Dinámica del sólido

Dinámica del sólido
- Definición y modelos

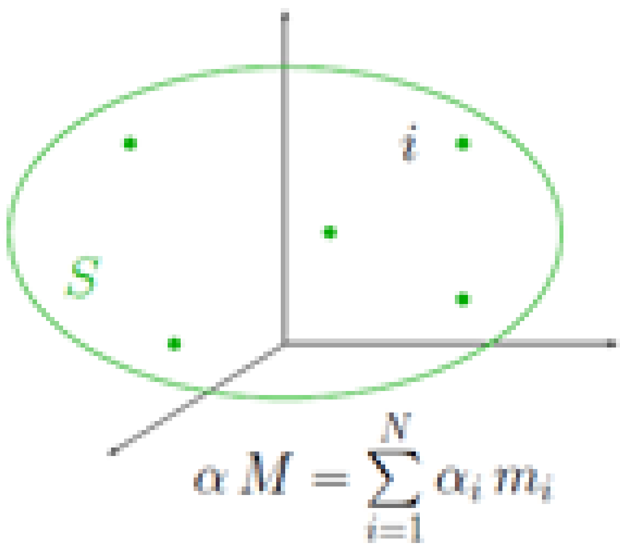
Geometría de masas
- Centro de masas. Definición
- Cálculo de centros de masas
  - Simetrías
  - Sólidos compuestos
  - Teoremas de Pappus-Guldin
- Momentos de inercia
- Productos de inercia
- Tensor de inercia
- Direcciones principales de inercia
- Traslación de ejes. Teorema de Steiner

5

Definición y modelos

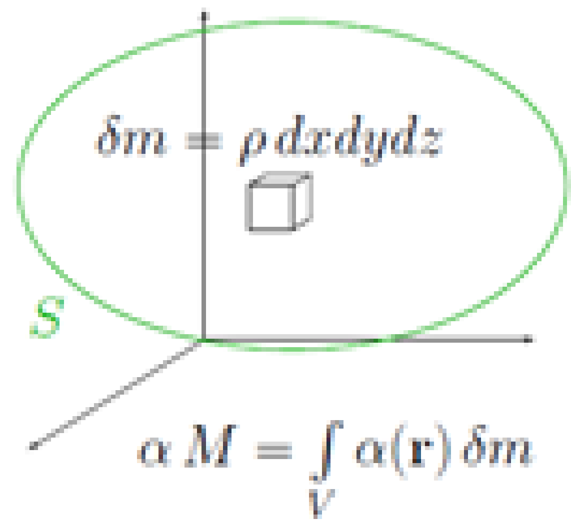
- **Sólido rígido:** conjunto de partículas cuyas distancias mutuas se mantienen constantes.

Modelo discreto



N masas distribuidas ($N \to \infty$)

Modelo continuo



Sólido como continuo ($m_i \to 0$)

Geometría de masas

En la dinámica del solido influyen la ***masa*** y su ***distribución en el espacio.***

Se tiene en cuenta mediante las magnitudes siguientes:

- La ***masa total,*** como en la partícula y en sistemas de partículas.
- La posición promediada de las masas, o ***centro de masas***, como en sistemas de partículas.
- Otras magnitudes propias de sólidos, como los ***momentos y productos de inercia***, que recogen la inercia rotacional o resistencia al giro.

La ***geometría de masas*** es la parte de la mecánica que estudia las propiedades del sistema material relacionadas con la masa y su situación en el sistema material o en el sólido. En ella se resuelven problemas relacionados con el cálculo de:

- Centro de masas
- Momentos de inercia

Geometría de masas: Centro de masas

- ***Momento de primer orden o estático*** del sistema de partículas respecto a un punto O:

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_i \, m_i \qquad \vec{M}_O = \int_S \vec{r} \, dm$$

- ***Centro de masas:*** el centro de masas **G** de un sistema de partículas es el punto en el que habría que colocar toda la masa para obtener el mismo momento estático. Es la posición media ponderada de las masas del sólido.

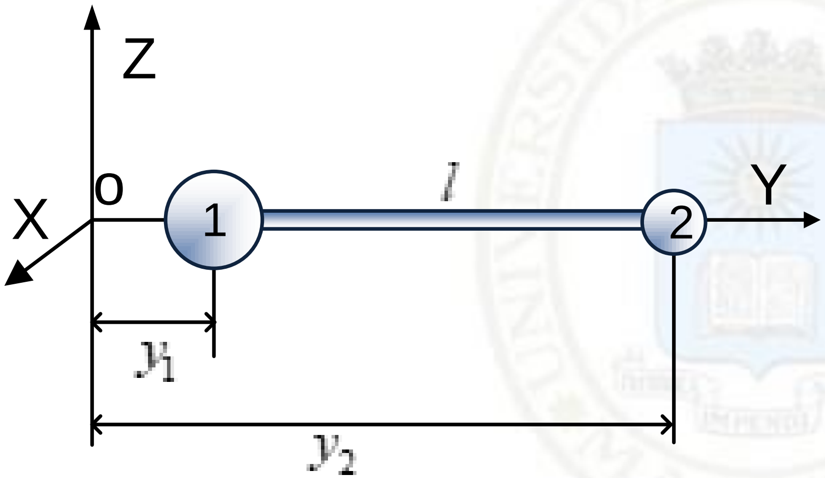
  – Modelo discreto: $M\vec{r}^{\,G} = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r}^{\,i}$; con $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

  – Modelo continuo: $M\vec{r}^{\,G} = \int_S \vec{r} \, dm$; con $M = \int_S dm$

Geometría de masas: Centro de masas

Cálculo de centros de masa

Modelo discreto



$$\vec{r}^{\,G} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r}^{\,i}}{M}$$

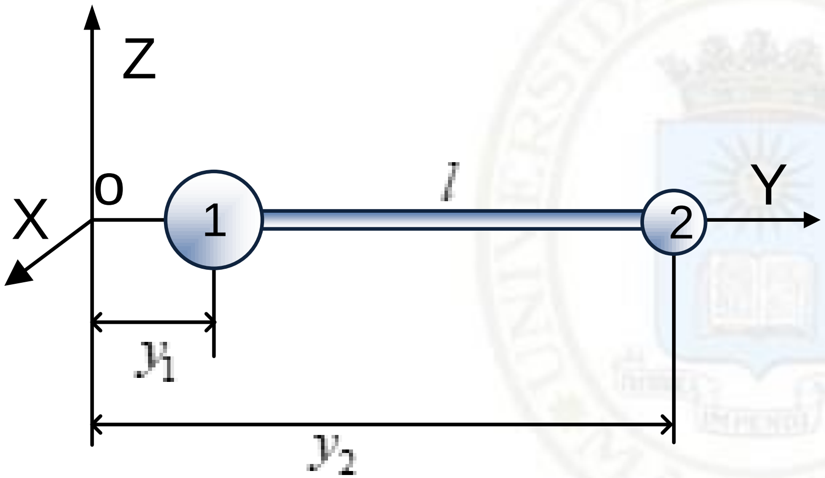
con $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

$$m_1 = 2m; \quad m_2 = m; \quad m_{barra} \simeq 0$$

Geometría de masas: Centro de masas

Cálculo de centros de masa

Modelo discreto



$$\vec{r}^{\,G} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r}^{\,i}}{M}$$

con $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$

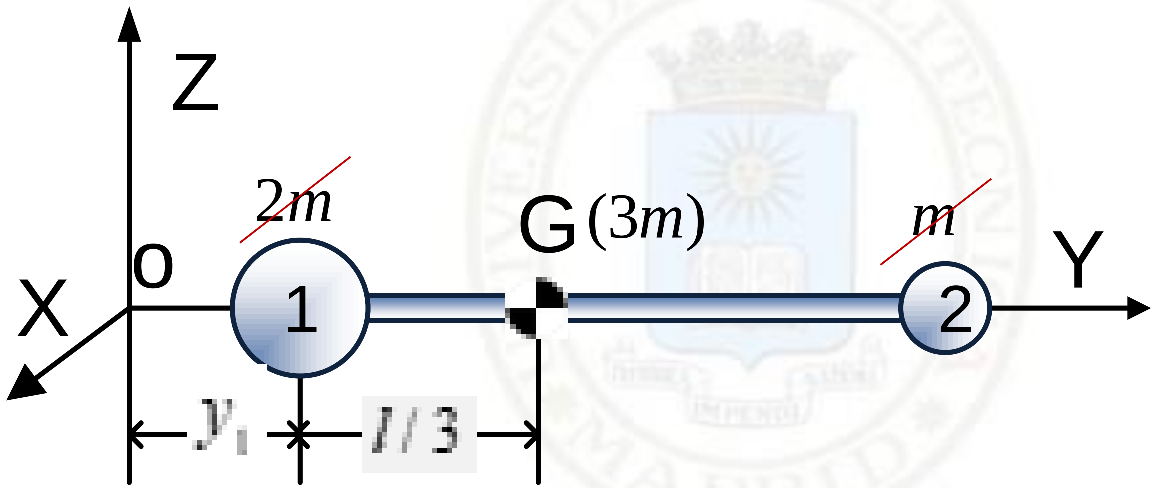
$$m_1 = 2m; \quad m_2 = m; \quad m_{barra} \simeq 0$$

$$x^G = z^G = 0$$

$$y^G = \frac{2my_1 + m(y_1 + l)}{3m} = \frac{3my_1 + ml}{3m} = y_1 + \frac{l}{3}$$

Cálculo de centros de masa

Modelo discreto



$$m_1 = 2m; \quad m_2 = m; \quad m_{barra} \simeq 0$$

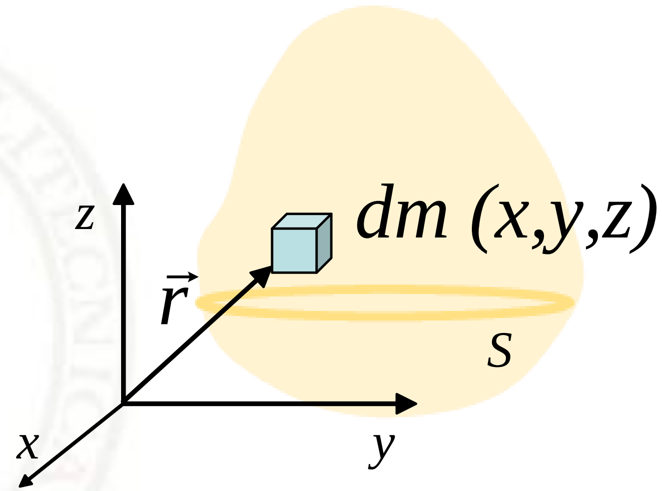
$$x^G = z^G = 0; \quad y^G = y_1 + \frac{l}{3}$$

Cálculo de centros de masa

Modelo continuo

$$m_i \to dm; \quad \vec{r}_i \to \vec{r}; \quad \sum \to \int$$

$$\boxed{\vec{r}^{\,G} = \frac{\int_S \vec{r}\, dm}{M}} \quad \text{con} \quad M = \int_S dm$$

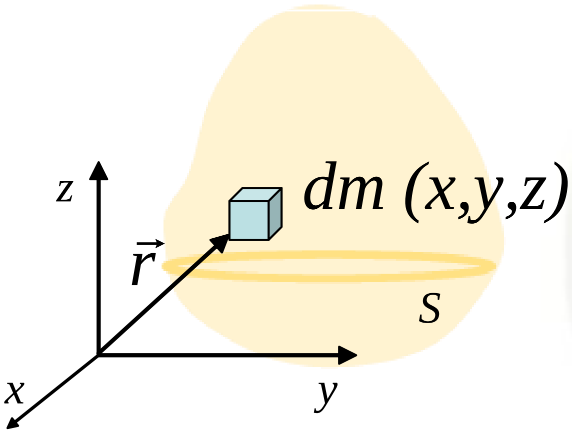


$$x^G = \frac{\int_S x\,dm}{M}; \quad y^G = \frac{\int_S y\,dm}{M}; \quad z^G = \frac{\int_S z\,dm}{M}$$

Geometría de masas: Centro de masas

Cálculo de centros de masa. Modelo continuo

- *Si el cuerpo tiene* ***TRES dimensiones,*** *la masa ocupa un volumen*



$$dm = \rho dV$$

Siendo ρ la ***densidad volumétrica*** (masa por unidad de volumen en cada punto), en *kg/m³*

$$\rho(x,y,z) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

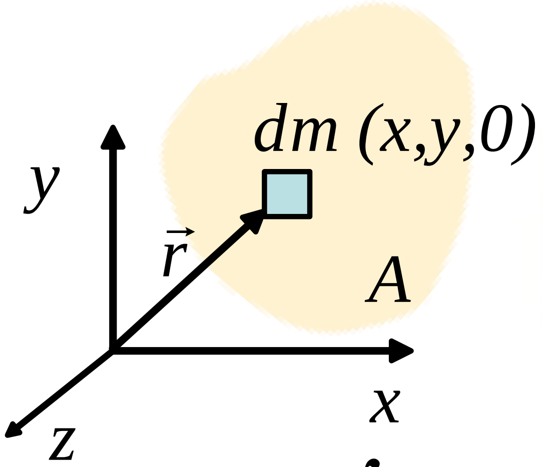
$$x^G = \frac{\int_S x\,dm}{M} = \frac{\int_S x \rho\, dV}{\int_S \rho\, dV} = \frac{\int_S x\, dV}{\int_S dV}$$

Sólidos **homogéneos**
densidad (ρ) constante

Y análogamente para $y^G; \quad z^G$

Cálculo de centros de masa. Modelo continuo

- *Si el cuerpo tiene* ***DOS dimensiones*** *(placa)*



$$dm = \sigma dA$$

Siendo σ la ***densidad superficial*** (*kg/m²*)

$$\sigma(x,y) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

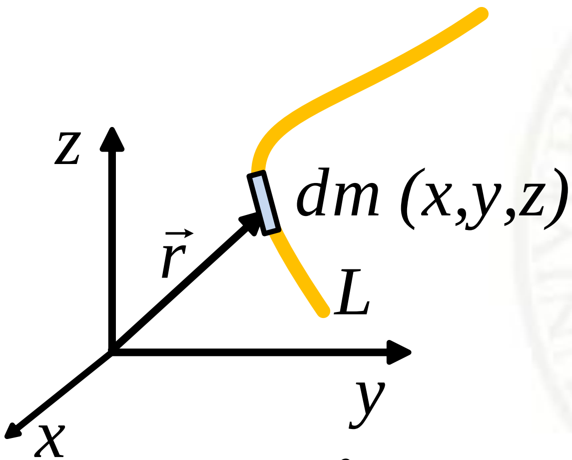
$$x^G = \frac{\int_S x\,dm}{M} = \frac{\int_S x\sigma\,dA}{\int_S \sigma\,dA} = \frac{\int_S x\,dA}{\int_S dA}$$

Sólidos **homogéneos**
densidad (σ) constante

Y análogamente para $y^G; \quad z^G = 0$

Cálculo de centros de masa. Modelo continuo

- *Si el cuerpo tiene **UNA dimensión** ("alambre")*



$$dm = \lambda dL$$

Siendo λ la ***densidad lineal*** (*kg/m*)

$$\lambda = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta L}$$

$$x^G = \frac{\int_S x\,dm}{M} = \frac{\int_S x\lambda\,dL}{\int_S \lambda\,dL} = \frac{\int_S x\,dL}{\int_S dL}$$

Sólidos **homogéneos**
densidad (λ) constante

Y análogamente para $y^G; \quad z^G$

Geometría de masas: Centro de masas

Centroide – Centro de Masas – Centro de Gravedad

- ***Centroide o baricentro (C):*** *Es el centro **geométrico***
- ***Centro de Masas (CM):*** *Es la posición media ponderada de las **masas** del sólido*
- ***Centro de Gravedad (G):*** *Es el punto imaginario de aplicación de la resultante de todas las **fuerzas de gravedad** que actúan sobre las distintas porciones materiales de un cuerpo, de tal forma que el momento respecto a cualquier punto de esta resultante aplicada en el centro de gravedad es el mismo que el producido por los pesos de todas las masas materiales que constituyen dicho cuerpo*

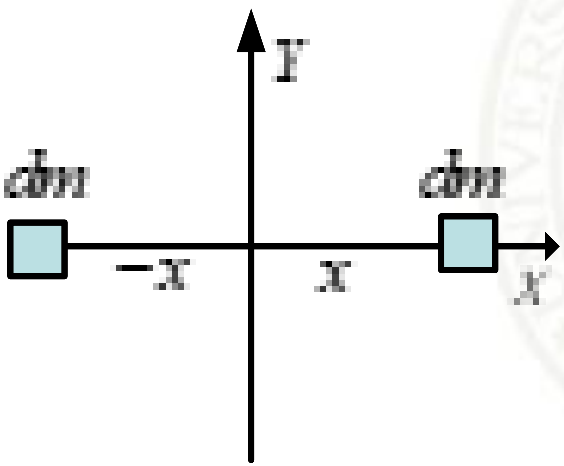
Sólidos **homogéneos**
densidad constante → $CM \equiv C$

Campo gravitatorio uniforme
(**gravedad constante**) → $CM \equiv G$

Geometría de masas: Centro de masas

Cálculo del centro de masas: SIMETRÍAS

Supongamos que el eje Y fuese de simetría del sólido: por cada *dm* a una distancia *x* a la derecha del eje, habría otro idéntico a la misma distancia (-*x*) al otro lado.



Su contribución al numerador de la x^G sería :

$$-x\,dm + x\,dm = 0$$

$$x^G = \frac{x dm + dm(-x)}{2dm} = 0$$

→ G está en el eje Y de simetría

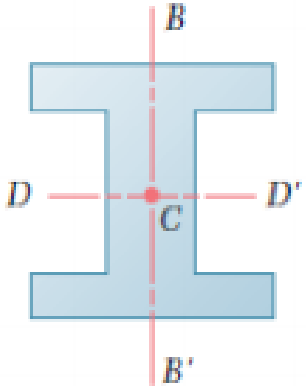
Si existe un elemento de simetría en la pieza, el centro de masas está sobre él

Geometría de masas: Centro de masas

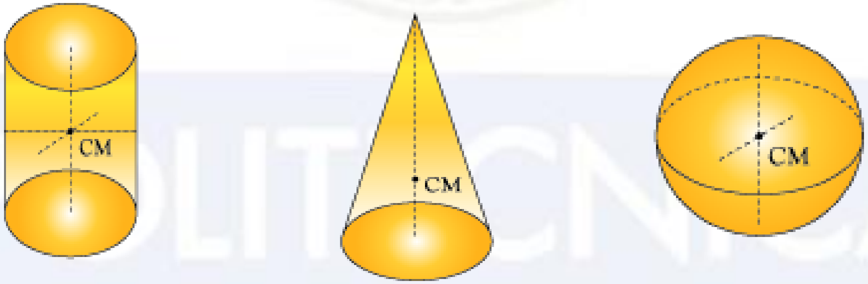
Cálculo del centro de masas: SIMETRÍAS

Si existe un elemento de simetría en la pieza, el centro de masas está sobre él

- Si hay un eje de simetría, G está en el eje
- Si hay un plano de simetría, G está en el plano



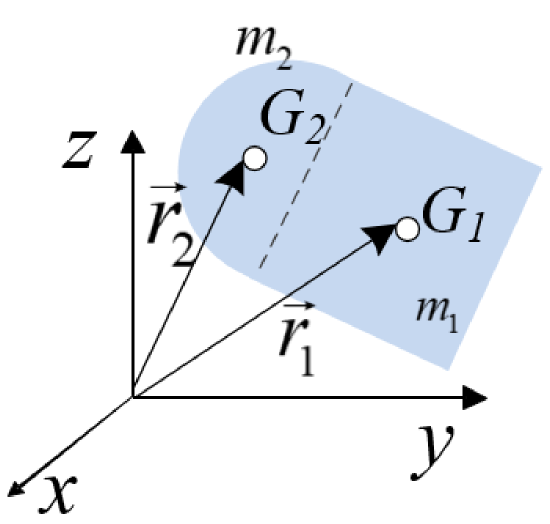
- Si hay simetría de revolución o central, siempre estará en el eje o en el centro



Geometría de masas: Centro de masas

Cálculo del centro de masas: Sólidos COMPUESTOS

- Podemos dividir el cuerpo en partes, y luego promediar



Si la descomposición es en N cuerpos: $S_1, \ldots\ldots, S_N$

$$\vec{r}^{\,G} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r}^{\,i}}{M}$$

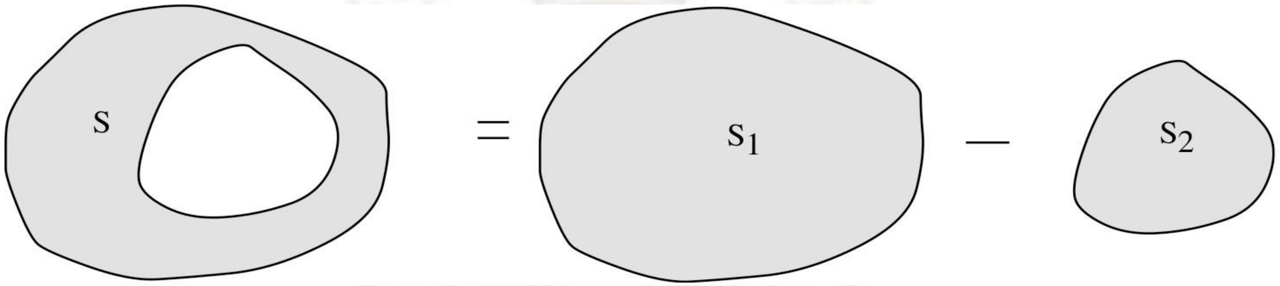
En esta figura:

$$\vec{r}^{\,G} = \frac{m_1 \, \vec{r}_1 + m_2 \, \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Geometría de masas: Centro de masas

Cálculo del centro de masas: Sólidos COMPUESTOS

- Se puede usar también para tratar **cuerpos con huecos**. Se puede calcular como el del cuerpo completo, mas el del hueco con masa negativa.



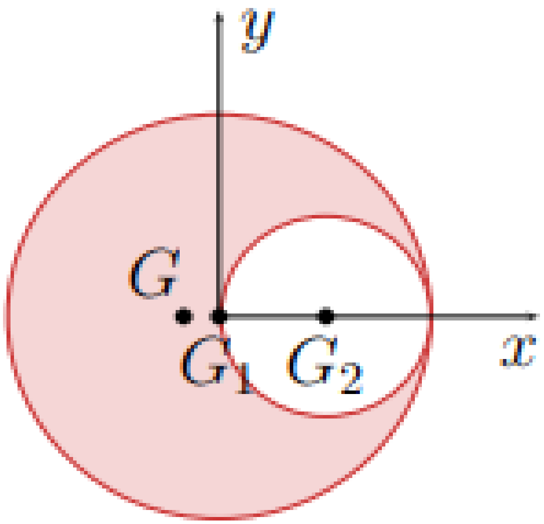
$$M = m_1 - m_2$$

$$\vec{r}^{\,G} = \frac{m_1\,\vec{r}_1 - m_2\,\vec{r}_2}{m_1 - m_2}$$

(Para N cuerpos, la composición tendrá sumas y restas, si hay huecos)

Geometría de masas: Centro de masas

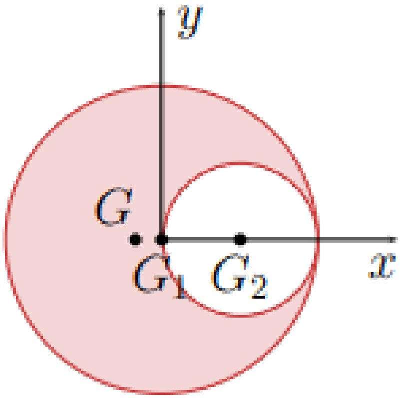
Ejemplo: Obtener la posición del centro de masas de un disco plano homogéneo de radio *R*, del que se ha recortado un trozo circular de radio *R/2* tangente al borde del disco. La masa del cuerpo con agujero es *M*.



Geometría de masas: Centro de masas

Ejemplo: Obtener la posición del centro de masas de un disco plano homogéneo de radio *R*, del que se ha recortado un trozo circular de radio *R/2* tangente al borde del disco. La masa del cuerpo con agujero es *M*.

- *Podemos calcular el centro de masas como el de un disco completo sin agujero (solido 1), más el disco recortado con masa negativa (sólido 2)*
- *Por la geometría conocemos los centros de masas, están sobre el* ***eje x de simetría****:* $x^{G1}=0$; $x^{G2}=R/2$; $y^{G1}=y^{G2}=y^{G}=0$
- *Como el disco es homogéneo, la posición de G va a ser independiente de la masa. Podemos trabajar con la densidad superficial σ sin necesidad de calcularla. Así, las masas de los sólidos son:*



$$m_1 = \sigma A_1 = \sigma\pi R^2 \qquad m_2 = \sigma A_2 = \sigma\pi\frac{R^2}{4}$$

Y la del sólido completo:

$$M = m_1 - m_2 = \sigma\left(\pi R^2 - \pi\frac{R^2}{4}\right) = \frac{3\sigma\pi R^2}{4}$$

Geometría de masas: Centro de masas

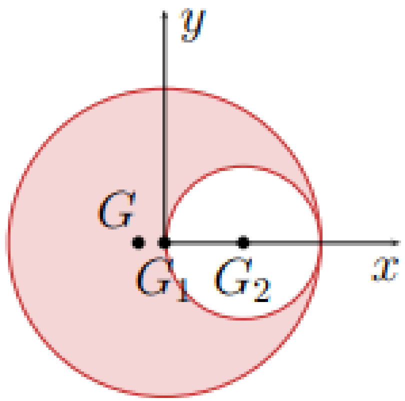
Ejemplo: Obtener la posición del centro de masas de un disco plano homogéneo de radio *R*, del que se ha recortado un trozo circular de radio *R/2* tangente al borde del disco. La masa del cuerpo con agujero es *M*.

- *Podemos calcular el centro de masas como el de un disco completo sin agujero (solido 1), más el disco recortado con masa negativa (sólido 2)*
- *Por la geometría conocemos los centros de masas, están sobre el* ***eje x de simetría****:* $x^{G1} = y^{G1} = y^{G2} = y^{G} = 0$; $x^{G2} = R/2$
- *Como el disco es homogéneo, la posición de G va a ser independiente de la masa. Podemos trabajar con la densidad superficial σ sin necesidad de calcularla. Así, las masas de los sólidos son:*

$$m_1 = \sigma A_1 = \sigma \pi R^2 \qquad m_2 = \sigma A_2 = \sigma \pi \frac{R^2}{4}$$

Y la del sólido completo:

$$M = m_1 - m_2 = \sigma\left(\pi R^2 - \pi \frac{R^2}{4}\right) = \frac{3\sigma\pi R^2}{4}$$



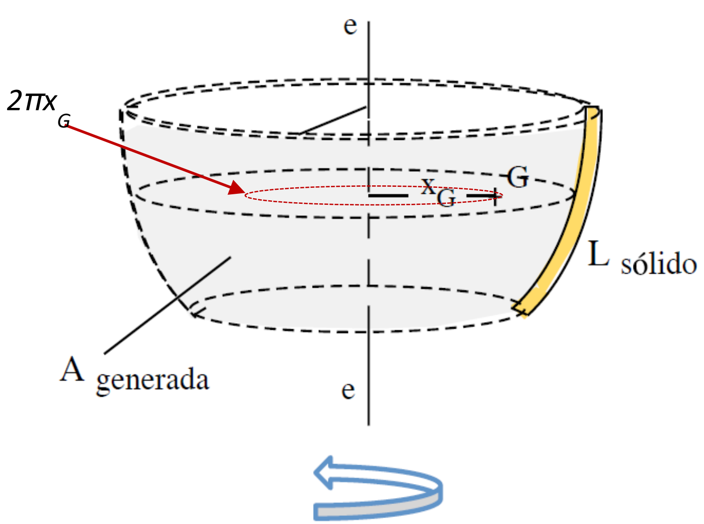
$$M x^G = m_1\, x^{G_1} - m_2\, x^{G_2}$$

$$\frac{3\sigma\pi R^2}{4} x^G = \underbrace{\sigma\pi R^2 0}_{0} - \sigma\pi \frac{R^2}{4}\frac{R}{2}$$

$$\boxed{x^G = -\frac{R}{6};\; y^G = 0}$$

Cálculo del centro de masas: Teoremas PAPPUS-GULDING

Permiten situar el c.m. de **sólidos homogéneos** (CM≡C). Hay uno para sólidos unidimensionales planos ("alambres") y otro para placas planas.



1er teorema

El área A de una superficie de revolución generada mediante la rotación de una curva C alrededor de un eje externo (que no la corte) sobre el mismo plano es igual a su longitud $L_{sólido}$, multiplicada por la distancia recorrida por su centroide en su rotación completa alrededor de dicho eje:

$$\boxed{A_{generada} = 2\pi x_G \, L_{sólido}}$$

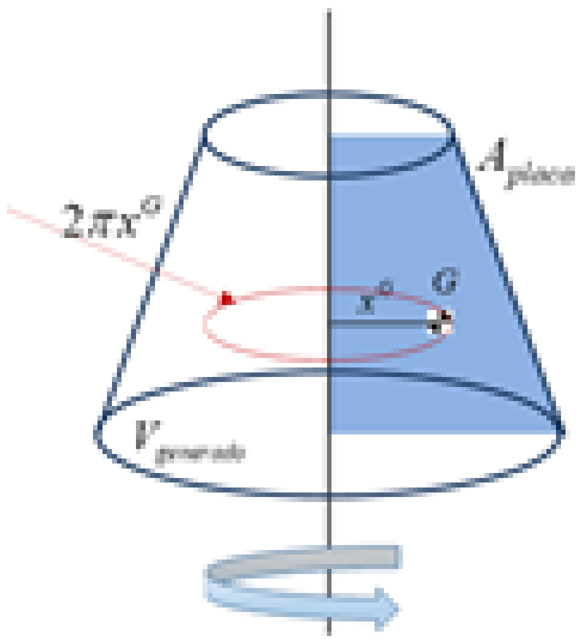
Siendo x_G la distancia del c.m. al eje de rotación. (Permite calcular x_G o el área)

Geometría de masas: Centro de masas

Cálculo del centro de masas: Teoremas PAPPUS-GULDING[1]

2^er teorema

El volumen V de un sólido de revolución generado mediante la rotación de un área plana A alrededor de un eje externo es igual al producto del Área por la distancia recorrida por su centroide en una rotación completa alrededor de dicho eje:



$$\boxed{V_{generado} = 2\pi x^G A_{placa}}$$

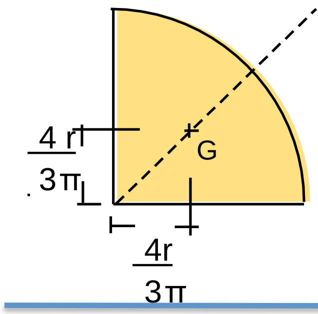
Siendo x^G la distancia del c.m. al eje de rotación

[1]*Demostración y ejemplos en: https://www.youtube.com/watch?v=3MzI-EzjQrA*

Geometría de masas: Centro de masas

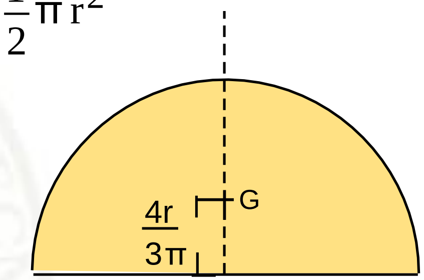
Cuadrante de disco de radio r:

$$\text{Área} = \frac{1}{4}\pi r^2$$

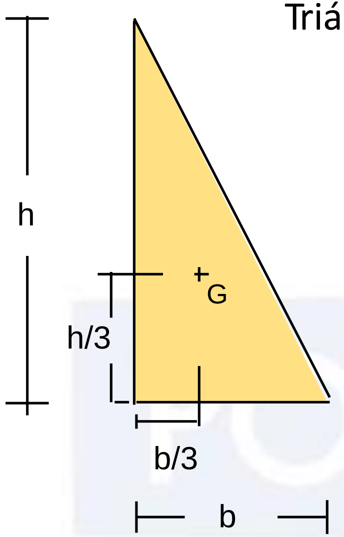


Semidisco de radio r:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\pi r^2$$

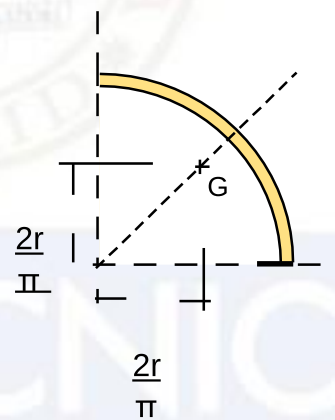


Triángulo:



$$\text{Área} = \frac{1}{2} b \cdot h$$

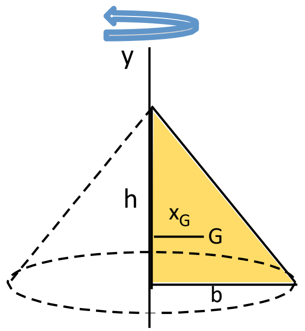
Cuarto de circunferencia de radio r



$$\text{Longitud} = \frac{1}{4} 2\pi r$$

Geometría de masas: Centro de masas

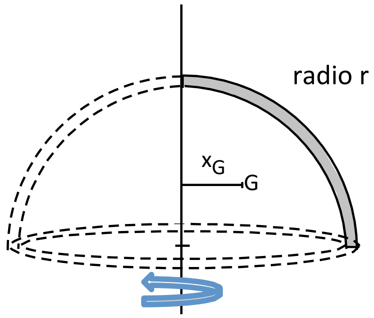
Ejemplos: Algunos c.m. usando Pappus-Guldin



•**Placa triangular** genera cono

$$V_{generado} = 2\pi x_G\, A_{placa}$$

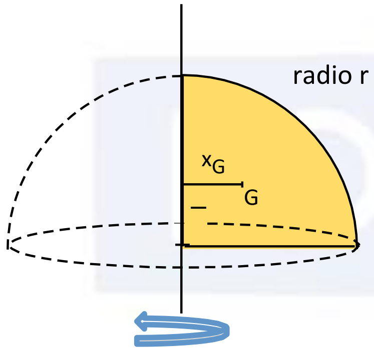
$$\frac{1}{3}\pi b^2 h = 2\pi x_G\, \frac{1}{2} bh \;\longrightarrow\; x_G = \frac{1}{3} b$$



•**Cuarto de circunferencia** genera media cáscara esférica

$$A_{generada} = 2\pi x_G\, L_{sólido}$$

$$\frac{1}{2} 4\pi r^2 = 2\pi x_G\, \frac{1}{4} 2\pi r \;\longrightarrow\; x_G = \frac{2r}{\pi}$$



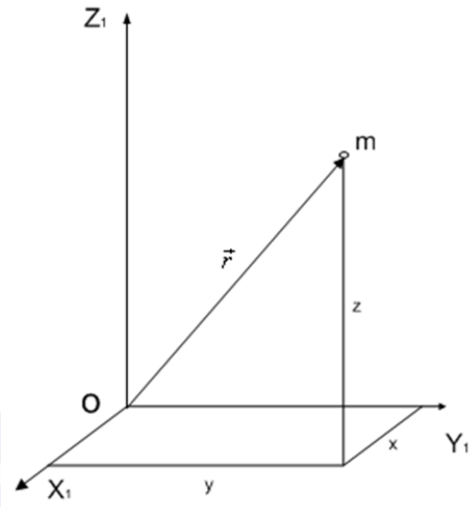
•**Cuadrante de disco** genera media esfera

$$V_{generado} = 2\pi x_G\, A_{placa}$$

$$\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi x_G\, \frac{\pi r^2}{4} \;\longrightarrow\; x_G = \frac{4r}{3\pi}$$

Definiciones

- ***Momento de inercia*** del sistema de partículas/sólido respecto a un punto O, un eje o un plano, es la suma de los productos de cada una de las masas de las partículas del sistema por el cuadrado de la distancia que la separa del punto, del eje o del plano:



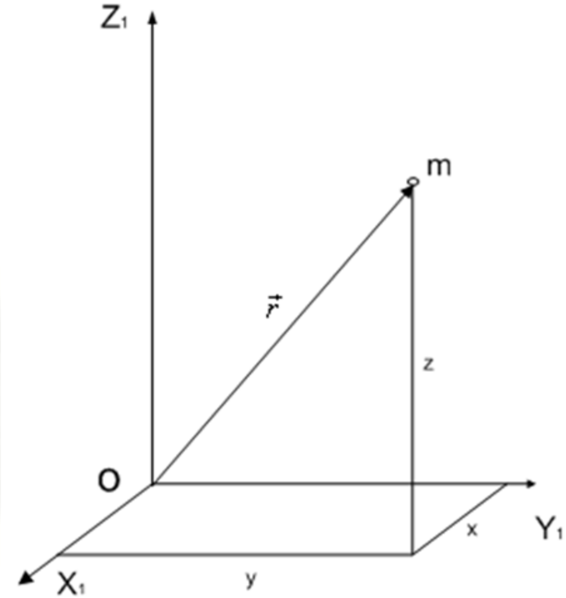
$$I = \sum_i r_i^2 \, m_i \qquad I = \int_S r^2 \, dm$$

Siendo r^i o r la distancia que lo separa del punto, del eje o del plano

Si ***O=G***, los momentos se llaman ***CENTRALES***

Geometría de masas: Momentos de inercia

Definiciones



- ***Momento de inercia respeto del origen***:

$$I_O = \int_S r^2 \, dm = \int_S \left(x^2 + y^2 + z^2 \right) dm$$

- ***Momento de inercia respeto de los ejes***:

$$I_x = \int_S r^2 \, dm = \int_S \left(y^2 + z^2 \right) dm$$

$$I_y = \int_S r^2 \, dm = \int_S \left(x^2 + z^2 \right) dm$$

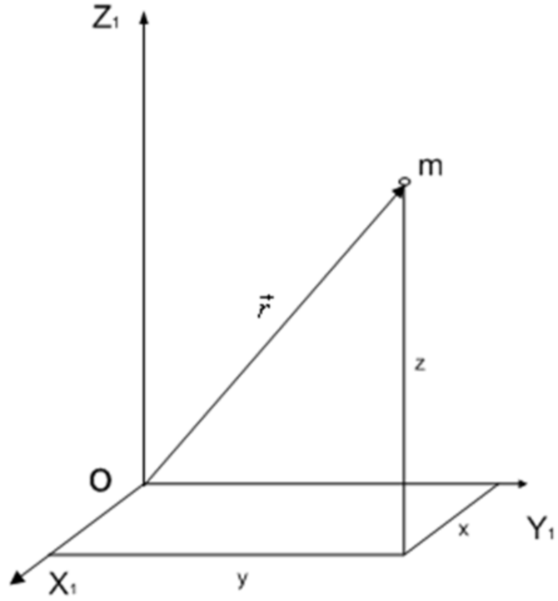
$$I_z = \int_S r^2 \, dm = \int_S \left(x^2 + y^2 \right) dm$$

$$2\, I_O = I_x + I_y + I_z$$

Definiciones

○ ***Momento de inercia respeto a los planos***:

$$I_O = \int_S r^2\, dm = \int_S \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dm$$



Plano OXY $\quad I_{xy} = \int_S r^2\, dm = \int_S z^2\, dm$

Plano OXZ $\quad I_{xz} = \int_S r^2\, dm = \int_S y^2\, dm$

Plano OYZ $\quad I_{yz} = \int_S r^2\, dm = \int_S x^2\, dm$

$$I_O = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}$$

Geometría de masas: Momentos de inercia

- ***Momentos de inercia***:

Además:

$$I_x = \int_S \left(y^2 + z^2 \right) dm = I_{xy} + I_{xz} = \int_S z^2 \, dm + \int_S y^2 \, dm$$

$$I_y = I_{xy} + I_{yz}$$

$$I_z = I_{xz} + I_{yz}$$

- ***Radio de giro (K)***: es un parámetro tal que:

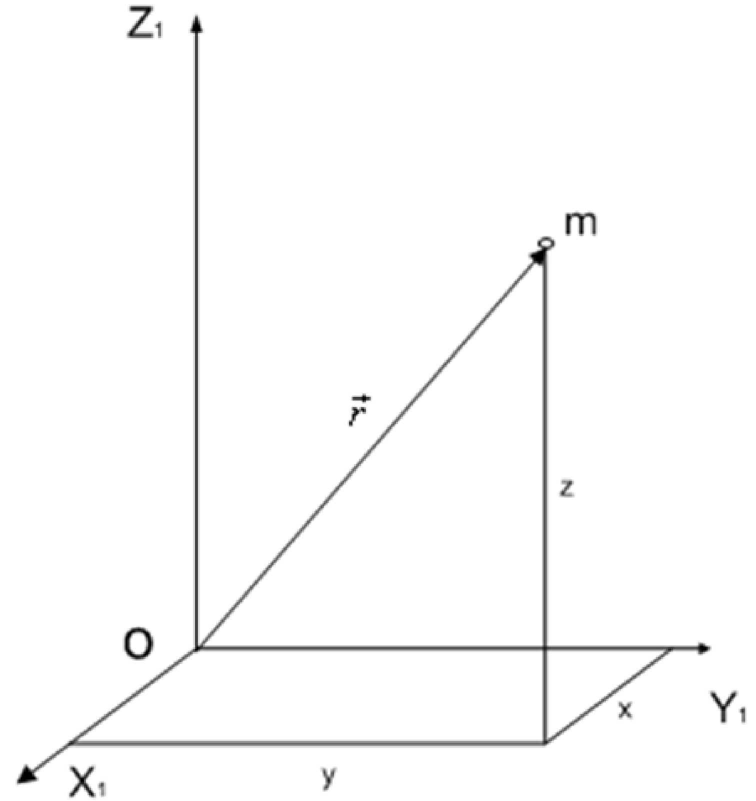
$$I = K^2 \, m$$

Donde ***m*** es la masa total del sistema.

Geometría de masas: Productos de inercia

Definiciones

- ***Producto de inercia*** de un sistema material respecto a dos planos ortogonales:



Plano OXY y OXZ $$P_{yz} = \int_S y\, z\, dm$$

Plano OXY y OYZ $$P_{xz} = \int_S x\, z\, dm$$

Plano OXZ y OYZ $$P_{xy} = \int_S x\, y\, dm$$

Definiciones

Los momentos y productos de inercia que aparecen en la cinética del sólido se pueden disponer de forma más compacta en forma de matriz, que se denomina ***tensor de inercia*** del sólido en un punto ***O***.

$$\overline{\overline{I_O}} = \begin{bmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

- Cuando el punto *O* es el centro de masas del sólido, se llama **tensor central:** $\overline{\overline{I_G}}$
- Los momentos y productos de inercia calculados en **G** también se llaman centrales.

Geometría de masas: Direcciones principales de inercia

Los ***ejes principales de inercia*** de un sólido relativos a un punto ***O*** son aquellos ejes con respecto a los cuales los **productos de inercia** son **nulos.**

$$\boxed{P_{xy} = P_{xz} = P_{yz} = 0}$$

A los **momentos** de inercia con respecto a dichos ejes se les denomina **principales de inercia**

$$\overline{\overline{I_O}} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

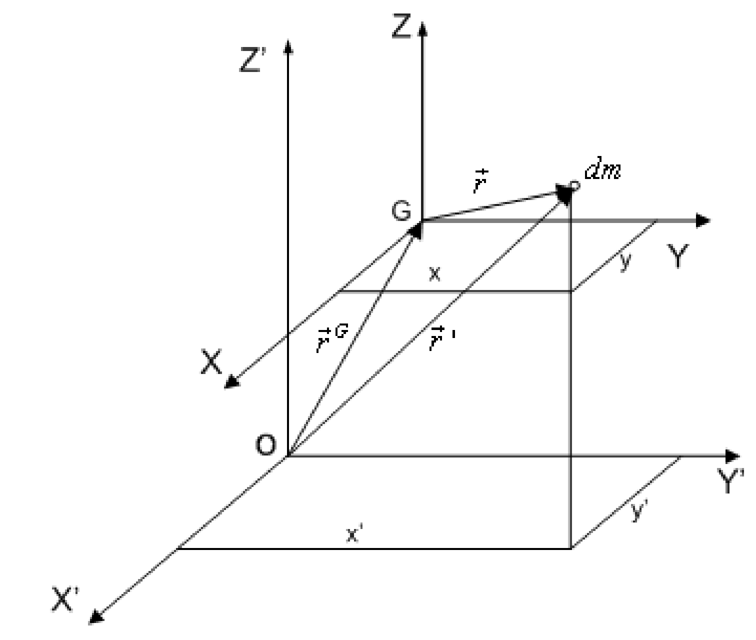
Los **ejes principales de inercia** de un sólido relativos a un punto siempre existen.

Geometría de masas: Traslación de ejes

Teorema del eje paralelo o Teorema de Steiner:

"El ***momento de inercia*** de un sistema material respecto a un eje es igual al momento de inercia del sistema respecto a un eje paralelo al primero, que pase por su **centro de masas**, más la masa total del sistema por el cuadrado de la distancia entre dichos ejes"

$$\boxed{I_{z'}^{O} = I_{z}^{G} + M\ d_{z\,z'}^{2}}$$



Geometría de masas: Traslación de ejes

Teorema del eje paralelo o Teorema de Steiner:

"El ***producto de inercia*** de un sistema material respecto a dos planos perpendiculares es igual al producto de inercia del sistema respecto a dos planos paralelos a los anteriores, que pasen por su **centro de masas**, más la masa total del sistema por el las coordenadas del centro de masas"

$$\boxed{P^{O}_{x'y'} = P^{G}_{xy} + x_G \; y_G \; M}$$