

Como 1 es una raíz del polinomio x^2-1, hacemos el cambio de variable $\sqrt{x^2-1}=u(x-1)$. Elevando al cuadrado, nos queda $x^2-1=u^2(x-1)^2$, y, dividiendo por $x-1$, obtenemos $x+1=u^2(x-1)$. Despejando la x, obtenemos que el cambio de variable debe ser $x=(u^2+1)/(u^2-1)$, $dx=-4u/(u^2-1)^2\,du$. También tenemos$\sqrt{x^2-1}=u(x-1)=2u/(u^2-1)$. Realizando la sustitución, obtenemos la integral

$$\begin{aligned}
-\int \frac{\left(\frac{u^2+1}{u^2-1}\right)^2}{\frac{2u}{u^2-1}}\frac{4u}{(u^2-1)^2}\,du&\\
&= -2\int \frac{(u^2+1)^2}{(u^2-1)^3}\,du\\
&= \frac{1}{2}\int\frac{du}{u+1}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{(u+1)^2}+\int\frac{du}{(u+1)^3}\\
&\quad -\frac{1}{2}\int\frac{du}{u-1}-\frac{1}{2}\int\frac{du}{(u-1)^2}-\int\frac{du}{(u-1)^3}\\
&= \frac{1}{2}\log|u+1|+\frac{1}{2(u+1)}-\frac{1}{2(u+1)^2}\\
&\quad -\frac{1}{2}\log|u-1|+\frac{1}{2(u-1)}+\frac{1}{2(u-1)^2}+\text{cte.}\\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right|+\frac{u(u^2+1)}{(u^2-1)^2}+\text{cte.}\\
&= \frac{1}{2}\log|x+\sqrt{x^2-1}|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1}+\text{cte.}
\end{aligned}$$

(VIII) *Integrales binomias.* $\int x^r(a+bx^s)^p\,dx$, donde r, s y p son números racionales. Se realiza el cambio $u=x^s$, o sea, $x=u^{1/s}$, $dx=\frac{1}{s}u^{\frac{1}{s}-1}$. La integral queda entonces en la forma $\frac{1}{s}\int u^{r'}(a+bu)^p\,du$. Se prueba que solo se puede calcular la primitiva en los siguientes casos:

- Si $p\in\mathbb{N}$, se desarrolla $(a+bu)^p$ y la integral es inmediata.
- Si p es un entero negativo, la integral es de un tipo estudiado anteriormente, y se hace $u=t^k$, donde k es el denominador de r'.
- Si $r'\in\mathbb{Z}$, también es de un tipo ya estudiado, y se hace el cambio $a+bu=t^k$, donde k es el denominador de p.

- Si $r' + p \in \mathbb{Z}$, la integral se puede escribir $\frac{1}{s}\int u^n \left(\frac{a+bu}{u}\right)^p du$, que también está ya estudiada, y se hará el cambio $\frac{a+bu}{u} = t^k$, donde k es el denominador de la fracción p.

Referencias

[1] R. G. Bartle y D. R. Sherbert, *Introducción al Análisis Matemático de una variable*, Limusa, México, 1990.

[2] A. J. Durán, Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo. Alianza, Madrid, 1996.

[3] I. Grattan-Guinness, Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630—1910: Una introducción histórica. Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[4] M. Guzmán, El rincón de la pizarra: Ensayos de visualización en análisis matemático, Pirámide, Madrid, 1996.

[5] K. A. Ross, *Elementary analysis: The theory of calculus*, Springer, Berlín, 1980.

[6] M. Spivak, *Cálculo infinitesimal*, Reverté, 1994.

[7] T. M. Apostol, *Análisis Matemático* (2a. ed.). Reverté, Barcelona, 1991.

[8] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, Springer-Verlag, Berlín, 2003.