ECUACIONES DIFERENCIALES
Ecuaciones diferenciales de primer orden

1) Calcular la solución general y la solución particular que cumple la condición inicial de las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden:
a) $y' = 2x(y+3)$, con la condición inicial $y(0) = 5$.
Solución general: $y(x) = Ae^{x^2} - 3$,
Solución: $y(x) = 8e^{x^2} - 3$
b) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$, con la condición inicial $y(0) = 1$.
Solución general: $y(x) = Ae^{-x^2} + \frac{x^2}{e^{x^2}}$,
Solución: $y(x) = e^{-x^2} + \frac{x^2}{e^{x^2}}$.
c) $y' + y^2 x \cos(x^2) = 0$, con la condición inicial $y(0) = 1$.
Solución general: $y(x) = \frac{2}{2A + \operatorname{sen} x^2}$,
Solución: $y(x) = \frac{2}{2 + \operatorname{sen} x^2}$.
d) $y' - \frac{1}{3xy^2} = 0$,con la condición inicial $y(1) = 1$.
Solución general: $y(x) = \sqrt[3]{\ln|x| + A}$,
Solución: $y(x) = \sqrt[3]{\ln|x| + 1}$
e) $y' - \frac{\sqrt{x}}{y} = 0$, con la condición inicial $y(0) = -1$.
Solución general: $y(x) = \pm\sqrt{\frac{4}{3}\sqrt{x^3} + A}$,
Solución: $y(x) = -\sqrt{\frac{4}{3}\sqrt{x^3} + 1}$.
f) $y' + \frac{ye^x}{e^x + 1} = 0$, con la condición inicial $y(0) = 6$.
Solución general: $y(x) = \frac{A}{e^x + 1}$,
Solución: $y(x) = \frac{12}{e^x + 1}$
g) $xy' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}$, con la condición inicial $y(1) = 3$.
Solución general: $y(x) = y(x) = Ae^{\frac{1}{x}} + 1$,
Solución: $y(x) = \frac{2}{e}e^{\frac{1}{x}} + 1$.
h) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$, con la condición inicial $y(0) = 1$.
Solución general: $y(x) = Ae^{-x^2} + \frac{x^2}{e^{x^2}}$,
Solución: $y(x) = e^{-x^2} + \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

i) $xy' + y = xe^{x^2}$, con la condición inicial $y(1) = 0$.

Solución general: $y(x) = \dfrac{A}{x} + \frac{1}{2x}e^{x^2}$,

Solución: $y(x) = -\dfrac{e}{2x} + \frac{1}{2x}e^{x^2}$.

j) $y' + e^x y = e^x$, con la condición inicial $y(0) = 2$.

Solución general: $y(x) = Ae^{-e^x} + 1$,

Solución: $y(x) = e^{-e^x+1} + 1$.

k) $y' + \cos(x)y = \cos x \operatorname{sen} x$, con la condición inicial $y(0) = 2$.

Solución general: $y(x) = Ae^{-\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x - 1$,

Solución: $y(x) = 3e^{-\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x - 1$.

l) $y' + \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}y = 0$,con la condición inicial $y(0) = 3$.

Solución general: $y(x) = Ae^{-2\operatorname{sen}(\sqrt{x})}$,

Solución: $y(x) = 3e^{-2\operatorname{sen}(\sqrt{x})}$.

m) $y' - \dfrac{1}{xy} = 0$,con la condición inicial $y(1) = -3$

Solución general: $y(x) = \pm\sqrt{2\ln|x| + 2A}$,

Solución: $y(x) = -\sqrt{2\ln|x| + 9}$.

n) $y' + xe^{x^2}y^2 = 0$,

Solución general: $y(x) = \frac{1}{e^{x^2}/2 - A}$,

Solución: $y(x) = \frac{2}{e^{x^2}+1}$.

ñ) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$, con la condición inicial $y(0) = 1$.

Solución general: $y(x) = Ae^{-x^2} + x^2e^{-x^2}$,

Solución: $y(x) = e^{-x^2} + x^2e^{-x^2}$.

2) Consideremos el siguiente modelo dinamico de evolución del precio de un bien:

La variación del precio es proporcional a la diferencia entre la demanda D y la oferta S del bien $\frac{dP}{dx} = \alpha(D - S)$. La constante $\alpha > 0$ se denomina velocidad de respuesta.

Supongamos que las funciones de oferta y demanda vienen dadas en función del precio por $D = 6 - 2P$, $S = -2 + 4P$.

a) Calcular el precio de equilibrio (es decir, el precio para el que $D = S$).

b) Determinar la ecuación diferencial que determina la evolución del precio con el tiempo y su solución general.

c) Si el precio inicial es $P(0) = 3$, calcular la expresion del precio en función del tiempo.

d) ¿Cual es el comportamiento del precio a tiempos largos ($x \to +\infty$)? Interpretar el valor del límite.

Solución: a) $P^E = 4/3$ b) $P' = -6\alpha P + 8$, $P(x) = Ae^{-6\alpha x} + 4/3$. c)$P(x) = (5e^{-6\alpha x} + 4)/3$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} P(x) = 4/3 = P^E$.

3) Supongamos que el capital invertido en un producto financiero es una función del tiempo $C(t)$. En matemática financiera se llama tanto instantáneo a

$$\rho(t) = \frac{1}{C}\frac{dC}{dt}.$$

Demostrar que conocido el tanto instantáneo $\rho(t)$ y el capital inicial $C(T_0)$, se puede calcular el capital a tiempo T mediante la fórmula

$$C(T) = C(T_0)e^{\int_{T_0}^{T} \rho(t)dt}$$

Ecuaciones diferenciales de orden n

1) Calcular la solución general y la solución que cumple la condición inicial de las siguientes ecuaciones diferenciales

a) $y'' + y' - 2y = x$, con las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

Solución general: $y(x) = Ae^{-2x} + Be^{x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$,

Solución: $y(x) = \frac{1}{4}e^{-2x} + 2e^{x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

b) $y'' - 6y' + 13y = (x+1)e^{3x}$, con las condiciones iniciales $y(0) = -1/4$, $y'(0) = 1$.

Solución general: $y(x) = Ae^{3x}\cos(2x) + Be^{3x}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4}(x+1)e^{3x}$

Solución: $y(x) = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos(2x) + \frac{3}{4}e^{3x}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4}(x+1)e^{3x}$

c) $y''' + 2y'' + y' = 2e^{-2x}$, con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0, y''(0) = -1/2$.

Solución general: $y(x) = A + Be^{-x} + Cxe^{-x} - e^{-2x}$.

Solución: $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{3}{2}xe^{-x} - e^{-2x}$.

d) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 2e^{x}$, con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0, y''(0) = 1$.

Solución general: $y(x) = Ae^{2x} + Be^{x} + Cxe^{x} - x^2e^{x}$.

Solución: $y(x) = 3e^{2x} - 3e^{x} - 3xe^{x} - x^2e^{x}$.

e) $y''' - 3y'' + 3y' - y = x^2 + 2x - 1$,

Solución general: $y(x) = Ae^{x} + Bxe^{x} + Cx^2e^{x} - x^2 - 8x - 17$.

f) $y''' - 4y'' + 5y' = 5$,

Solución general: $y(x) = A + Be^{2x}\cos x + Ce^{2x}\operatorname{sen} x + x$.

g) $y'' + 3y' - 4y = 4x + 2$, con las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Solución general: $y(x) = Ae^{-4x} + Be^{x} - x - \frac{5}{4}$.

Solución: $y(x) = -\frac{3}{20}e^{-4x} + \frac{7}{5}e^{x} - x - \frac{5}{4}$.

h) $y'' + y = \sin(x)$, con la condición inicial $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

Solución general: $y(x) = A\cos x + B\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\cos x$.

Solución: $y(x) = 2\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\cos x$.

i) $y'' - 2y' - 3y = 5\cos(x)$.

Solución general: $Ae^{-x} + Be^{3x} - \frac{1}{2}\sin x - \cos x$.

j) $y''' + 4y' = 8\cos(2x) + 4\,\mathrm{sen}(2x)$,

Solución general: $y(x) = A + B\cos(2x) + C\,\mathrm{sen}(2x) - x\cos(2x) - \frac{1}{2}x\,\mathrm{sen}(2x)$.

k) $y'' - 2y' + 2y = 5\cos(x)$,

Solución general: $y(x) = Ae^{x}\cos x + Be^{x}\,\mathrm{sen}\,x - 2\,\mathrm{sen}\,x + \cos x$.

2) Determinar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales en función del parámetro a.

a) $y'' - 2ay' + y = 0$

b) $y'' - 2y' + ay = 0$.

c) $y'' - 6y' + ay = e^{x}$

3) Consideremos el siguiente modelo dinamico de mercado con expectativas sobre los precios: Supongamos que las funciones de oferta y demanda vienen dadas en función del precio y sus derivadas por

$$D(x) = 2 - 2P + 2P' + P'',$$
$$S(x) = -2 + 3P + 6P' + 2P''.$$

Supongamos que el sistema se encuentra en equilibrio en todo instante, es decir, $D(x) = S(x)$.

a) Determinar la ecuación diferencial que determina la evolución del precio con el tiempo.

b) Si el precio inicial es $P(0) = 2$ y $P'(0) = 1$, calcular la expresion del precio en función del tiempo.

c) ¿Cual es el comportamiento del precio a tiempos largos ($x \to +\infty$)?

Solución: a) $P'' + 4P' + 5P = 4$ b) $P(x) = Ae^{-2x}\cos x + Be^{-2x}\,\mathrm{sen}\,x + 4/5$. c) El precio tiende a 4/5 con comportamiento oscilatorio.