Facultad de Informática
Grado en Ingeniería Informática

Lógica

BLOQUE 1: LÓGICA PROPOSICIONAL

Tema 4: Cálculo Deductivo

Profesor: Javier Bajo
jbajo@fi.upm.es

Introducción.

❑ Estructura de la asignatura

Bloque 1
Lógica Proposicional

↓

Bloque 2
Lógica de Primer Orden

Lógica.

❑ Bloque I

Tema 1
Lenguajes proposicionales: sintaxis y uso en la formalización de argumentos

Tema 2
Semántica formal: Funciones de verdad, tautologicidad, consecuencia lógica

Tema 3
Razonamiento semántico: definición de modelos y contra-modelos

Tema 4
Cálculo de deducción natural proposicional

Tema 5
Forma clausular

Tema 6
Cálculo de resolución proposicional

Tema 7
Conceptos metalógicos fundamentales de los sistemas formales proposicionales

Introducción.

❑ ¿Razones para utilizar el cálculo deductivo?

- La principal razón es la dificultad para determinar $\Gamma \models A$ por medios semánticos:
  - En el caso de la Lógica proposicional, hay que explorar un número exponencialmente creciente de valoraciones.
- Como alternativa se plantea el cálculo deductivo: determinar que A se deduce de Γ por medios sintácticos: $\Gamma \vdash A$.
  - En lugar de razonar sobre el significado de las fórmulas (valoraciones), razonar sobre la forma de las fórmulas. Construir una argumentación paso a paso, manipulando los símbolos de las fórmulas, sabiendo que cada paso es válido.
- Existen distintos tipos de cálculos deductivos. Nosotros utilizaremos el cálculo por deducción natural.
- El análisis de la corrección de un argumento por medios sintácticos se hace siempre en un contexto o marco formal, denominado sistema formal.
- En un sistema formal <u>los símbolos carecen de significado</u>, y al manipularlos hemos de ser cuidadosos y no presuponer nada sobre sus propiedades, salvo lo que se especifique en el sistema

Introducción.

❑ ¿Razones para utilizar el cálculo deductivo?

- El cálculo lógico nos podrá decir que esquemas de inferencia son validos y cuáles no.

- Lógica proposicional como sistema de deducción:
  - Se parte de un conjunto de formulas que se denominan PREMISAS.
  - Se utilizan las reglas de inferencia de manera que conduzcan a otros formulas que se denominan CONCLUSIONES.
  - El paso lógico de las premisas a la conclusión se denomina DEDUCCIÓN ó DERIVACIÓN.
  - La conclusión que se obtiene se dice que es una CONSECUENCIA LÓGICA de las premisas si cada paso que se da para llegar a la conclusión está permitido por una regla.

Sistemas Formales.

❑ **Sistema Formal.** Un sistema formal de demostración consta de:

- Un **lenguaje formal** en el que se enuncia la teoría L(T) (alfabeto y reglas sintácticas de formación de fórmula).
- Un conjunto de **axiomas lógicos** (fórmulas válidas sin prueba, que puede ser vacío).
- Un conjunto de **reglas de inferencia** para demostrar fórmulas: un **cálculo**.
- Una definición de **prueba** o **demostración** de fórmulas de L(T).
- Una **teoría T** es un sistema formal ampliado con un conjunto Γ de axiomas no lógicos o premisas (es decir, que se consideran como verdad): **T[Γ]**.
  - Si $\Gamma = \varnothing$ entonces T es la teoría básica del sistema formal

Sistemas Formales.

- Una **demostración** o **prueba** de una fórmula B en una teoría $T[\Gamma]$ (escrito $\mathbf{T[\Gamma] \vdash B}$) es una secuencia finita de fórmulas tal que:
  - toda fórmula de la secuencia es
    - un axioma o premisa de la teoría, o
    - el resultado de aplicar una regla de inferencia a fórmulas anteriores en la secuencia
  - B es la última fórmula de la secuencia

- Un **teorema** de una teoría $T[\Gamma]$ es una fórmula para la que existe al menos una demostración en $T[\Gamma]$

$T[\Gamma] \vdash B$ indica que B se deduce de $T[\Gamma]$ o que B es teorema de $T[\Gamma]$

Sistemas Formales.

- **¿Qué se pide a un sistema formal?**
  - **Corrección**: **Teorema de validez**

    Todos los teoremas de T[Γ] son consecuencias lógicas de Γ:

    si **T[Γ]** $\vdash$ **B** entonces $\Gamma \vDash$ **B**

  - **Completitud: Teorema de completitud**

    Dada una teoría T[Γ], todas las consecuencias lógicas de Γ son teoremas de T[Γ]:

    si $\Gamma \vDash$ **B** entonces **T[Γ]** $\vdash$ **B**

Si el cálculo es correcto y completo entonces $\vdash$ y $\vDash$ son equivalentes

Deducción Natural.

- No hay axiomas lógicos
- Reglas de inferencia: dos por cada conectiva (introducción y eliminación)
- Definición de prueba: una prueba de una fórmula es una secuencia finita de fórmulas en la que cada elemento es:
  - un **supuesto** o premisa de la teoría, o
  - el resultado de la aplicación de una regla de inferencia a fórmulas anteriores en la secuencia

  y la última fórmula de la secuencia es la fórmula probada

Deducción Natural: Premisas y Supuestos.

- **Premisas y Supuestos:** Ambas son fórmulas añadidas a una teoría básica T y que pueden aparecer en una prueba sin requerir demostración.

- Sin embargo,
  - mientras que las premisas son añadidas permanentemente
  - los supuestos son incorporados temporalmente a T:
    - Un supuesto es *introducido* en un determinado punto de la demostración
    - y es *cancelado* (descargado) en otro punto posterior,
    - como resultado de la cancelación, una *nueva fórmula* queda demostrada

- Lo que significa usar un supuesto es lo siguiente:
  - *«supongamos que A»*
  - *«entonces demuestro (usando A) que B»*
  - *«en realidad acabo de mostrar que si tuviera A como premisa, entonces podría demostrar B»*
  - *«eso equivale a decir que he demostrado la implicación $A \rightarrow B$»*

Premisas, supuestos y el Teorema de la Deducción

- Siendo $T[A_1, A_2, ..., A_n]$ una teoría básica ampliada con un conjunto de n premisas, si la incorporación como supuesto de un fórmula A permite deducir otra fórmula B:

$$T[A_1, A_2, ..., A_n] \cup \{A\} \vdash B$$

entonces

$$T[A_1, A_2, ..., A_n] \vdash A \rightarrow B$$

- **Teorema de la deducción**: En general, tanto para premisas como para supuestos:

$$\mathbf{T[A] \vdash B \text{ si y sólo si } T \vdash A \rightarrow B}$$

Deducción Natural: Reglas de Inferencia.

- En la definición de las reglas de inferencia vamos a usar A y B, que no son símbolos de proposición: son variables sobre formulas del lenguaje (metavariables)

- Mediante metavariables podemos razonar sobre conjuntos (infinitos) de formulas que comparten una misma forma lógica

  Por ejemplo: $A \wedge \neg A$ agrupa

  $p \wedge \neg p$, $q \wedge \neg q$, $r \wedge \neg r$, ...
  $(p \to q) \wedge \neg(p \to q)$, $(q \vee r) \wedge \neg(q \vee r)$, ...
  $((p \to q) \wedge r) \wedge \neg((p \to q) \wedge r)$, $(p \vee q \to r \wedge s) \wedge \neg(p \vee q \to r \wedge s)$,
  ...
  ...

- Cada regla de inferencia es una metaregla con infinitas instancias

  Si p entonces $p \vee q$; si p entonces $p \vee (q \wedge \neg r)$; ...
  Si $(p \to q)$ entonces $(p \to q) \vee (q \wedge r)$; si $(p \to q)$ entonces $(p \to q) \vee$ ...
  En general: si A entonces $A \vee B$

Reglas básicas.

❑ Reglas de inferencia.

- Reglas que nos permitan justificar nuestras deducciones de conclusiones a partir de premisas dadas.

- Las reglas de deducción natural son 10, dos por conector:

  - Reglas de la conjunción.
  - Reglas de la disyunción.
  - Reglas del bicondicional.
  - Reglas de la negación.
  - Reglas del condicional.

Reglas básicas: Conjunción.

Reglas de la conjunción.

- Introducción de la conjunción. (A y B son meta-variables, variables sobre las fórmulas que no significan valores de verdad).

$$\frac{A \quad B}{A \wedge B} \qquad \frac{A \quad B}{A \wedge B}$$

T[p,q] |– p∧q

1. p	premisa
2. q	premisa
3. p∧q	$I_{\wedge}$ (1,2) (introducción ∧)

- Eliminación de la Conjunción

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

T[p∧q] |– p

1. p∧q	premisa
2. p	$E_{\wedge}$ (1) (eliminación ∧)

T[p∧q] |– q

1. p∧q	premisa
2. q	$E_{\wedge}$ (1) (eliminación ∧)

Reglas básicas: Disyunción.

Reglas de la disyunción.

- Eliminación de la disyunción

$$\begin{array}{c} A \vee B \\ A \rightarrow C \\ B \rightarrow C \\ \hline C \end{array}$$

T[p∨q, p →¬r, q →¬r] |– ¬r

1. p ∨ q	premisa
2. p →¬r	premisa
3. q →¬r	premisa
4. ¬r	$E_{\vee}$ (1,2,3)

- Introducción de la disyunción.

$$\begin{array}{c} A \\ (B) \\ \hline A \vee B \end{array} \qquad \begin{array}{c} B \\ (A) \\ \hline B \vee A \end{array}$$

T[p] |– p∨q

1. p	premisa
2. p ∨ q	$I_{\vee}$ (1)

T[p] |– q∨p

1. p	premisa
2. q ∨ p	$I_{\vee}$ (1)

Reglas básicas: Disyunción.

$T[s \wedge (p \vee q), p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r] \vdash s \wedge \neg r$

1. $s \wedge (p \vee q)$	premisa
2. $p \vee q$	$E_{\wedge}$ (1)
3. $p \rightarrow \neg r$	premisa
4. $q \rightarrow \neg r$	premisa
5. $\neg r$	$E_{\vee}$ (2,3,4)
6. s	$E_{\wedge}$ (1)
7. $s \wedge \neg r$	$I_{\wedge}$ (5,6)

Reglas básicas: Negación.

❑ Reglas de la negación.

- Introducción de la negación.

$$\frac{A \rightarrow (B \land \neg B)}{\neg A}$$

T[¬p → q ∧ ¬q] ⊢ p

$T[\neg p \rightarrow q \land \neg q] \vdash p$

1.	$\neg p \rightarrow q \land \neg q$	premisa
2.	$\neg\neg p$	$I_\neg$ (1)
3.	p	$E_\neg$ (2)

- Eliminación de la negación.

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

Reglas básicas: Implicación.

Reglas de la implicación.

- Eliminación de la implicación.

$$\frac{A \rightarrow B \qquad A}{B}$$

$T[p \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow q, p] \vdash q$	
1. $p \rightarrow \neg r$	premisa
2. p	premisa
3. $\neg r$	$E_{\rightarrow}$ (1,2)
4. $\neg r \rightarrow q$	premisa
5. q	$E_{\rightarrow}$ (3,4)

- Introducción de la implicación.

$$\frac{A \text{ (supuesto)} \qquad B}{A \rightarrow B}$$

$T[p \rightarrow q, q \rightarrow r] \vdash p \rightarrow r$	
1. $p \rightarrow q$	premisa
2. $q \rightarrow r$	premisa
3. p	supuesto
4. q	$E_{\rightarrow}$ (1,3)
5. r	$E_{\rightarrow}$ (2,4)
6. $p \rightarrow r$	$I_{\rightarrow}$ (3,5)

Reglas Básicas:
Doble Implicación.

❑ Reglas del bicondicional.

- Introducción del bicondicional.

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ B \rightarrow A \\ \hline A \leftrightarrow B \end{array}$$

T[p → ¬r, ¬r → p] ⊢ p ↔ ¬r

1. $p \rightarrow \neg r$	premisa
2. $\neg r \rightarrow p$	premisa
3. $p \leftrightarrow \neg r$	$I_{\leftrightarrow}$ (1,2)

- Eliminación del bicondicional.

$$\begin{array}{l} A \leftrightarrow B \\ \hline A \rightarrow B \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \leftrightarrow B \\ \hline B \rightarrow A \end{array}$$

T[p ↔ q ∧ r, p] ⊢ r

1. $p \leftrightarrow q \wedge r$	premisa
2. $p \rightarrow q \wedge r$	$E_{\leftrightarrow}$ (1)
3. p	premisa
4. $q \wedge r$	$E_{\rightarrow}$ (2,3)
5. r	$E_{\wedge}$ (4)

Ejercicios.

1. $T[p] \vdash q \rightarrow p$
2. $T[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
3. $T[\neg p \rightarrow \neg q] \vdash (\neg p \rightarrow q) \rightarrow p$
4. $T[\neg p \rightarrow \neg q] \vdash q \rightarrow p$
5. $T[p \rightarrow q, q \rightarrow r] \vdash p \rightarrow r$
6. $T[p \rightarrow (q \rightarrow r), q] \vdash p \rightarrow r$
7. $T[p \wedge q \rightarrow r, r \wedge s \rightarrow t] \vdash p \wedge q \wedge s \rightarrow t$
8. $T[p \wedge q \rightarrow r] \vdash p \wedge \neg r \rightarrow \neg q$
9. $T[p \vee q \rightarrow r, s \rightarrow p] \vdash s \rightarrow r$
10. $T[p \vee p] \vdash p$

Reglas derivadas.

❑ Reglas derivadas.

- Reglas que nos permitan justificar nuestras deducciones de conclusiones a partir de premisas dadas.

- Aparecen porque en ocasiones es frecuente encontrar estructuras o pasos que se repiten con frecuencia en las demostraciones. De esta forma es posible acortar las demostraciones.

- Se distinguen principalmente:
  - Reglas para la negación.
  - Reglas para la implicación.
  - Reglas de Morgan.
  - Reglas de corte.

Reglas derivadas.

- En distintas demostraciones se repiten con frecuencia los mismos pasos:

$T[r \rightarrow (q \wedge s), \neg(q \wedge s)] \vdash \neg r$

1.	$r \rightarrow (q \wedge s)$	premisa
2.	$\neg(q \wedge s)$	premisa
3.	r	supuesto
4.	$q \wedge s$	E$\rightarrow$ (1,3)
5.	$(q \wedge s) \wedge \neg(q \wedge s)$	I$\wedge$ (2,4)
6.	$r \rightarrow (q \wedge s) \wedge \neg(q \wedge s)$	I$\rightarrow$ (3,5)
7.	$\neg r$	I$\neg$ (6)

$T[p \rightarrow q, r \wedge \neg q] \vdash r \wedge \neg p$

1.	$p \rightarrow q$	premisa
2.	$r \wedge \neg q$	premisa
3.	$\neg q$	E$\wedge$ (2)
4.	p	supuesto
5.	q	E$\rightarrow$ (1,4)
6.	$q \wedge \neg q$	I$\wedge$ (3,5)
7.	$p \rightarrow q \wedge \neg q$	I$\rightarrow$ (4,6)
8.	$\neg p$	I$\neg$ (7)
9.	r	E$\wedge$ (2)
10.	$r \wedge \neg p$	I$\wedge$ (8,9)

- Aunque son distintas las fórmulas que aparecen en estos dos ejemplos, las líneas destacadas tienen una estructura común
- Podríamos acortar las dos demostraciones si previamente demostramos con carácter general que $T[A \rightarrow B, \neg B] \vdash \neg A$, para cualesquiera fórmulas A y B.

Reglas derivadas.

- En distintas demostraciones se repiten con frecuencia los mismos pasos:

$T[A \rightarrow B, \neg B] \vdash \neg A$	
1. $A \rightarrow B$	premisa
2. $\neg B$	premisa
3. $\quad A$	supuesto
4. $\quad B$	$E\rightarrow$ (1,3)
5. $\quad B \wedge \neg B$	$I\wedge$ (2,4)
6. $A \rightarrow B \wedge \neg B$	$I\rightarrow$ (3,5)
7. $\neg A$	$I\neg$ (6)

$$\frac{A \rightarrow B \qquad \neg B}{\neg A}$$

Modus Tollens (MT)

Las demostraciones anteriores quedarían ahora:

$T[r \rightarrow (q \wedge s), \neg(q \wedge s)] \vdash \neg r$	
1. $r \rightarrow (q \wedge s)$	premisa
2. $\neg(q \wedge s)$	premisa
3. $\neg r$	**MT (1,2)**

$T[p \rightarrow q, r \wedge \neg q] \vdash r \wedge \neg p$	
1. $p \rightarrow q$	premisa
2. $r \wedge \neg q$	premisa
3. $\neg q$	$E\wedge$ (2)
4. $\neg p$	**MT (1,3)**
5. r	$E\wedge$ (2)
6. $r \wedge \neg p$	$I\wedge$ (8,9)

Reglas derivadas.

- Estas son las reglas derivadas de uso más frecuente, queda como ejercicio su demostración a partir de las reglas básicas:

- Reglas para la implicación:
  - $T[A \rightarrow B, B \rightarrow C] \vdash A \rightarrow C$ — Transitividad
  - $T[A \rightarrow B, \neg B] \vdash \neg A$ — Modus Tollens

- Reglas para la disyunción:
  - $T[(A \vee B) \vee C] \vdash A \vee (B \vee C)$ — Asociatividad
  - $T[A \vee B] \vdash B \vee A$ — Conmutatividad

- Reglas de De Morgan:
  - $T[\neg(A \wedge B)] \vdash \neg A \vee \neg B$ — De Morgan
  - $T[\neg(A \vee B)] \vdash \neg A \wedge \neg B$ — De Morgan

- Reglas de corte:
  - $T[A \vee B, \neg A] \vdash B$ — Corte
  - $T[A \vee B, \neg B] \vdash A$ — Corte
  - $T[A \vee B, \neg A \vee C] \vdash B \vee C$ — Corte

Reglas derivadas.

- Sea A una fórmula y B1 una sub-fórmula de A, si
  - $\vdash$ A
  - $\vdash$ B1 $\leftrightarrow$ B2
  - A' resulta de sustituir en A todas o algunas de las apariciones de B1 por B2

entonces

  - $\vdash$ A'

T[p $\leftrightarrow$ r, q $\rightarrow$ s, s $\rightarrow$ t $\wedge$ r] $\vdash$ q $\rightarrow$ p $\wedge$ t

1.	q $\rightarrow$ s	premisa
2.	s $\rightarrow$ t $\wedge$ r	premisa
3.	q	supuesto
4.	s	E$\rightarrow$ (1,3)
5.	t $\wedge$ r	E$\rightarrow$ (2,4)
6.	p $\leftrightarrow$ r	premisa
7.	t $\wedge$ p	**Intercambio (5,6)**
8.	p $\wedge$ t	conmutatividad (7)
9.	q $\rightarrow$ p $\wedge$ t	I$\rightarrow$ (3,8)

Deducción Natural en la Práctica.

- Como conclusión, ¿qué podemos utilizar para demostrar la corrección de una argumentación mediante deducción natural?

  - Las 10 reglas básicas
  - Las reglas derivadas mencionadas previamente (en ocasiones se piden demostraciones sin usar estas reglas)
  - El (teorema de) intercambio, que resume unas pocas reglas
  - Y nada más

Ejercicios.

- Demostrar las siguientes fórmulas:

  1. $T \vdash p \wedge q \rightarrow p$
  2. $T \vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$
  3. $T \vdash (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
  4. $T \vdash (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
  5. $T \vdash \neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
  6. $T \vdash (p \rightarrow \neg q) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$
  7. $T \vdash (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
  8. $T \vdash \neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$
  9. $T \vdash p \rightarrow (q \wedge \neg q \rightarrow \neg p)$
  10. $T \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r))$

Ejercicios.

- Demostrar los siguientes esquemas argumentales:
  1. $T[p \rightarrow q, p] \vdash q$
  2. $T[p] \vdash p \vee q$
  3. $T[p \vee p] \vdash p$
  4. $T[p \wedge (q \vee r)] \vdash p$
  5. $T[p] \vdash \neg\neg p$
  6. $T[p \vee q \rightarrow r] \vdash q \rightarrow r$
  7. $T[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \vdash q \rightarrow (p \rightarrow r)$
  8. $T[p \rightarrow q] \vdash p \vee r \rightarrow q \vee r$
  9. $T[\neg q \rightarrow r, t \rightarrow \neg q, \neg s \rightarrow \neg q] \vdash t \vee \neg s \rightarrow r$
  10. $T[p \vee (q \rightarrow r) \rightarrow q, p] \vdash q$
  11. $T[\neg p \rightarrow \neg s, \neg p \vee r, r \rightarrow \neg t] \vdash \neg s \vee \neg t$
  12. $T[(p \rightarrow q) \wedge t, (r \vee p) \wedge \neg q, \neg t \leftrightarrow \neg s] \vdash r \wedge s$
  13. $T[p \wedge q \rightarrow r, \neg(p \vee r) \rightarrow s, p \rightarrow q] \vdash \neg s \rightarrow r$