Ejercicios (Derivación)

6.1 (Regla de Leibniz)**.** Sea I un intervalo, c un punto de I, f y g funciones definidas en I. Dado $n \in \mathbb{N}$, si f y g son funciones derivables hasta el orden n en el punto c, entonces el producto fg es derivable hasta el orden n en el punto c, y se tiene

$$(fg)^{(n)}(c) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(c) g^{(n-k)}(c).$$

6.2. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones y hallar $f'(x)$, $f''(x)$, donde sea posible.

a) $f(x) = \sqrt{|x|}$, b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \leqslant 0, \\ -x^2, & \text{si } x > 0, \end{cases}$ c) $f(x) = |x|^3$.

6.3. Hallar $f'(x)$, simplificando si es posible, en los siguientes casos:

a) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$, b) $f(x) = (x^2 + 1) \arctan x$,

c) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$, d) $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$,

e) $f(x) = \log \sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$, f) $f(x) = x^{1/\log x}$,

g) $f(x) = \arctan \sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} x}{1 - \cos a \cos x}}$, h) $x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1 - x^2}$.

6.4. Hallar el número de soluciones reales que tienen las siguientes ecuaciones y dos enteros consecutivos entre los que se encuentra cada solución:

a) $3x^5 + 15x - 8 = 0$, b) $2x^3 - 9x^2 + 12x = -1$, c) $x^5 - 5x = 1$,

d) $3^{-x} = 0$, e) $e^x = 1 + x$, f) $x^5 + 2x + 1 = 0$

6.5. Demostrar las siguientes desigualdades:

a) $x - \dfrac{x^3}{3} < \arctan x < x - \dfrac{x^3}{6}$, $x \in (0, 1]$, b) $e^x > ex$, $x \neq 1$,

c) $\frac{x}{1+x} < \log(1 + x) < x$, $x > -1, x \neq 0$,

d) $2x < \operatorname{sen} 2x + \tan x$, $x \in (0, \pi/2)$,

e) $\tan x > x + \dfrac{x^3}{3}$, $x \in (0, \pi/2)$, f) $e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, $x \geqslant 0$,

g) $x - \dfrac{x^3}{6} < \operatorname{sen} x < x$, $x > 0$.

6.6. Demostrar que $\arctan x - \arctan y < x - y$, si $x > y$. Deducir que la función $\arctan$ es de Lipschitz en $\mathbb{R}$.

6.7. Probar que $\operatorname{arc\,sen} x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ para todo $x \in [-1, 1]$.

6.8. Probar que $\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x$ para todo $x \geqslant 0$. ¿Y si $x < 0$?

6.9. Sean $f, g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continuas en $[0,1]$, derivables en $(0,1)$, con $f(0) = 0$, $g(0) = 2$ y $|f'(x)| \leqslant 1$, $|g'(x)| \leqslant 1$ para todo $x \in (0,1)$. Probar que $f(x) \leqslant g(x)$ para cada $x \in [0,1]$.

6.10. Supongamos que f es derivable en (a,b) y continua en $[a,b]$ con $f(a) = f(b) = 0$. Probar que para cada real λ existe un $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \lambda f(c)$.

6.11. Supongamos que f es continua en $[a,b]$ y que es dos veces derivable en el intervalo abierto (a,b). Supongamos que la cuerda que une los puntos $A = (a, f(a))$ y $B = (b, f(b))$ corta a la gráfica de la función f en un tercer punto P distinto de A y de B. Probar que $f''(c) = 0$ para un $c \in (a,b)$.

6.12. Si f es tres veces derivable en $[a,b]$ y si

$$f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0,$$

probar que $f'''(c) = 0$ para un $c \in (a,b)$.

6.13. Sea f una función no negativa y tres veces derivable en $(0,1)$. Si f se anula en dos puntos, por lo menos, de $(0,1)$, entonces $f'''(c) = 0$ para algún $c \in (0,1)$.

6.14. Calcular los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^\varepsilon}$, $\quad \varepsilon > 0$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^a \log x$, $\quad a > 0$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{cotan} x}{x}\Big)$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan(\pi x/2)}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\log \operatorname{cotan} x)^{\tan x}$,

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\log(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\log(1+x)}\Big)$,

h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\operatorname{cotan} x - \frac{1}{x}\Big)$,

i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \log(1+\operatorname{sen}^2 x) \times \operatorname{cotan} \log^2(1+x)$,

j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{1/(1-\cos x)} \operatorname{sen} x$,

k) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{2+2x+\operatorname{sen} 2x}{(2x+\operatorname{sen} 2x)e^{\operatorname{sen} x}}$,

l) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{1/\log(e^x-1)}$,

m) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\Big)$,

n) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}\Big(\frac{1}{x^2} - \frac{\cosh x}{x \operatorname{senh} x}\Big)$,

ñ) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\Big(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1}\Big)$,

o) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$,

p) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x^2}{\log\cos(2x^2-x)}$,

q) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e-(1+x)^{1/x}}{x}$,

6.15. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$, b) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad x \in [0, 2\pi]$,

c) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, d) $f(x) = \cos x - x$,

e) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 12$, f) $f(x) = x^2 e^{-x}$.

6.16. Hallar los extremos relativos de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$, b) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$,

c) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 82x + 8$, d) $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x$,

e) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x, \quad x \in [-2, 2]$.

6.17. Hallar los máximos y mínimos absolutos, si existen, en los casos siguientes:

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$, en $[-2, 2]$,

b) $f(x) = x^5 + x + 1$, en $[-1, 1]$,

c) $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(1 + x)$, en su dominio,

d) $f(x) = \dfrac{1}{2x^4 - x + 1}$, en $(0, 1]$, $[0, 1]$, y $\mathbb{R}$,

e) $f(x) = e^{-x^2}$, en $[-1, 1]$, $(0, 1)$ y $\mathbb{R}$,

f) $f(x) = x^2 \log x$, en $[e^{-1}, e]$ y $(0, \infty)$

6.18. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Demostrar que f tiene en 0 un mínimo local.

b) Demostrar que $f'(0) = f''(0) = 0$, y que no existe $f'''(0)$.

6.19. Sea $f(x) = ax - \frac{x^3}{1+x^2}$. Probar que f es creciente en $\mathbb{R}$ si y solo si $a \geqslant 9/8$.

6.20. ¿Qué número es mayor, e^π o π^e? Probar que si $x > e$, entonces $e^x > x^e$.

6.21. Escribir $x^4 + x^3 - 3x^2 + 4x - 4$ como una suma de potencias de $x - 1$. Escribir $x^4 - 11x^3 + 43x^2 - 60x + 14$ como una suma de potencias de $x - 3$.

6.22. Escribir la fórmula de McLaurin de orden n, o la de Young, de las funciones siguientes:

a) $f(x) = e^{x^2}$, b) $f(x) = (1 + e^x)^2$, c) $f(x) = xe^x$,
d) $f(x) = \log \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, e) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$, f) $f(x) = (1 + x)\log(1 + x)$.

6.23. Escribir la fórmula de Taylor de orden n de:

a) $f(x) = (2 - x)^{-1}$, en potencias de $x - 1$,

b) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{3x}{2}$, en potencias de $x - \pi$,

c) $f(x) = \log x$, en potencias de $x - 2$,

d) $f(x) = e^x$, en potencias de $x - 1$,

e) $f(x) = \sqrt{1 + x}$, en potencias de $x - 3$,

f) $f(x) = \log 2x - \frac{1}{x-1}$, en potencias de $x - 2$.

6.24. Probar que el error cometido al sustituir $\operatorname{sen} x$ por $x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ es menor que 10^{-4}, si $|x| \leqslant \frac{\pi}{4}$.

6.25. Probar que el error cometido al sustituir $\operatorname{sen}(e^x - 1)$ por $x + \frac{1}{2}x^2$ es menor que $3 \cdot 10^{-3}$, si $|x| \leqslant \frac{1}{10}$.

6.26. Probar que el error cometido al sustituir $\cos^2 3x$ por $1 - 9x^2 + 27x^4$ es menor que $4 \cdot 10^{-5}$, si $|x| \leqslant \frac{1}{10}$.

6.27. Probar que el error cometido al sustituir $e^{\operatorname{sen} x}$ por $1 + x + \frac{1}{2}x^2$ es menor que $3 \cdot |x|^3$.

6.28. Hallar en cada caso el mayor $p \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^p}$ es finito (se dice entonces que $f(x)$ es un *infinitésimo* de orden p cuando $x \to a$):

a) $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = 0$, b) $f(x) = \log(1 + x), \quad a = 0$,
c) $f(x) = 1 - x + \log x, \quad a = 1$, d) $f(x) = 1 - \cos x, \quad a = 0$,
e) $f(x) = \tan x - \operatorname{sen} x, \quad a = 0$, f) $f(x) = \sqrt{x} - 2, \quad a = 4$,
g) $f(x) = e^x - 1, \quad a = 0$, h) $f(x) = \cos x - e^{-x^2/2}, \quad a = 0$,
i) $f(x) = \operatorname{sen} x^2 - \log(1 + x^2), \quad a = 0$.

6.29. Calcular los límites siguientes, utilizando la fórmula de Young:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{sen} ax - 3ax - a^3x^3}{6bx - 6\operatorname{sen} bx + b^3x^3}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 - x + \log x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{\arctan x - x}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{(x^2 - \operatorname{sen}^2 x)^{1/2}}$,

e) $\lim_{x\to\infty} x^2\left(1-\sqrt{x(1+x)}\log\dfrac{1+x}{x}\right)$, f) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{senh} x-\tan x}{\operatorname{sen} x-\operatorname{arc\,sen} x}$,

g) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x-\tan x}{\operatorname{arc\,sen} x-\arctan x}$, h) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{1-x}}{\operatorname{sen} x}$,

i) $\lim_{X\to 0}\dfrac{(\operatorname{sen} 3x-3\operatorname{sen} x)^2}{(\cos 2x-\cos x)^3}$.

6.30. Estudiar el crecimiento, los extremos y la convexidad de las siguientes funciones, y dibujar su gráfica:

a) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, b) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$, c) $f(x)=\sqrt{4x^2-x}$,

d) $f(x)=\dfrac{1}{\log x}$, e) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$, f) $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}$,

g) $f(x)=\tan^2 x$, h) $f(x)=x^6-3x^4+3x^2-5$.